Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 97 (1915)

Vereinsnachrichten: Mathématiques et Astronomie

Autor: [s.n.]

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

I

Mathématiques et Astronomie

(et Séance de la Société Mathématique Suisse)

Mardi 14 septembre 1915

Introducteur : M. le Prof. Dr H. Fehr.
Présidents : MM. les Prof. Drs C. Cailler et H. Fehr.
Secrétaire : M. le Prof. Dr M. Plancherel.

---

1. En ouvrant la première séance, M. le professeur H. Fehr, président, a rappelé qu'au moment de la fondation de la Société Helvétique, la chaire de mathémathique de l'ancienne Académie était occupée par le géomètre Simon L'Huillier, puis il a indiqué, à grands traits, le rôle joué par les mathématiciens suisses du XIXe siècle. Les principaux d'entre eux sont : Louis Bertrand (de Genève), 1731-1812; Simon L'Huillier, 1750-1840; Robert Argand, 1768-1822; Jacob Steiner, 1796-1863, Charles Sturm, 1803-1855; Ludwig Schläfli, 1814-1895; Gabriel Oltramare, 1816-1906; Ch. Cellérier, 1818-1889; J. Amsler-Laffon, 1823-1912; Georg Sidler, 1831-1907; Charles Ruchonnet, 1832-1914; Hermann Kinkelin, 1841-1913; Von der Mühll, 1841-1912; Gustave Cellérier, 1855-1914; Walter Ritz, 1878-1909.

2. M. le professeur L.-G. DuPasquier (Neuchâtel). — *Sur les systèmes de nombres complexes.*

Soit un système de nombres complexes comprenant une infinité de « complexes »

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_r e_r = \sum_{\lambda}^{1\ldots r} x_\lambda e_\lambda \ ,$$

où les $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sont r nombres réels quelconques dits *coordonnées du complexe* x, et les $e_1, e_2, \ldots e_\lambda, \ldots, e_r$ des symboles

dits *les unités relatives* du système de nombre envisagé. Supposons définies, dans ce système de nombres complexes, les opérations rationnelles de l'addition et de la multiplication, et leurs opérations inverses : la soustraction et la division. On sait qu'alors tout produit $e_i e_k$ de deux unités relatives quelconques s'exprime en fonction linéaire, à coefficients réels, des mêmes unités relatives e_λ.

Appelons *complexe rationnel* un tel nombre complexe dont toutes les r coordonnées x_λ sont des nombres rationnels quelconques, entiers ou fractionnaires. L'ensemble de tous les complexes rationnels forme alors un « domaine de rationalité » ou « *corps* de nombres complexes », c'est-à-dire que ces complexes rationnels se reproduisent par les 4 opérations de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division; en d'autres termes : la somme, la différence, le produit et le quotient (pour autant que la division est définie et possible) de deux complexes rationnels quelconques est toujours de nouveau un complexe rationnel.

Pour faire l'arithmétique de ce corps de nombres, c'est-à-dire pour ériger une théorie des nombres dans ce domaine de rationalité, il faut tout d'abord le départager en deux, mettant d'une part les complexes rationnels « entiers » et, d'autre part, les complexes rationnels « non entiers ».

La définition suivante se présente le plus naturellement à l'esprit :

Un complexe rationnel

$$x = \sum_{\lambda}^{1 \ldots r} x_\lambda e_\lambda$$

est dit *entier,* si toutes ses r coordonnées sont des nombres entiers ordinaires; ce complexe x sera dit *non entier,* si l'une au moins de ses r coordonnées est un nombre fractionnaire.

Prenant pour base cette définition et envisageant les *complexes entiers* ainsi définis comme éléments (c'est-à-dire comme l'analogue des nombres *entiers* dans l'arithmétique classique), on peut ériger toute une arithmétique du système de nombres complexes considéré. Cette arithmétique généralisée présente

beaucoup d'analogies avec l'arithmétique ordinaire dont les éléments sont les nombres rationnels entiers. On retrouve en général, dans cette arithmétique des complexes, l'équivalent du *nombre premier,* et la possibilité de décomposer un complexe entier quelconque en *facteurs premiers;* on y retrouve aussi les *diviseurs communs* de 2 complexes entiers donnés ou, plus généralement, de n complexes entiers donnés; on y retrouve encore *un algorithme* analogue à celui d'*Euclide,* permettant de déterminer, par un nombre fini d'opérations rationnelles, *le plus grand commun diviseur* de plusieurs complexes entiers donnés; on y retrouve une théorie des congruences, l'analogue du théorème de *Wilson,* l'analogue du théorème de *Fermat,* etc.

Mais il y a des cas où cette analogie ne joue pas. Il y a des systèmes de nombres où l'arithmétique généralisée basée sur la définition ci-dessus du nombre complexe *entier* présente de curieuses exceptions aux règles générales, des anomalies étonnantes et inexplicables. Cela tient à la définition même du complexe *entier,* comme l'a montré pour la première fois M. *A. Hurwitz* à Zurich, sur l'exemple des quaternions entiers.

Voici les considérations pouvant conduire à une définition satisfaisante du nombre complexe *entier :*

Les nombres entiers sont caractérisés par les propriétés fondamentales suivantes :

1° Ils doivent former *un domaine d'intégrité,* c'est-à-dire qu'ils doivent se reproduire par addition, soustraction et multiplication; en d'autres termes : la somme, la différence et le produit de deux nombres *entiers* doit toujours être de nouveau un nombre entier.

2° Ce domaine d'intégrité doit contenir « le nombre 1 » et « le nombre zéro ».

3° Ce domaine d'intégrité doit posséder *une base finie;* autrement dit : il doit être possible de choisir, dans ce domaine d'intégrité, un nombre fini de complexes entiers, disons t_1, t_2, ..., t_n, jouissant de la propriété suivante :

Si m_1, m_2, ..., m_n désignent des nombres entiers ordinaires quelconques (positifs, nuls ou négatifs), l'expression

$$m_1 t_1 + m_2 t_2 + \ldots + m_n t_n \tag{1}$$

doit pouvoir reproduire, par un choix convenable des nombres entiers m_λ, absolument tous les éléments du domaine envisagé. Réciproquement, le domaine d'intégrité en question doit se composer de *tous* les complexes, et *uniquement* des complexes, qu'on obtient en assignant, dans l'expression (1) ci-dessus, aux nombres ordinaires m_1, m_2, ... m_n, de toutes les manières possibles, des valeurs entières positives, nulles ou négatives.

Tout ensemble de complexes jouissant des trois propriétés ci-dessus est appelé *un domaine holoïde.*

En vertu de cette définition, tout domaine holoïde contient une infinité d'éléments, parmi lesquels « le nombre 1 » et « le nombre zéro »; de plus, on peut y effectuer sans restriction l'addition, la soustraction et la multiplication, et cela sans jamais sortir du domaine; enfin, il possède une base finie.

Or, pour caractériser les nombres entiers, il faut une quatrième propriété :

4° Ils doivent constituer un domaine holoïde qui soit *maximal.*

Définition : un domaine holoïde [H] est dit *maximal,* lorsqu'il n'existe pas, dans le corps de nombres envisagé, un autre domaine holoïde contenant *tous* les éléments de [H], plus encore d'autres éléments non contenus dans [H].

La définition du complexe rationnel « entier » est alors la suivante : un complexe rationnel

$$x = \sum_{\lambda}^{1\ldots r} x_\lambda e_\lambda$$

est dit *entier,* s'il fait partie du domaine holoïde maximal en question; le complexe rationnel x sera dit *non entier,* s'il n'est pas contenu dans ce domaine holoïde maximal.

Adoptant cette définition et envisageant comme éléments les complexes « entiers » définis de *cette* façon, on peut construire, dans le domaine des nombres complexes entiers ainsi délimité, toute une arithmétique et toute une théorie des nombres, d'une simplicité analogue à celle de l'arithmétique ordinaire et de la théorie des nombres classique.

En prenant, comme exemples particuliers, différents systèmes de nombres complexes, l'orateur montre ce qui suit :

1° Cette définition du nombre complexe *entier* peut avoir comme conséquence qu'on appellera « entiers » même certains complexes rationnels x à coordonnées x_λ fractionnaires; il peut arriver aussi que certains complexes rationnels x ne soient pas des complexes « entiers », bien que toutes leurs coordonnées x_λ soient des nombres entiers ordinaires.

2° L'opération consistant à partager le corps de nombres envisagé en deux domaines, mettant d'un côté les complexes *entiers,* de l'autre les complexes *non entiers,* cette opération peut ne pas être univoque. Il existe, en effet, des systèmes de nombres complexes tels que le corps constitué par l'ensemble de tous les complexes rationnels contient *plusieurs* domaines holoïdes *maximaux,* très différents entre eux.

3° Etant donné un corps de complexes rationnels faisant partie d'un système déterminé de nombres complexes, il peut même arriver que ce corps de nombres ne contienne *aucun* domaine holoïde maximal. L'auteur cite, à titre d'exemple, un système de nombres complexes à trois coordonnées doué de cette curieuse particularité que, dans ce système, le corps des complexes rationnels ne contient aucun domaine holoïde maximal.

Si l'on fait alors l'arithmétique d'un domaine holoïde *non* maximal, on rencontre dans les théorèmes de divisibilité, dans la théorie du plus grand commun diviseur, etc., des exceptions curieuses, des anomalies surprenantes.

Ces anomalies-là ne se présentent pas quand l'ensemble des complexes rationnels *entiers* constitue un domaine holoïde maximal.

Discussion : M. Speiser, Mme Young et M. DuPasquier.

3. Dr. G. Pólya (Zürich). — *Ist die Nichtfortsetzbarkeit einer Potenzreihe der allgemeine Fall?*

Man pflegt in der Mathematik vom « allgemeinen Fall » zu sprechen, wenn die Menge der Ausnahmefälle

1. vom Masse Null, oder
2. von geringerer Dimension, oder
3. von geringerer Mächtigkeit ist, als die Menge der regel-

mässigen Fälle. — Die Menge der fortsetzbaren Potenzreihen und die der nichtfortsetzbaren haben die nämliche Mächtigkeit, die Mächtigkeit des Kontinuums. Der Begriff des Masses oder der der Dimension ist in dem Raume, dessen Elemente die Potenzreihen sind, noch nicht erklärt worden und allenfalls die Gedankengänge der Herren Borel und Fabry stützen sich auf keine explicit festgelegte Erklärung dieser Begriffe. Diese Gedankengänge also, wenn sie auch interessante Einblicke in die Natur der Potenzreihen eröffnen, erweisen es keineswegs streng, dass die Potenzreihen im Allgemeinen nicht fortsetzbar sind.

Es ist zweckmässig die Frage anders zu wenden. Man kann in dem Raume von unendlich vielen Dimensionen, dessen Punkte die im Einheitskreise konvergierenden Potenzreihen sind, gewisse mengentheoretische Begriffe passend erklären und folgenden Satz beweisen:

Die Menge der nichtfortsetzbaren Potenzreihen hat nur innere Punkte und ist überall dicht. Die Menge der fortsetzbaren Potenzreihen ist nirgendswo dicht und perfekt.

Dieser Satz *kann* bewiesen werden, denn die vorkommenden Begriffe des inneren Punktes, der überalldichten, der nirgendswodichten und der perfekten Menge sind mit völliger Bestimmtheit definiert worden. Alle diese Begriffe beruhen auf dem Begriffe der Umgebung. Die *volle Umgebung* $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ des Punktes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ heisst die Gesamtheit aller Punkte $u_0, u_1, u_2, \ldots$, die den Ungleichungen

$$|u_0 - a_0| \leqq \varepsilon_0, \quad |u_1 - a_1| \leqq \varepsilon_1, \ldots \quad |u_n - a_n| \leqq \varepsilon_n, \ldots$$

genügen, wobei

$$\varepsilon_n \geqq 0, \qquad \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\varepsilon_n} = 1$$

vorausgesetzt ist. Wenn die Potenzreihe

$$\sum (u_n - a_n) \varkappa^n$$

in einem grösseren Kreise konvergiert, als der Einheitskreis, so gehört der Punkt $u_0, u_1, u_2, \ldots$ zur *nächsten Umgebung* des Punktes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Es sind nur solche Zusammenfassungen der Potenzreihen zu Mengen zulässig, die keine Potenzreihe von ihrer nächsten Umgebung trennen. Endlich heisst der

Punkt a_0, a_1, a_2, ... ein *Häufungspunkt* der Menge M, wenn in einer beliebigen vollen Umgebung des Punktes a_0, a_1, a_2, ... ein Punkt gefunden werden kann, der der Menge M angehört und der nächsten Umgebung des Punktes a_0, a_1, a_2, ... nicht angehört.

Dieser Begriff des Häufungspunktes ist dem erwähnten Satz zugrunde gelegt. Eine ausführlichere Darstellung erscheint in den Acta Mathematica.

4. M. le Prof. Dr M. Plancherel (Fribourg). — *Sur la convergence d'une classe remarquable d'intégrales définies.*

Prenons comme champ fonctionnel Ω l'ensemble des fonctions $f(x)$, définies dans l'intervalle $(0, \infty)$ et de carré intégrable (au sens de Lebesgue) dans cet intervalle, c'est-à-dire telles que

$$\int_0^\infty f^2\, dx$$

soit finie. Considérons une transformation T faisant correspondre à toute fonction f du champ Ω une fonction T (f) du *même* champ. Nous caractériserons cette transformation par les propriétés suivantes :

a) *linéarité*

$$T(f_1 + f_2) = T(f_1) + T(f_2)\ ,$$
$$T(kf) = kT(f)\ , \qquad k \text{ constante}\ ;$$

b) *involution*

$$TT(f) = f\ .$$

c) *limitation.* Il existe une constante M telle que

$$\int_0^\infty [T(f)]^2\, dx \leqq M^2 \int_0^\infty f^2\, dx\ .$$

Une transformation vérifiant ces conditions sera dite une transformation fonctionnelle *linéaire, involutive et bornée.* Il existe alors une fonction *génératrice* $\Phi(x, y)$ permettant d'exprimer T (f) presque partout par la formule

$$T(f) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty f(y) \frac{\partial}{\partial y} \Phi(x, y)\, dy\ .$$

Dans le cas où

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \varphi(x, y)$$

existe presque partout et où l'on a

$$\int_0^x \int_0^y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} dx\, dy = \Phi(x, y) - \Phi(x, 0) - \Phi(0, y) + \Phi(0, 0)$$

elle peut s'écrire

$$T(f) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \left\{ f(y) \int_0^x \varphi(t, y)\, dt \right\} dy .$$

Dans ce cas $\varphi(x, y)$ est le *noyau* de la transformation T.

En général, il n'est pas permis de permuter les deux intégrations successives de la dernière formule et d'écrire

$$T(f) = \int_0^\infty f(y)\, \varphi(x, y)\, dy .$$

Par contre, il est toujours possible de déterminer une suite de constantes $\alpha_n \to \infty$ telles que

$$T(f) = \lim_{n \to \infty} \int_0^{\alpha_n} f(y)\, \varphi(x, y)\, dy$$

presque partout. La suite α_n dépend en général de la fonction f et varie avec elle. Il est, par suite, naturel de se demander quelle hypothèse sur la fonction f permettrait de se débarrasser de la suite particulière α_n et d'assurer la convergence presque partout de

$$\lim_{z \to \infty} \int_0^z f(y)\, \varphi(x, y)\, dy .$$

J'ai montré dans les *Rendiconti di Palermo*, tome 30, qu'il suffisait pour cela de supposer que

$$\int_0^\infty f^2(x) \sqrt[8]{x}\, dx$$

existe. En transposant aux « représentations intégrales » la méthode que j'ai employée pour étudier la convergence des

séries de fonctions orthogonales, j'obtiens une hypothèse plus large et je démontre le théorème suivant :

Soit φ (x, y) *le noyau d'une transformation fonctionnelle* T *linéaire, involutive bornée dans le champ des fonctions de carré intégrable dans l'intervalle* (0, ∞). *Pour toute fonction* f (x) *de ce champ, telle que*

$$\int_1^\infty f^2(x) \log^3 x \, dx$$

soit finie, la limite

$$\lim_{z \to \infty} \int_0^z f(y) \varphi(x, y) dy$$

existe presque partout et elle représente la transformée T (f) *de* f.

5. M. le Prof. W.-H. Young (Genève). — *Sur l'intégration par rapport à une fonction à variation bornée.*

Dans le rapport que cet auteur a donné lui-même à la Société mathématique suisse, il n'a pas abordé la partie du sujet qui se rapporte à la recherche de la fonction primitive. Récemment il a obtenu la généralisation parfaite des théorèmes de M. Lebesgue et de lui-même sur ce sujet. Les démonstrations sont fort simples. On peut en effet employer la méthode de M. de la Vallée-Poussin. Les « fonctions majorantes et minorantes » introduites par celui-ci rentrent en effet d'une manière tout à fait naturelle dans le cadre de la théorie de M. Young.

Désignant par $g(x)$ une fonction croissante, on aura à considérer non seulement des intégrales et des fonctions sommables par rapport à $g(x)$ mais aussi des nombres dérivés par rapport à $g(x)$; la mesure d'un ensemble deviendra la variation de $g(x)$ par rapport à cet ensemble, et, dans le cas où cette variation est nulle, on dira que l'ensemble complémentaire existe *presque partout par rapport à* g(x). Pour éviter des répétitions ennuyeuses on peut omettre l'expression « par rapport à $g(x)$ » dans les énoncés. On aura alors cinq théorèmes principaux :

1° *S'il existe une fonction* f(x) *intermédiaire (au sens large) entre les deux nombres dérivés à droite d'une fonction continue* F(x), *et si* f(x) *est sommable, ou bien*

i) f(x) *est infini* ($+\infty$ *ou* $-\infty$) *dans tous les points d'un ensemble ayant la puissance du contenu ou bien*

$$ii) \quad F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)\, dg(x) .$$

En particulier, par conséquent, si F(x) *a un nombre dérivé* Λ *sommable et fini sauf peut-être dans un ensemble dénombrable de points, on aura*

$$F(x) - F(a) = \int_a^x \Lambda\, dg(x) .$$

2° *L'intégrale indéfinie d'une fonction sommable* f(x) *a* f(x) *pour dérivée presque partout.*

3° *Si la fonction* F(x), *continue ou discontinue, est non-décroissante dans un intervalle* (a, b), *l'un quelconque* Λ *de ses nombres dérivés est sommable dans cet intervalle et l'on a*

$$\int_a^c \Lambda\, dg(x) = F(b) - F(a) \text{ — une fonction positive non décroissante.}$$

4° *Une fonction à variation bornée, continue ou discontinue, a une dérivée presque partout, et les nombres dérivés de la fonction sont sommables.*

5° *Une fonction* F(x) *continue et à variation bornée, dont l'un des nombres dérivés est fini, sauf peut-être dans les points d'un ensemble n'ayant pas la puissance du continu est l'intégrale indéfinie de ce nombre dérivé.*

Le premier de ces théorèmes est moins général que le théorème suivant obtenu par M. Young :

Si F(x) *est une fonction semi-continue inférieurement à droite et supérieurement à gauche, et si elle possède un nombre dérivé à droite (gauche)* f(x) *par rapport à* g(x), *sommable par rapport à* g(x) *sur l'ensemble S des points où* f(x) > 0, *on a les deux possibilités :*

1° f(x) $= -\infty$ *dans les points d'un ensemble de puissance* c ;

2° F(x) *est une semi-intégrale supérieure par rapport à* g(x), *en effet*

$$F(x) - F(a) = \int_s f(x)\, dg(x) +$$

une fonction positive non-décroissante. Pour obtenir ces généralisations il était nécessaire d'élaborer la théorie des nombres dérivés par rapport à $g(x)$ d'une fonction $F(x)$ qui est au moins d'un côté semi-continue. De telles fonctions ont fait leur apparitions à plusieurs reprises dans les recherches de M. Young, et les théorèmes qu'il obtient maintenant montrent de nouveau l'intérêt de ces fonctions. Il obtient entre autres un théorème du genre du théorème de Dini, et qui contient ce dernier comme cas spécial :

Si $F(x)$ *est semi-continue supérieurement à droite dans un intervalle* (a, b), *les bornes supérieures des nombres dérivés à gauche sont toutes les mêmes et coïncident avec la borne supérieure du rapport incrémental, les nombres dérivés et le rapport incrémental étant pris par rapport à* x *ou* g(x), *pourvu que* i) g(x) *soit continue à droite, ou* ii) F(x) *n'est pas monotone et non-croissant partout dans l'intervalle.*

Discussion : M. Plancherel.

6. Mme Grace Chisholm Young (Genève). — *Sur les courbes sans tangente.*

Weierstrass a démontré que la fonction continue représentée par la formule de Fournier

$$\sum_{n=0} b^n \cos a^n x\pi$$

n'a pas de dérivée. La question se pose : est-ce que la courbe $y = f(x)$, où $f(x)$ est la fonction de Weierstrass, n'a pas de tangente ? Pour ceci il ne suffit pas que la fonction n'ait pas de dérivée, car si elle avait une dérivée à droite et une dérivée à gauche, toutes les deux infinies mais avec des signes opposés, la courbe aurait une tangente singulière, dont le point d'incidence serait un point de rebroussement de la courbe. D'après un théorème connu, ceci ne peut avoir lieu que dans un ensemble

dénombrable de points. On verra qu'en effet il y a de tels points de rebroussement sur la courbe de Weierstrass, mais que, sauf dans un ensemble de première catégorie et de mesure nulle, chaque ligne passant par un point P de la courbe a un caractère tangentiel pour la courbe dans le point P considéré.

Discussion : M. C. Cailler, M. Raoul Pictet.

7. M. le Dr D. Mirimanoff (Genève) et Mme Grace Chisholm Young. — *Sur le théorème des tuiles.*

Une tuile d'après W. H. Young, l'auteur du théorème, est un élément de forme et de grandeur déterminées autour d'un point spécial dit point d'attachement. L'énoncé est le suivant : *Etant donné un ensemble de tuiles sur une droite, dont chacune peut être taillée autant que l'on veut, on peut trouver un nombre fini ou une infinité dénombrable de tuiles, ayant les propriétés suivantes :*

1° *la largeur de chaque tuile est plus petite que* e ;

2° *chaque point d'attachement est couvert par au moins une des tuiles ;*

3° *le point d'attachement* P_i *de la tuile* d_{P_i} *n'est pas couvert par une autre tuile ;*

4° *la somme des largeurs de tuiles diffère de la mesure* m (S) *de l'ensemble* S *des points d'attachement de moins* e'.

Ici e *et* e' *sont des quantités positives choisies.*

Si l'ensemble est fermé, les tuiles peuvent être trouvées en nombre fini.

La démonstration présentée est une élaboration par D. Mirimanoff de celle donnée par l'auteur sous une forme incomplète.

8. M. le Prof. L. Crelier (Berne-Bienne). — *Sur un théorème particulier de géométrie cinématique et quelques constructions de tangentes liées à ce théorème*[1].

Les résultats généraux de la géométrie cinématique peuvent être appliqués avec succès à un très grand nombre de méca-

[1] Voir L. Crelier, *Systèmes cinématiques* (collection *Scientia*), Gauthier Villars, Paris. Chapitres IV et VI.

nismes particuliers et conduire ainsi à une foule de résultats de détail originaux et forts intéressants.

Considérons en particulier le mécanisme bien connu « Bielle-Manivelle ». La manivelle étant OB et la bielle AB. Nous prendrons le chemin de la bielle suivant le diamètre OA et nous le considérerons comme axe des x. L'origine sera le centre O.

Nous avons,

pour la base : $(x^2 + y^2)(l^2 - R^2 - x^2)^2 - 4R^2x^4$

pour la roulante : $R^2(x^2 + y^2 - lx)^2 = l^2x^2(y^2 + (x - l)^2)$

pour la courbe C_d : $(x^2 - l^2)(x^2 + y^2) + R^2y^2 = 0$.

Cette dernière courbe est une conchoïde de la base par rapport au centre O et dont la constante est R = OB.

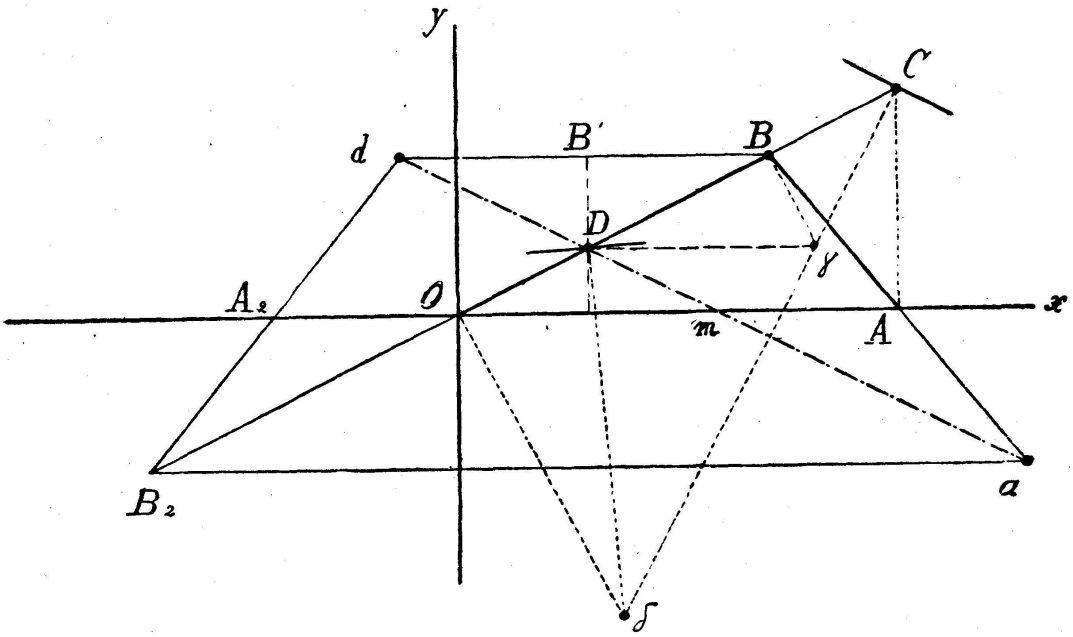
Tangentes. — 1. *De la roulante.* Il suffit de rappeler que celle-ci est une conchoïde de conique par rapport à un foyer. La constante de la conique est 2R et celle de la conchoïde — R. Soit M un tel point de la roulante ; F_2M est prolongé jusqu'en a avec $Ma = R$; a est le point de la conique. Nous construisons la normale en a au moyen du cercle directeur et du cercle principal ; nous obtenons aJ. En F_2, nous faisons F_2J perpendiculaire à F_2M ; c'est la normale de l'enveloppe de la droite mobile pour la position correspondante, et de cette manière J est le centre instantané nécessaire. Nous en déduisons *a priori* la tangente et la normale en M.

2. *De la base.* Soit C le point de la base pour la position considérée OBA. Nous porterons $Aa = AB = l$ sur le prolongement de la bielle AB et opposé à B, puis $OB_2 = OB = R$ sur le prolongement correspondant de la manivelle OB. Nous aurons B_2a parallèle à Ox. Soit maintenant BaB_2d le trapèze isocèle sur la base B_2a et la diagonale B_2B. Il en résulte $B_2B = ad = 2R$, et $B_2O = OB = am = md = R$. En désignant le point de coupe des diagonales par D, nous aurons encore $Dd = DB$ et $aD + DB = 2R$.

De cette manière D est un point de la conique (ellipse) de foyers a et B et de constante 2R. Nous avons également, avec DB′ perpendiculaire à dB, $dB' = B'B$ puis $AB' = R$ et $OB' = l$;

dans ces conditions D est encore le point de la courbe C_d, et nous en tirons DC = R.

Examinons maintenant la tangente en C. La théorie des mouvements épicycloïdaux nous enseigne que la base et la position correspondante de la roulante pour le point C ont la même tangente en C. En outre cette roulante correspond à la conique de foyers a et B et de constante 2R. Nous appliquons maintenant la construction de la tangente de la roulante. Nous savons déjà que le point nécessaire de la conique est D et nous pourrions encore l'obtenir en portant R depuis C sur OB. La



tangente de la conique en D est évidemment DB', perpendiculaire à l'axe des x, donc la normale est une parallèle Dγ à ce même axe. D'autre part la normale de l'enveloppe du segment mobile OB dans la génération de la roulante est une perpendiculaire Bγ à OB. Nous trouvons alors le centre instantané γ, relatif à notre conchoïde de conique.

Il est maintenant facile de tracer la normale et la tangente cherchée en C.

3. *De la courbe C_d*. Comme celle-ci est une conchoïde de la base, nous utiliserons la normale de la base en C et la normale de l'enveloppe du segment mobile OB autour de O ; cette der-

nière est $O\delta$ perpendiculaire à OB. Le point δ est ainsi le nouveau centre instantané de rotation et nous en déduisons sans autre la normale, puis la tangente en D.

Trajectoires de a et d. — Nous savons que a est un point fixe de la bielle avec $BA = Aa = l$. Sa trajectoire est une roulette du mécanisme considéré. L'équation de cette courbe s'appelle :

$$(x^2 - R^2 - 4l^2 + 5y^2)^2 = 16(R^2 - y^2)(l^2 - y^2) .$$

Nous devons observer en plus que le mécanisme OBA et le mécanisme symétrique travaillant à gauche de l'axe des y ont la même base, et la même courbe C_d. Comme nous avons aussi $B_2A_2 = l$, OB_2A_2 est une des positions de ce mécanisme symétrique. Avec $A_2d = l$, la trajectoire de d est une roulette analogue à celle décrite par a. En établissant son équation, nous trouvons le même résultat que pour le chemin de a ; en conséquence les points a et d se déplacent sur la même courbe.

Si nous considérons plus spécialement la diagonale ad dont les extrémités s'appuient sur la trajectoire (a) ou (d), nous avons là une droite de longueur fixe, double de la manivelle, disposée symétriquement par rapport à celle ci et passant toujours par le point correspondant D de la courbe C_d. Cette droite donne lieu au théorème suivant :

Théorème : *Dans le mouvement du mécanisme « Bielle-Manivelle », il existe une droite mobile de longueur fixe* 2R, *symétrique avec le rayon* OB, *passant toujours par le point correspondant* D *et telle que son milieu* m *glisse sur l'axe des* x *pendant que ses extrémités s'appuient sur la trajectoire* (a) *d'un point* a *de la bielle, avec* $Aa = l$

ou en d'autres termes :

Les cordes de la trajectoire (a) *symétriques des rayons* OB *et menées par les divers points* D *correspondants, sont de longueur fixe* 2R *et elles sont divisées en deux parties égales par l'axe des* x.

9. M. le Dr René de Saussure (Berne et Genève). — *La Géométrie des feuillets cotés.*

M. René de Saussure, poursuivant l'étude de la Géométrie dite des « feuillets », expose un développement récent de cette géométrie obtenu en introduisant la notion du « feuillet coté ». Les résultats de cette étude ont été exposés dans les *Arch. des Sc. Phys. et Nat.* de Genève (1915). Rappelons seulement que le « feuillet » n'est pas autre chose qu'un corps rigide quelconque, considéré non pas en sa forme ou en sa grandeur, mais seulement comme *position.* C'est cette position qui est prise comme élément spatial primitif, donnant lieu à une nouvelle géométrie de caractère quadratique et à 6 dimensions (quoique située dans notre espace à 3 dimensions). En affectant chaque feuillet d'un coefficient numérique, appelé *cote,* on obtient le feuillet « coté », qui donne lieu à une géométrie à 7 dimensions (toujours située dans notre espace) et dont le caractère n'est plus quadritique mais linéaire. Les formes fondamentales de cette géométrie ont reçu de l'auteur les noms de : *mono-, bi-, tri-, tétra-, penta-,* et *hexacouronne.*

L'hexacouronne est le lieu des feuillets cotés (en nombre ∞^6) qui satisfont à l'équation :

$$f + \varphi = h \operatorname{tang} \frac{\omega}{2},$$

f étant la cote d'un feuille fixe F (appelé feuillet *central*) ; φ, la cote du feuillet mobile Φ qui engendre l'hexacouronne ; enfin h et ω, la translation et la rotation du mouvement hélicoïdal qui permet de passer de la position fixe F à la position Φ.

Toutes les autres polycouronnes peuvent être définies comme l'ensemble des feuillets cotés communs à 2, 3, 4, 5 ou 6 hexacouronnes. Finalement : 7 hexacouronnes ont en commun un feuillet coté et un seul. De sorte que réciproquement : 7 feuillets cotés déterminent une hexacouronne, 6 feuillets une pentacouronne, etc., 2 feuillets une monocouronne.

10. M. le Prof. C. Cailler (Genève). — *Sur la théorie analytique des corps solides cotés.*

M. C. Cailler présente quelques développements sur les prin-

cipes analytiques de la théorie des *corps solides cotés* ou *feuillets cotés,* due essentiellement à M. de Saussure, qui l'a étudiée surtout par la voie géométrique. C'est M. E. Study qui, le premier, a représenté par des coordonnées d'un emploi commode les positions d'un solide dans l'espace. Rappelons la formation de ces coordonnées où intervient la notion du biquaternion qui remonte à Cayley et Clifford.

Soient i_1, i_2, i_3 les unités quaternionniennes, i une nouvelle unité complexe permutable avec les précédentes et telle que $i^2 = 0$. Un corps solide congruent à un système d'axes coordonnés est équivalent à un mouvement de ce dernier ; à son tour le mouvement se ramène à une rotation, dont les constantes de Rodrigues sont e_0, e_1, e_2, e_3, combinée avec une translation de composantes a_1, a_2, a_3. Les 8 coordonnées homogènes du corps $\begin{Bmatrix} A_k \\ A_k \end{Bmatrix}$ seront, selon M. Study, les suivantes :

$$A_0' = e_0 , \qquad A_0'' = -\frac{1}{2}(e_1a_1 + e_2a_2 + e_3a_3) ,$$

$$A_1' = e_1 , \qquad A_1'' = +\frac{1}{2}(e_0a_1 + e_3a_2 - e_2a_3) ,$$

$$A_2' = e_2 , \qquad A_2'' = +\frac{1}{2}(e_0a_2 + e_1a_3 - e_3a_1) ,$$

$$A_3' = e_3 , \qquad A_3'' = +\frac{1}{2}(e_0a_3 + e_2a_1 - e_1a_2) ;$$

elles vérifient les conditions

$$\sum_{(k)} A_k'^2 = 1 , \qquad \sum_{(k)} A_k' A_k'' = 0 ,$$

de sorte que le corps occupe dans l'espace ∞^6 positions, comme il convient.

Désignons par un accent la partie réelle d'une quantité complexe, par deux accents la partie imaginaire de cette même quantité, et posons

$$A_k = A_k' + iA_k'' \qquad \text{et} \qquad A = A_0 + i_1A_1 + i_2A_2 + i_3A_3 ;$$

le biquaternion A ainsi formé représente analytiquement le corps ou le mouvement donné. On montre que si $\overline{A}$ est le conjugué de A obtenu en changeant dans A le signe des quatre

quantités i, le déplacement d'un point solidaire du corps mobile est représenté par la formule quaternionnienne

$$\sigma = A\sigma\bar{A}$$

dans laquelle

$$\sigma' = 1 + i(i_1x_1' + i_2x_2' + i_3x_3') \ ,$$
$$\sigma = 1 + i(i_1x_1 + i_2x_2 + i_3x_3) \ ,$$

x_k et x_k' désignant les coordonnées du point avant et après le mouvement.

Pour s'élever à la conception du corps coté, il suffit de remarquer que la formule précédente ne change pas quand on multiplie A par le facteur scalaire $(1 + \omega i)$, et partant, $\bar{A}$ par le facteur conjugué $1 - i\omega$; en effet, le produit des facteurs ainsi introduits vaut $1 - i^2\omega^2 = 1$.

La quantité arbitraire ω prendra le nom de *cote* du corps ; le corps coté aura pour représentant analytique un biquaternion

$$\alpha = (1 + \omega i)\, A = \alpha_0 + i_1\alpha_1 + i_2\alpha_2 + i_3\alpha_3 = (\alpha_0' + i\alpha_0'') + i_1(\alpha_1' + i\alpha_1'') + \ldots \ ;$$

de là résultent pour les 8 coordonnées $\left\{\begin{matrix}\alpha_k' \\ \alpha_k''\end{matrix}\right\}$ du corps coté les valeurs

$$a_k' = e_k \ , \qquad a_k'' = \omega e_k + A_k''; \qquad (k = 0, 1, 2, 3)$$

lesquelles satisfont les équations

$$(\alpha\alpha)' = \alpha_0'^2 + \alpha_1'^2 + \alpha_2'^2 + \alpha_3'^2 = 1 \ ,$$
$$\frac{1}{2}(\alpha\alpha)'' = \alpha_0'\alpha_0'' + \alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'' + \alpha_3'\alpha_3'' = \omega \ .$$

De la sorte, un corps et une cote déterminent ensemble, au signe près, le tableau $\left\{\begin{matrix}\alpha_k' \\ \alpha_k''\end{matrix}\right\}$; réciproquement 8 nombres quelconques α_k définissent, d'une manière unique, un corps coté, pourvu que ces nombres vérifient la condition $(\alpha\alpha)' = 1$.

Il est d'ailleurs aisé d'assigner la signification géométrique des coordonnées $\left\{\begin{matrix}\alpha_k' \\ \alpha_k''\end{matrix}\right\}$, en la faisant dériver de celle des invariants $(\alpha\beta)'$ et $(\alpha\beta)''$ de deux corps α et β, de cotes ω_α et ω_β. Si

a et b désignent l'angle de rotation et le glissement du mouvement hélicoïdal conduisant un de ces corps sur l'autre, on trouve facilement

$$(\alpha\beta)' = \sum_k \alpha_k'\beta_k' = \cos\frac{a}{2} ,$$

$$(\alpha\beta)'' = \sum_k c\alpha_k'\beta_k'' + \alpha_k''\beta_k') = (\omega_\alpha + \omega_\beta)\cos\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\sin\frac{a}{2} .$$

Ce dernier invariant qu'on peut nommer le *moment relatif* des deux corps joue le rôle principal dans l'étude des polyséries linéaires de corps cotés. M. de Saussure a donné la théorie géométrique de ces polyséries et les a désignées sous le nom générique de *polycouronnes;* elles sont semblables aux *systèmes de vis* de Ball. L'emploi des coordonnées $\left\{\begin{matrix}\alpha_k' \\ \alpha_k''\end{matrix}\right\}$ permet de présenter d'une manière très claire l'ensemble de ces résultats.

M. Cailler termine sa communication en insistant sur les analogies que présente, avec les théories de la Statique ordinaire, celle des corps non cotés mais doués d'une *masse* ou d'une *intensité* a. Ce sont les corps $\left\{\begin{matrix}A_k' \\ A_k''\end{matrix}\right\}$ vérifiant la condition

$$\sum_k A_k'A_k'' = 0$$

mais donnant

$$\sum_k A_k'^2 = a^2 , \qquad \text{au lieu de} \qquad \sum_k A_k'^2 = 1 .$$

Un système de corps massifs (A, a), (B, b), $(C, c)\ldots$ est toujours équivalent à un corps coté α : deux systèmes S et S', équivalents au même corps coté α, sont réductibles l'un à l'autre par une opération toute semblable à la composition des vecteurs concourants. Ainsi se trouve fermé le cycle des comparaisons entre la Géométrie réglée d'une part et celle des corps cotés de l'autre.

11. M. le Dr H. Berliner (Bern). — *Eine neue analytisch-projektive Geometrie.*

In der Ebene legen wir ein Dreieck ABC und 3 Zahlen

z_1, z_2, z_3 zu Grunde und weisen in einem Grundgebilde um einen Punkt P und auf einer Geraden g den 3 Strahlen PA, PB, PC bezw. Punkten gBC, gCA, gAB entweder die Zahlen z_1, z_2, z_3 selbst als *Abszissen* oder (bei Zugrundelegung einer Winkeleinheit) die 3 Winkel z_1, z_2, z_3 als *Ordinatenwinkel* (vergl. Berliner, Involutionssysteme in der Ebene des Dreiecks, Braunschweig 1914, Nr. 26) zu und jedem weiteren Element s die durch

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z - z_1}{z - z_2} = (\mathrm{PA}, \mathrm{PB}, \mathrm{PC}, s)$$

bezw. $= (g\mathrm{BC}, g\mathrm{CA}, g\mathrm{AB}, s)$ bestimmte Abszisse z (vergleichen v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, § 29), oder den durch

$$\frac{\operatorname{tg} z_3 - \operatorname{tg} z_1}{\operatorname{tg} z_3 - \operatorname{tg} z_2} : \frac{\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} z_1}{\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} z_2} = (\mathrm{PA}, \mathrm{PB}, \mathrm{PC}, s)$$

bzw. $= (g\mathrm{BC}, g\mathrm{CA}, g\mathrm{AB}, s)$, bestimmten Ordinatenwinkel ω. Es sind somit einem Grundgebilde 1. Stufe im allgemeinen ein Abszissen- und ein Ordinatenwinkelsystem zugeordnet. Sind P und g inzident und sind x und y die Abszissen oder Ordinatenwinkel von P in dem g und von g in dem P zugeordneten Systeme, so ist $x = y$. Wir können auch von *der Abszisse und dem Ordinatenwinkel eines Punktes* P (und einer Tangente) *auf einer Kurve* sprechen; darunter sind *diejenigen* zu verstehen, *die* P *in den seiner Tangente zugeordneten Systemen zukommen.*

Die Abszissen- und Ordinatenwinkelsysteme führen nun zu mehreren Punkt- und Linienkoordinatensystemen in der Ebene. Davon sei nur folgendes erwähnt. Wird ein auf keiner Seite von ABC liegender Punkt D festgehalten, so werden durch einen Punkt P 2 Ordinatenwinkel φ, ψ im allgemeinen eindeutig bestimmt, nämlich der Ordinatenwinkel φ von DP in dem D und der Ordinatenwinkel ψ von P in dem DP zugeordneten Systeme; φ, ψ sollen dann *die 1. und 2. Koordinate* von P heissen. An Stelle der Ordinatenwinkel können ebensogut Abszissen als Koordinaten verwendet werden.

Die Abszissen- und Ordinatenwinkelsysteme führen ferner zu je einer Massgeometrie. Wir definieren *die Entfernung* zweier

Punkte und *den Winkel* zweier Geraden, als *die Differenz der Abszissen oder Ordinatenwinkel der Punkte* bezw. *Geraden in dem ihrer Verbindungsgeraden* bezw. *ihrem Schnittpunkt als Träger eines Grundgebildes zugeordneten Systeme.* Die Entfernung und der Winkel sind so auch dem Vorzeichen nach bestimmt. Der Kreis ist eine C^3 und durch jeden Punkt gibt es 3 Parallele zu einer Geraden, wenn Gerade parallel genannt werden, wenn sie den Winkel O bilden.

Im Raum legen wir ein Tetraeder ABCD (BCD $\equiv \alpha$, CDA $\equiv \beta$, DAB $\equiv \gamma$, ABC $\equiv \delta$) und drei Zahlen z_1, z_2, z_3 zu Grunde und weisen in einer Punktreihe auf einer Geraden g den drei Punkten $g\alpha$, $g\beta$, $g\gamma$, in einem Ebenenbüschel um g den drei Ebenen gA, gB, gC und in einem Strahlenbüschel, dessen Träger ein Punkt P und eine Ebene ε sind, entweder (1. Art) den 3 Strahlen (P, εBC), (P, εCA), (P, εAB) oder (2. Art) (P, $\varepsilon\beta\gamma$), (P, $\varepsilon\gamma\alpha$), (P, $\varepsilon\alpha\beta$) die 3 Zahlen z_1, z_2, z_3, als Abszissen zu und jedem weitern Element die analog wie oben zu bestimmende Abszisse. Anstatt Abzissen können auch Ordinatenwinkel zugewiesen werden. Es sind somit einem Grundgebilde 1. Stufe ein bezw. 2 Abszissen- und 1 bezw. 2 Ordinatenwinkelsysteme zugeordnet. Ferner wird durch ABCD einem Grundgebilde 2. Stufe, dessen Träger ein Punkt P oder eine Ebene ε ist, ein Koordinatensystem zugeordnet, in dem das Grunddreikant P (ABC), der Grundstrahl PD und die Polare von PD bezüglich P (ABC) als Grundebene bezw. das Grunddreieck $\varepsilon(\alpha\beta\gamma)$, die Grundlinie $\varepsilon\delta$ und der Pol von $\varepsilon\delta$ bezüglich $\varepsilon(\alpha\beta\gamma)$ als Grundpunkt die Basis bilden und für die Koordinaten Abszissen oder Ordinatenwinkel 1. bezw. 2. Art zu verwenden sind. Sind P und ε inzident und sind x, y die 1., 2. Koordinate von P in dem, ε und ξ, η die 1., 2. von ε in dem P als Träger eines Grundgebildes 2. Stufe zugeordneten Koordinatensysteme, so ist $x = \xi$, $y = \eta$. Unter *der 1. und 2. Koordinate eines Punktes* P (einer Tangentialebene und Tangente) *auf einer Fläche* sind diejenigen zu verstehen, *die* P *in dem seiner Tangentialebene zugeordneten Koordinatensysteme zukommen.*

Die Abszissen- oder Ordinatenwinkel- und Koordinatensysteme der Grundgebilde 1. bezw. 2. Stufe führen zu mehreren Punkt-,

Ebenen- und Linienkoordinatensystemen im Raum. Davon sei nur folgendes erwähnt. Wird ein auf keiner Fläche von ABCD liegender Punkt E festgehalten, so werden durch einen Punkt P drei Ordinatenwinkel φ_1, φ_2, φ_3 bestimmt, nämlich die 1. und 2. Koordinate φ_1, φ_2 von EP in dem E als Träger eines Bündels zugeordneten Koordinatensysteme und der Ordinatenwinkel φ_3 von P in dem EP als Träger einer Punktreihe zugeordneten Ordinatenwinkelsysteme. Fernes werden dann durch eine Gerade g vier Ordinatenwinkel ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 bestimmt, nämlich die 1. und 2. Koordinate ψ_1, ψ_2 der Ebene Eg in dem E als Träger eines Bündels und die 1. und 2. Koordinate ψ_3, ψ_4 von g in dem Eg als Träger eines ebenen Feldes zugeordneten Koordinatensysteme. φ_1, φ_2, φ_3 sollen dann *die Koordinaten von* P und ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 *die von* g heissen. Ebensogut kann man aber auch Abszissen als Koordinaten verwenden.

Ausführliches hierüber wird der Autor demnächst in einer grösseren Arbeit veröffentlichen.

12. M. le professeur Louis Kollros (Zurich). — *Sur une dualité.*

On peut établir entre la géométrie ponctuelle à 4 dimensions et la géométrie des sphères une liaison telle qu'à un point, une droite, un plan et un espace à 3 dimensions de la première correspondent respectivement une sphère, un cercle, une paire de points et un réseau de sphères (toutes orthogonales à une sphère fixe) de la seconde.

On trouve ainsi (parmi beaucoup d'autres[1]) quelques théorèmes qui n'ont pas, à notre connaissance, été énoncés jusqu'ici; par exemple :

1. Etant données 2 paires de points p_1 et p_2 et une sphère: s, il existe, en général, une seule paire : x de points de s telle que les 2 paires x et p_1 d'une part, x et p_2 d'autre part, soient sur un cercle.

2. Etant données 3 paires de points : $p_1 p_2 p_3$ et une sphère: s,

[1] Les nombreuses propriétés des *cyclides* s'établissent très simplement par ce procédé.

il existe, en général, un seul cercle de s qui soit sur une sphère avec p_1, respectivement p_2 et p_3.

3. Etant donnés 3 cercles quelconques $c_1 c_2 c_3$ de l'espace, il existe toujours un plan, et en général un seul, qui coupe les 3 cercles en 6 points d'un nouveau cercle : a_4 (cercle *associé* à $c_1 c_2 c_3$).

Sur chaque arête du trièdre formé par les plans des 3 cercles donnés, il y a un point, et en général un seul, qui a la même puissance par rapport aux 2 cercles adjacents. Le plan de jonction de ces 3 points est le plan cherché.

4. Etant donnés 4 cercles : $c_1 c_2 c_3 c_4$, en les combinant 3 à 3, on obtient 4 cercles associés : $a_1 a_2 a_3 a_4$ (a_1 est l'associé de $c_2 c_3 c_4$, etc.). Si l'on désigne par s_i la sphère orthogonale aux deux cercles c_i et a_i ($i = 1, 2, 3, 4$) on peut prouver que les 4 sphères : $s_1 s_2 s_3 s_4$ sont orthogonales à un même cercle : c_5 ; nous l'appellerons le *complémentaire* du groupe ($c_1 c_2 c_3 c_4$).

Les 5 cercles : $c_1 \ldots c_5$ jouissent de propriétés symétriques ; chacun est le complémentaire du groupe formé par les 4 autres. En les combinant 3 à 3, puis 2 à 2, on trouve respectivement 10 cercles associés et 10 sphères analogues aux s_i. Ces *10 sphères* forment avec les *15 cercles* une configuration curieuse telle que chaque sphère soit orthogonale à 6 cercles, chaque cercle étant orthogonal à 4 sphères. Les 15 cercles peuvent se réunir de 6 manières différentes en groupes de 5 jouissant des mêmes propriétés que $c_1 \ldots c_5$.

5. Par une transformation corrélative dans l'espace à 4 dimensions, on trouve que 4 paires de points $p_1 p_2 p_3 p_4$ choisies arbitrairement déterminent d'une manière unique 10 sphères et 11 autres paires de points telles que chaque sphère passe par 6 paires de points et que chacune des 15 paires soient situées sur 4 sphères.

La paire p_5 complémentaire du groupe ($p_1 p_2 p_3 p_4$) jouit d'une propriété intéressante ; sur une sphère quelconque, il n'existe pas, en général, de cercle situé sur une sphère avec p_1, respectivement p_2, p_3 et p_4 ; mais si la sphère passe par p_5 (condition suffisante, mais pas nécessaire), elle contient toujours un tel cercle, et, en général, un seul.

13. M. le Dr Ferd. Gonseth (Zurich). — *Extensions d'un théorème de Poncelet.*

I. M. Gonseth expose trois extensions du théorème de Poncelet : *S'il existe un polygone inscrit à une conique et circonscrit à une seconde conique, il en existe une simple infinité, d'un même nombre de côtés.*

A) S'il existe un polygone gauche inscrit à une cubique gauche C_3, et dont les plans joignant deux côtés consécutifs sont osculateurs à une seconde cubique gauche T_3, si de plus C_3 et T_3 sont réciproques dans un système focal arbitraire, il existe une simple infinité de pareils polygones gauches.

La condition que C_3 et T_3 soient réciproques dans un système focal arbitraire est essentielle.

II. Viennent ensuite deux extensions du théorème de Weyr[1]: S'il existe sur une conique un groupe de $n+1$ points dont toutes les droites de jonction de tous les points 2 à 2 sont tangentes à une courbe de classe n, T_n, il existe sur la conique une simple infinité linéaire de groupe de $n+1$ points dont les droites de jonction touchent T_n.

Ce théorème est évidemment lui-même une généralisation du théorème de Poncelet. Ces extensions sont :

B) S'il existe sur une quadrique une courbe de $(n+1)^{\text{ème}}$ ordre dont toutes les bisécantes sont comprises dans un complexe de $n^{\text{ème}}$ ordre, C_n, il existe sur la quadrique une simple infinité de courbes de $(n+1)^{\text{ème}}$ ordre dont toutes les bisécantes sont comprises dans C_n.

C) S'il existe sur une cubique gauche C_3 2 groupes de $n+2$ points dont tous les plans de jonction de tous les points 3 à 3 dans chaque groupe touchent une même surface de $n^{\text{ème}}$ classe, il existe sur la cubique gauche une double infinité linéaire de pareils groupes de $n+2$ points.

Discussion : M. Grossmann.

[1] *Mathematische Annalen.*