Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 95 (1912)

Artikel: Ueber bizentrische Polynome

Autor: Bützberger, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-90205

I

Mathematische Sektion

zugleich Versammlung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Sitzung: Montag, den 10. September 1912

Präsident: Herr Prof. Dr. R. Fueter, Basel.
Sekretär: » Prof. Dr. M. Grossmann, Zürich

---

1. Herr Prof. Dr. R. FUETER (Basel): *Ueber die Einteilung der Idealklassen in Geschlechter.*

Die Einteilung der Idealklassen eines algebraischen Körpers K, der in einem bestimmten Zahlbereich k Abelsch ist, in Geschlechter, beruhte bisher auf der Einführung von Symbolen und verlangte, dass k Einheitswurzeln enthält. Nimmt man dagegen den Begriff des *Zahlstrahls* und der *Strahlklasse* zu Hilfe, so gelingt eine völlig allgemeine und einfache Definition der Geschlechter von K. Denn jeder zu k relativ-Abelsche Körper K legt durch seine Relativ-discriminante einen Strahl (f) in k fest, der mit K in engstem Zusammenhange steht, wie der Vortragende früher gezeigt hat. *Alle Idealklassen, deren Relativnorm in Bezug auf* k *in dieselbe Strahlklasse dieses Strahls fallen, bilden ein Geschlecht.* Es existiert dann der Satz, dass nicht alle möglichen Geschlechter existieren können; d. h. dass nicht alle Strahlklassen Relativ-normen von Klassen des Oberkörpers sind.

Der Vortragende erläutert das Auseinandergesetzte an dem einfachen Beispiel der 7. Einheitswurzeln.

2. Herr Prof. Dr. F. BÜTZBERGER (Zürich): *Ueber bizentrische Polygone.*

Nach einer kurzen Besprechung der grundlegenden Arbeiten von *Euler, Fuss, Poncelet, Feuerbach, Steiner* und *Jacobi,* wird an eine merkwürdige Probe erinnert, die Herr *Hagge* in Schottens Zeitschrift[1] veröffentlicht hat. Ist nämlich r der Radius des Umkreises M, ρ derjenige des Inkreises N eines bizentrischen n-Ecks und $MN = c$ die Zentrale beider Kreise, so besteht zwischen r, ρ und c eine Gleichung. Setzt man darin $r = 2$, $c = 1$, so erhält man für ρ stets eine algebraische Gleichung mit ganzen Koeffizienten, deren Summe gleich 1 ist.

Will man diese Gleichung elementar ableiten, so kann man wie Fuss und Steiner, die Winkelsumme benutzen; besser ist aber die Methode der Normalprojektion der Eckradien und der Zentralen auf die zugehörigen Berührungsradien oder die Normalprojektion der Zentralen auf die Seiten des Polygons. Wichtig ist die Bemerkung, dass es sowohl für gerade, als auch für ungerade Werte von n je zwei symmetrische Polygone gibt, von denen im erstern Fall bald das eine, bald das andere leichter zum Ziele führt. Jede Seite wird von ihrem Berührungspunkt in zwei Stücke zerlegt. Je zwei von einer Ecke ausgehende Stücke sind gleich. Bezeichnet man bei geradem n die gleichliegenden Stücke links und rechts mit gleichen Buchstaben $x\,x'$, $y\,y'\ldots$, so erhält man den Ausdruck für das gestrichene Stück aus demjenigen für das ungestrichene, indem man hier ρ durch $-\rho$ ersetzt und es gilt das allgemeine Gesetz:

$$xx' = yy' = zz' = \ldots.$$

So findet man die bisher bekannten Gleichungen in einfacher und symmetrischer Gestalt ohne Begleitung lästiger Faktoren und kann leicht die weitern Gleichungen für $n = 9, 10\ldots$ hinzufügen. Setzt man mit Fuss:

$$p = r + c, \qquad q = r - c, \qquad pq = \varrho s$$

so lautet z. B. die Gleichung für das Siebeneck:

$$\frac{s^2 - (p^2 - q^2)}{s^2 + (p^2 - p^2)} \cdot \sqrt{p - \varrho} = \frac{s + (p - q)}{s - (p - q)} \cdot \sqrt{q - \varrho}$$

oder rational gemacht:

$$(p + q)^4 (p - q)^2 . \varrho^6 - 2pq(p + q)(p - q)^2 . (p^2 + q^2) . \varrho^5 \\ - p^2 q^2 (p^2 - q^2)^2 . \varrho^4 + 4p^3 q^3 (p + q)(p^2 + q^2 - pq) . \varrho^3 \\ - p^4 q^4 (p + q)^2 . \varrho^2 - 2p^5 q^5 (p + q) . \varrho + p^6 q^6 = 0.$$

[1] Jahrgang 1911, S. 98, und 1912, S. 375—378.

Für $n = 9$ erhält man die Gleichung:

$$\frac{s^3 - (p-q)s^2 - (p-q)^2.s + (p-q)(p+q)^2}{s^3 + (p-q)s^2 - (p-q)^2.s - (p-q)(p+q)^2} . \sqrt{q - \varrho} =$$
$$= \frac{s^2 - (p^2 - q^2)}{s^2 + (p^2 - q^2)} \sqrt{p - \varrho}$$

Durch Quadrieren ergibt sich für ρ eine Gleichung 9. Grades. Die Gleichung für das bizentrische Zehneck wurde mittelst beider Projektionsmethoden gewonnen und zwar in der Form:

$$2s(p^2 + q^2 - s^2)(\sqrt{s^2 - p^2} + \sqrt{s^2 - q^2}) = s^4 - (p - q^2)^2$$

oder:

$$\frac{s^3 + (p-q)s^2 - (p-q)^2.s - (p-q)(p+q)^2}{s^3 - (p-q)s^2 - (p-q)^2.s + (p-q)(p+q)^2} \sqrt{(p-\varrho)(q+\varrho)} =$$
$$= \frac{s^3 - (p-q)s^2 - (p-q)^2.s + (p-q)(p+q)^2}{s^3 + (p-q)s^2 - (p-q)^2.s - (p-q)(p+q)^2} \sqrt{(p+\varrho)(q-\varrho)}$$

In beiden Fällen findet man für ρ durch Wegschaffung der Wurzeln eine Gleichung 12. Grades. Die Haggesche Probe stimmt immer.

Tritt an Stelle des Inkreises ein Ankreis oder wird das bizentrische n-Eck mit zwei oder mehreren Umläufen sternförmig, so umfassen die obigen Gleichungen für gerade Werte von n alle Fälle; ist aber n ungerade, so gelten sie nur für die Polygone, die eine ungerade Anzahl von Umläufen haben, für die andern ist ρ durch $-\rho$ zu ersetzen.

Schliesslich führt eine Verallgemeinerung der Theorie der bizentrischen Vierecke auf bemerkenswerte Büschel von Kurven und Flächen 4. Ordnung, und folgende Aufgabe:

Gegeben ist eine Kugel N und ein exzentrisches trirektangulärisches Achsenkreuz, das sich um seinen festen Scheitel E dreht. In den Schnittpunkten der drei Achsen mit der Kugel N lege man die Tangentialebenen; diese bilden ein Hexaeder; welches ist der Ort seiner 8 Ecken?

Eine ausführliche Begründung dieser Resultate wird in der Beilage des Programms der Kantonsschule Zürich 1913 erscheinen.