Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 95 (1912)

Artikel: Unicité du développement d'une fonction en série de polynômes de Legendre et expression analytique des coefficients de ce développement

Autor: Plancherel, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-90211

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

indications relatives à différents polyèdres rencontrés dans le cours de ses recherches.

8. Prof. Dr M. Plancherel, Fribourg. *Unicité du développement d'une fonction en série de polynômes de Legendre et expression analytique des coefficients de ce développement.*

$P_n(x)$ désignant le polynôme de Legendre $\frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$, nous appellerons série de polynômes de Legendre toute série de la forme $\sum_{n=o}^{\infty} a\, n\, P_n(x)$. $f(x)$ étant une fonction sommable dans l'intervalle $(-1, +1)$, on peut former les *coefficients de Legendre* $f_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x)\, P_n(x)\, dx$. La série $\Sigma\, f_n\, P_n(x)$ formée au moyen de ces coefficients n'est pas nécessairement convergente; nous l'appellerons la *série de Legendre* de $f(x)$, $f(x)$ en sera dite la *génératrice.*

On peut se poser au sujet de ces séries des questions analogues à celles que *Cantor* et *Dubois-Reymond* ont posées et partiellement résolues dans la théorie des séries trigonométriques. Les théorèmes suivants constituent une réponse partielle à ces questions.

I. *La condition nécéssaire et suffisante pour que dans tout l'intervalle $(-1, +1)$ à l'exception au plus d'un ensemble réductible de points, $\Sigma\, a_n\, P_n(x)$ converge vers zéro, est que $a_n = o$ $(n = 1, 2, 3, \ldots,)$.* Ce théorème est dû à M. Dini. La méthode qui me donne les théorèmes suivants m'en fournit une démonstration plus simple.

II. *Si la série $\Sigma\, a_n\, P_n(x)$ converge dans tout l'intervalle $(-1, +1)$, à l'exception au plus d'un ensemble réductible de points, vers une fonction $f(x)$ bornée, c'est une série de Legendre dont $f(x)$ est la génératrice.*

III. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une série $\Sigma\, a_n\, P_n(x)$ (convergente ou non) possède une fonction génératrice*

$f(x)$ est que la série $\Sigma\, a_n \int_{-1}^{x} P_n(x)\, dx$ converge dans tout l'intervalle $(-1_1 + 1)$ vers $\int_{-1}^{x} f(x)\, dx$.

Dans les théorèmes analogues de Cantor et de Dubois-Reymond, l'élément analytique qui joue un grand rôle dans la démonstration est l'expression $\frac{1}{h}\,[f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)]$ dont la limite pour $h = o$ donne la dérivée seconde généralisée de $f(x)$. Pour trouver dans notre cas une expression jouant un rôle analogue, nous considérerons une fonction F (δ,φ) sur la sphère de rayon 1. Décrivant autour du point (δ,φ) comme centre un petit cercle de rayon sphérique h, appelant (δ',φ') les points de ce petit cercle, ds' l'élement d'are et s le périmètre de ce petit cercle, nous formerons l'expression

$$\Delta_2 F(\delta,\varphi;h) = \frac{1}{\sin^2 \frac{h}{2}} \left[\frac{1}{s}\int F(\delta',\varphi')ds' - F(\delta,\varphi)\right]$$

Notant Δ_2 F (δ,φ) la limite de cette expression pour $h = o$, il vient, si F possède une différentielle seconde,

$$\Delta_2 F = \frac{1}{\sin\delta}\frac{\partial}{\partial\delta}\left(\sin\delta\,\frac{\partial F}{\partial\delta}\right) + \frac{1}{\sin^2\delta}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}.$$

En particulier, $\Delta_2 P_n(\cos\delta) = -n(n+1)\,P_n(\cos\delta)$. L'expression Δ_2 F $(\delta, \varphi; h)$ jouit de propriétés d'extrémum qui permettent de suivre dans la démonstration de nos théorèmes une marche analogue à celle donnée par Hölder dans le cas des séries trigonométriques. Faisant correspondre maintenant par la substitution $x = \cos\delta$, à toute série $\Sigma\, a_n P_n(x)$ une fonction $F(\delta) = -\Sigma \frac{a_n}{n(n+1)} P_n(\cos\delta)$, on démontre que $\lim_{h=o} \sin\frac{h}{2}\,\Delta_2 F(\delta, h) = o$ et qu'en tout point de convergence de la série $\Sigma\, a_n P_n(x)$, $\Delta_2 F(\delta) + a_o = \Sigma\, a_n P_n(\cos\delta)$. L'utilisation de ces propriétés conduit sans difficulté aux théorèmes énoncés plus haut.