Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 95 (1912)

Vereinsnachrichten: Mathematische Sektion

Autor: [s.n.]

I

Mathematische Sektion

zugleich Versammlung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Sitzung: Montag, den 10. September 1912

Präsident: Herr Prof. Dr. R. Fueter, Basel.
Sekretär: » Prof. Dr. M. Grossmann, Zürich

---

1. Herr Prof. Dr. R. FUETER (Basel): *Ueber die Einteilung der Idealklassen in Geschlechter.*

Die Einteilung der Idealklassen eines algebraischen Körpers K, der in einem bestimmten Zahlbereich k Abelsch ist, in Geschlechter, beruhte bisher auf der Einführung von Symbolen und verlangte, dass k Einheitswurzeln enthält. Nimmt man dagegen den Begriff des *Zahlstrahls* und der *Strahlklasse* zu Hilfe, so gelingt eine völlig allgemeine und einfache Definition der Geschlechter von K. Denn jeder zu k relativ-Abelsche Körper K legt durch seine Relativ-discriminante einen Strahl (f) in k fest, der mit K in engstem Zusammenhange steht, wie der Vortragende früher gezeigt hat. *Alle Idealklassen, deren Relativnorm in Bezug auf* k *in dieselbe Strahlklasse dieses Strahls fallen, bilden ein Geschlecht.* Es existiert dann der Satz, dass nicht alle möglichen Geschlechter existieren können; d. h. dass nicht alle Strahlklassen Relativ-normen von Klassen des Oberkörpers sind.

Der Vortragende erläutert das Auseinandergesetzte an dem einfachen Beispiel der 7. Einheitswurzeln.

2. Herr Prof. Dr. F. BÜTZBERGER (Zürich): *Ueber bizentrische Polygone.*

Nach einer kurzen Besprechung der grundlegenden Arbeiten von *Euler, Fuss, Poncelet, Feuerbach, Steiner* und *Jacobi,* wird an eine merkwürdige Probe erinnert, die Herr *Hagge* in Schottens Zeitschrift[1] veröffentlicht hat. Ist nämlich r der Radius des Umkreises M, ρ derjenige des Inkreises N eines bizentrischen n-Ecks und $MN=c$ die Zentrale beider Kreise, so besteht zwischen r, ρ und c eine Gleichung. Setzt man darin $r=2$, $c=1$, so erhält man für ρ stets eine algebraische Gleichung mit ganzen Koeffizienten, deren Summe gleich 1 ist.

Will man diese Gleichung elementar ableiten, so kann man wie Fuss und Steiner, die Winkelsumme benutzen; besser ist aber die Methode der Normalprojektion der Eckradien und der Zentralen auf die zugehörigen Berührungsradien oder die Normalprojektion der Zentralen auf die Seiten des Polygons. Wichtig ist die Bemerkung, dass es sowohl für gerade, als auch für ungerade Werte von n je zwei symmetrische Polygone gibt, von denen im erstern Fall bald das eine, bald das andere leichter zum Ziele führt. Jede Seite wird von ihrem Berührungspunkt in zwei Stücke zerlegt. Je zwei von einer Ecke ausgehende Stücke sind gleich. Bezeichnet man bei geradem n die gleichliegenden Stücke links und rechts mit gleichen Buchstaben $x\,x'$, $y\,y'\ldots$, so erhält man den Ausdruck für das gestrichene Stück aus demjenigen für das ungestrichene, indem man hier ρ durch $-\rho$ ersetzt und es gilt das allgemeine Gesetz:

$$xx' = yy' = zz' = \ldots.$$

So findet man die bisher bekannten Gleichungen in einfacher und symmetrischer Gestalt ohne Begleitung lästiger Faktoren und kann leicht die weitern Gleichungen für $n = 9, 10\ldots$ hinzufügen. Setzt man mit Fuss:

$$p = r + c, \qquad q = r - c, \qquad pq = \varrho s$$

so lautet z. B. die Gleichung für das Siebeneck:

$$\frac{s^2 - (p^2 - q^2)}{s^2 + (p^2 - p^2)} \cdot \sqrt{p - \varrho} = \frac{s + (p - q)}{s - (p - q)} \cdot \sqrt{q - \varrho}$$

oder rational gemacht:

$$\begin{aligned}(p + q)^4(p - q)^2 \cdot \varrho^6 - 2pq(p + q)(\mathrm{p} - q)^2 \cdot (p^2 + q^2) \cdot \varrho^5 \\ - p^2q^2(p^2 - q^2)^2 \cdot \varrho^4 + 4p^3q^3(p + q)(p^2 + q^2 - pq) \cdot \varrho^3 \\ - p^4q^4(p + q)^2 \cdot \varrho^2 - 2p^5q^5(p + q) \cdot \varrho + p^6q^6 = 0.\end{aligned}$$

[1] Jahrgang 1911, S. 98, und 1912, S. 375—378.

Für $n = 9$ erhält man die Gleichung:

$$\frac{s^3 - (p-q)s^2 - (p-q)^2.s + (p-q)(p+q)^2}{s^3 + (p-q)s^2 - (p-q)^2.s - (p-q)(p+q)^2} \cdot \sqrt{q-\varrho} =$$
$$= \frac{s^2 - (p^2 - q^2)}{s^2 + (p^2 - q^2)} \sqrt{p-\varrho}$$

Durch Quadrieren ergibt sich für ρ eine Gleichung 9. Grades. Die Gleichung für das bizentrische Zehneck wurde mittelst beider Projektionsmethoden gewonnen und zwar in der Form:

$$2s(p^2 + q^2 - s^2)(\sqrt{s^2 - p^2} + \sqrt{s^2 - q^2}) = s^4 - (p - q^2)^2$$

oder:

$$\frac{s^3 + (p-q)s^2 - (p-q)^2.s - (p-q)(p+q)^2}{s^3 - (p-q)s^2 - (p-q)^2.s + (p-q)(p+q)^2} \sqrt{(p-\varrho)(q+\varrho)} =$$
$$= \frac{s^3 - (p-q)s^2 - (p-q)^2.s + (p-q)(p+q)^2}{s^3 + (p-q)s^2 - (p-q)^2.s - (p-q)(p+q)^2} \sqrt{(p+\varrho)(q-\varrho)}$$

In beiden Fällen findet man für ρ durch Wegschaffung der Wurzeln eine Gleichung 12. Grades. Die Haggesche Probe stimmt immer.

Tritt an Stelle des Inkreises ein Ankreis oder wird das bizentrische n-Eck mit zwei oder mehreren Umläufen sternförmig, so umfassen die obigen Gleichungen für gerade Werte von n alle Fälle; ist aber n ungerade, so gelten sie nur für die Polygone, die eine ungerade Anzahl von Umläufen haben, für die andern ist ρ durch $-\rho$ zu ersetzen.

Schliesslich führt eine Verallgemeinerung der Theorie der bizentrischen Vierecke auf bemerkenswerte Büschel von Kurven und Flächen 4. Ordnung, und folgende Aufgabe:

Gegeben ist eine Kugel N und ein exzentrisches trirektangulärisches Achsenkreuz, das sich um seinen festen Scheitel E dreht. In den Schnittpunkten der drei Achsen mit der Kugel N lege man die Tangentialebenen; diese bilden ein Hexaeder; welches ist der Ort seiner 8 Ecken?

Eine ausführliche Begründung dieser Resultate wird in der Beilage des Programms der Kantonsschule Zürich 1913 erscheinen.

3. Prof. Dr. M. Grossmann (Zürich): *Projektiver Beweis der absoluten Parallelenkonstruktion von Lobatschefskij.*

Es sei A B C D ein ebenes Viereck, das bei A, B und D rechte Winkel hat. Dann ist der Winkel bei der vierten Ecke C ein spitzer, rechter oder stumpfer Winkel, je nachdem die Geometrie von *Lobatschefskij, Euklid* oder *Riemann* gelten soll, und gleichzeitig ist B C grösser, gleich oder kleiner als A D. Im ersten Falle schneidet der Kreis mit dem Mittelpunkte A und dem Radius $BC = r$ die Gerade C D in zwei Punkten S und T, und man kann auf trigonometrischem Wege zeigen, dass die Geraden A S und A T die *Parallelen* sind, die man durch den Punkt A zur Geraden B C ziehen kann.[1]

Es ist wiederholt versucht worden, diese Parallelenkonstruktion geometrisch zu beweisen; aber die bisherigen Beweise sind keineswegs einfach und bestehen überdies in einer nachträglichen Verifikation, welche die tieferen Zusammenhänge nicht erkennen lässt.[2]

Nun bietet aber die von *Cayley* und *Klein* entdeckte projektive Formulierung der Sätze der nichteuklidischen Geometrie, wonach die metrischen Eigenschaften einer ebenen Figur projektive Beziehungen derselben zum absoluten Kegelschnitt der Ebene sind, die Mittel zu einem sehr einfachen und anschaulichen Beweis.

Es sei in *Fig. 1* w der absolute Kegelschnitt, A irgend ein eigentlicher Punkt, k der Kreis mit dem Mittelpunkt A und dem beliebigen Radius r, und a die Abstandslinie zu einem beliebigen Durchmesser x des Kreises, d. h. der Ort aller Punkte, die von x den Abstand r haben.

Zwischen den drei Kegelschnitten w, k und a bestehen folgende Beziehungen: 1) w und k sind in doppelter Berührung in den imaginären Schnittpunkten mit der absoluten Polaren von A. 2) w und a sind in doppelter Berührung in den Schnitt-

[1] *Engel* und *Stæckel:* Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. Bd. I. Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij. S. 256.

[2] Vgl. insbesondere *Engel:* Zur nichteuklidischen Geometrie, Leipzig, Ber. Ges. Wiss., 50, 181-191 (1898).

Schur: Ueber die Grundlagen der Geometrie, Math. Ann. 55, 265-292 (1901).

punkten mit der Axe x der Abstandslinie. 3) k und a sind in doppelter Berührung in den Schnittpunkten mit dem Durchmesser y, der in A rechtwinklig zu x ist.

Nun sei C ein beliebiger Punkt der Abstandslinie a, B seine Normalprojektion auf den Durchmesser x, D seine Normalprojektion auf den Durchmesser y, S der Schnittpunkt von C D mit dem Kreis k. Dann gilt es zu beweisen, dass A S und B C

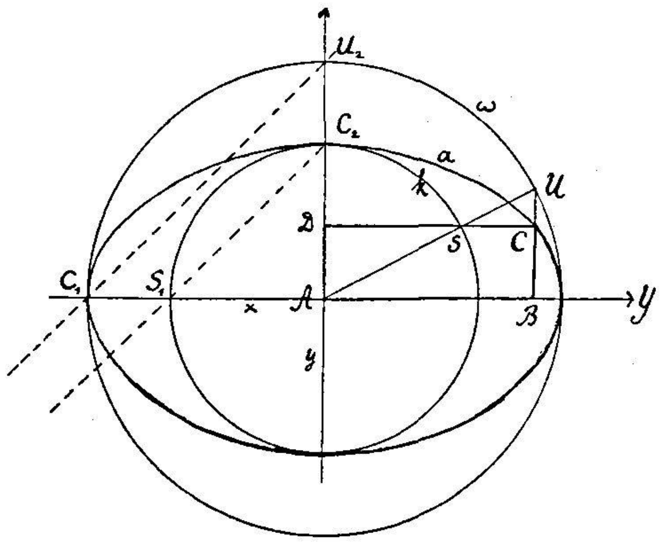

Fig. 1.

parallel sind, d. h. dass der Schnittpunkt dieser beiden Geraden ein Punkt U des absoluten Kegelschnittes w ist.[1]

S und C sind entsprechende Punkte in der Kollineation C_{ka} die k in a überführt, den Durchmesser y als Axe und dessen absoluten Pol Y als Zentrum hat.

C und U sind entsprechende Punkte in der Kollineation C_{aw}, die a in w überführt, den Durchmesser x als Axe und dessen Pol X als Zentrum hat.

Es ist zu beweisen, dass S und U in gerader Linie mit A liegen, d. h. entsprechend sind in der Kollineation C_{kw}, die k in w

[1] Deutet man w als *Kreis der euklidischen Geometrie* und wählt man A im Mittelpunkt desselben, so wird k ein Kreis mit diesem Mittelpunkt, die Abstandslinie a aber eine Ellipse, für die w und k die Kreise über den Hauptaxen sind. Unsere Figur stellt dann die bekannte Konstruktion der Ellipse aus diesen beiden Kreisen dar.

überführt, A als Zentrum und die absolute Polare von A, d. i. die Gerade X Y als Axe hat.

Die Kollineationen C_{ka} und C_{aw} sind nicht unabhängig von einander; denn einmal liegt das Zentrum jeder auf der Axe der andern, und dann sind die Charakteristiken beider einander gleich, da

$$1)\ YAS_1C_1 \,\overline{\wedge}\, XAC_2U_2,$$

weil die Geraden S_1C_2 und C_1U_2 sich auf XY schneiden.

Das Produkt der beiden Kollineationen C_{ka} und C_{aw} ist somit eine Kollineation für die A ein Doppelpunkt, XY eine Doppelgerade ist. Um nachzuweisen, dass die Kollineation in A ein Zentrum hat, hat man zu zeigen, dass XY eine Axe ist, d. h. dass jeder Punkt von XY ein Doppelpunkt ist.

In *Fig. 2* sei C_{ka} gegeben durch das Zentrum Y, die Axe y, das Paar S_1, C_1. Ferner C_{aw} durch das Zentrum X, die Axe x, das Paar C_2, U_2, so dass die Projektivität 1) erfüllt ist. S_3 sei ein beliebiger Punkt der Graden XY. Man konstruire C_3 mit-

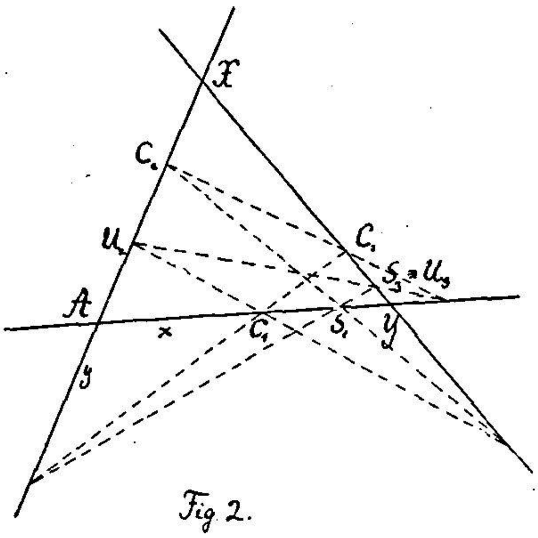

Fig. 2.

telst des Paares S_1, C_1, hierauf U_3 aus C_3 mittelst des Paares C_2, U_2, und findet $U_3 \equiv S_3$. Denn es ist nach den erwähnten Konstruktionen

$$YAS_1C_1 \,\overline{\wedge}\, YXS_3C_3,$$

$$XAC_2U_2 \,\overline{\wedge}\, XYC_3U_3,$$

also wegen 1) auch

$$YXS_3C_3 \,\overline{\wedge}\, XYC_3U_3 \,\overline{\wedge}\, YXU_3C_3,$$

woraus, nach dem *v. Staudt*'schen Fundamentalsatz der projektiven Geometrie

$$U_3 \equiv S_3.$$

4. M. le Prof. Dr D. MIRIMANOFF (Genève): *Sur quelques problèmes concernant le jeu de trente et quarante.*

La théorie du jeu de trente et quarante, donnée pour la première fois par Poisson en 1820, a été complétée en plusieurs points par Oettinger, dans un travail consciencieux qui semble avoir passé inaperçu. Bien que les déductions de Poisson et Oettinger présentent des lacunes, je n'aurais pas cru utile de revenir sur ce sujet, si Bertrand, en traitant l'un des problèmes du jeu, n'était arrivé à des résultats ne concordant pas entièrement avec ceux d'Oettinger et de Poisson; le désaccord n'est pas grand, mais il existe, et cela suffirait pour justifier une étude nouvelle.

Pour simplifier le problème, Bertrand a introduit une hypothèse qui modifie les conditions du jeu; il était facile de refaire ses calculs et je dirai tout de suite que plusieurs de ses résultats contiennent des décimales inexactes.

Bien plus difficile est l'étude des problèmes réels. Je montrerai comment on pourrait compléter l'analyse d'Oettinger. Quant à celle de Poisson, elle exigerait des développements trop longs pour trouver place dans cette communication.

1. Le jeu de trente et quarante se joue avec six jeux de 52 cartes. Le banquier abat une, deux, trois... cartes, jusqu'à ce que la somme des points ait dépassé trente (les figures valant dix). Cette première rangée est suivie par une seconde. Le joueur parie pour l'une des rangées et gagne, si le nombre des points de sa rangée est plus petit que celui de l'autre. Si les deux rangées ont 31 points chacune, le banquier a droit à la moitié des mises. Tel est le seul avantage du banquier. Pour le calculer, il suffit donc d'évaluer la probabilité d'abattre deux rangées de 31 points chacune. D'où le problème fondamental suivant: Quelle est la probabilité d'abattre une rangée de

i points? Désignons cette probabilité par p_i. Il est utile de réunir les rangées en groupes que j'appellerai *familles*. Je dirai que deux rangées appartiennent à une même famille, si elles se composent de cartes de même valeur. Désignons par n_i le nombre des familles de i points. J'ai calculé n_i pour tous les i ne dépassant pas 31. En particulier il existe 4231 familles de rangées ayant chacune 31 points.

Dans le jeu de trente et quarante les cartes ne sont pas remises dans le jeu; la probabilité p_i dépend donc du nombre et de la valeur des cartes sorties. Mais considérons le cas hypothétique où les cartes sorties seraient remises dans le jeu et soit P_i la probabilité d'abattre une rangée de i points dans cette hypothèse. Bertrand s'est borné à ce cas limite, déjà envisagé par Poisson et Oettinger, mais un certain nombre des valeurs des P_i calculées par lui contiennent des décimales inexactes. En particulier $P_{31} = 0{,}148061$ (plus exact. $0{,}14806086$) et non $0{,}148218$; par conséquent l'avantage du banquier dans cette hypothèse serait $\frac{1}{2} \cdot 0{,}0219220$ et non $\frac{1}{2} \cdot 0{,}0219686$.

2. C'est dans l'étude du problème réel que la notion de famille m'a été particulièrement utile. Pour évaluer la probabilité p_i il suffit de calculer le coefficient de t^i dans le développement de $(1+ut)^{x_1}(1+ut^2)^{x_2} \ldots (1+ut^{10})^{x_{10}}$, $x_1, x_2 \ldots x_{10}$ désignant le nombre des as, des deux, etc., au moment où l'on abat la rangée. Ce coefficient est un polynome de la forme $a_1u + a_2u^2 + \ldots + a_k u^k$. Posons $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}$ et soit b_m le coefficient binomial $\binom{s}{m}$; la probabilité d'abattre une rangée de m cartes et de i points est égale à

$$\frac{a_m}{b_m}, \text{ d'où } p_i = \sum_{m=1}^{k} \frac{a_m}{b_m}.$$

Mais est-il nécessaire de calculer toutes ces fractions? Oettinger néglige celles dont l'indice est supérieur à une certaine limite. J'ai cherché à me rendre compte du degré d'approximation obtenu de cette manière, en décomposant $\frac{a_m}{b_m}$ en une somme de probabilités partielles relatives aux différentes familles de m cartes et de i points; or, il est facile de calculer la borne supérieure e_m de ces probabilités partielles; en la multipliant par le nombre des familles de m cartes on en déduit une borne pour $\frac{a_m}{b_m}$. J'ai réussi ainsi à justifier le procédé d'Oettinger, mais je n'ai pas eu le temps de vérifier ses calculs. On rencontre dans les mémoires d'Oettinger et de Poisson d'autres points obscurs qu'il serait utile de mettre en lumière. Je compte le faire prochainement.

5. Herr Prof. Dr. O. Spiess (Basel): *Ueber Gruppen algebraischer Funktionen.*

Ist $R_n(x)$ eine rationale Funktion n-ten Grades, so besitzt die Gleichung: (1) $R_n(y) - R_n(x) = o$ n algebraische Funktionen zu Wurzeln $y_o = x_1\ y_1(x), \ldots y_{n-1}(x)$, die eine *Gruppe* bilden, indem $y_h(y_i) = y_k$. Umgekehrt sind alle Alg. Funktionen, die eine endliche Gruppe bilden, die sämtlichen Wurzeln einer Gleichung der Form (1). Betrachten wir z. B. eine Gruppe, die durch Iteration einer einzigen ν-deutigen Funktion entspringt (monogene Gruppe). Einem Punkt x der Zahlenebene entsprechen dann ν Punkte, diesen zusammen wieder ν^2 andere, die aber zum Teil koïnzidieren können u.s.w. Ist die Anzahl aller so aus x entspringenden Punkte endlich, so haben wir eben eine endliche Gruppe vor uns. Verbindet man jeden Punkt mit den ν ihm entsprechenden durch (mit Pfeilen versehene) Linien, so entsteht ein Liniennetz (Polygramm), als Bild der Gruppe. Da es bloss auf den Zusammenhang dieser Linien ankommt, kann man sie von der Ebene loslösen und in irgend welchen Räumen konstruiert denken. So sind z. B. die Kantenmodelle der regulären und halbregulären Polyeder solche Gruppenbilder.

Es entsteht das *Problem,* die allgemeinste Gleichung der Form (1) aufzustellen, die zu einem gegebenen Polygramm gehört. Indem man die Ecke x geschlossene Umläufe ausführen lässt und die Vertauschungen der andern Ecken betrachtet, lässt sich die Frage in manchen Fällen allgemein lösen. So gehört zum Oktaeder die Funktion des 6. Grades $R_6(x) = R_3\ S_2(x)$, wo $S_2(x)$ eine lineare Substitution vom Cyclus 2 gestattet. Diese

Betrachtungsweise lässt sich natürlich auch auf unendliche Gruppen ausdehnen.

6. Prof. J. ANDRADE, Besançon (France). *Nouveaux modèles de mouvements pour l'enseignement de la géométrie.*

Ces modèles ne concernent que la géométrie qualitative, la seule qui offre au débutant une réelle difficulté; ce sont des modèles de mouvements ou d'assemblages, matérialisant les premiers concepts de la géométrie, qui sont non des concepts de formes, mais des concepts de mouvements.

I. Modèle relatif à la définition réaliste de la droite.
II. Triangle évidé avec axe perpendiculaire traversant son plan en un sommet.
III. Modèle dont les deux phases de mouvement schématisent la propriété fondamentale du dièdre.
IV. Modèle pour illustrer une propriété fondamentale du trièdre, ou théorème du parapluie.
V. Modèle de démonstration pour ce théorème: que deux plans qui ont un point commun ont une droite commune, ou ce qui revient de même : qu'une seule droite perpendiculaire à un plan peut-être conduite par un point de ce plan. Les modèles I, II, III, IV ont déjà été indiqués par l'auteur dans son livre « Le mouvement »[1] mais le modèle V, réalise par un jeu de fils la conséquence singulière de deux normales élevées d'un même point à un plan : à savoir qu'un même point d'un solide en rotation décrirait *à la fois une ligne et une surface* si le théorème étudié était en défaut.

Des photographies de ces modèles de mouvements paraîtront en décembre dans la « Revue de l'enseignement technique ».

7. M. Gustave DUMAS, Zurich: *Sur les singularités des surfaces.*

L'auteur de cette communication rappelle d'abord, en quel-

[1] Le mouvement, mesures du temps et mesures de l'étendue. Alcan éditeur. Paris 1911.

ques mots, comment se pose le problème de la résolution des singularités des surfaces, puis, dans un exposé d'un caractère tout à fait général, développe sa méthode, en résolvant d'une manière complète la singularité que la surface

$$(1) \qquad z^{10} - 4y^{12} + 4x^3y^8 + x^6y^4 - x^9 + \mathrm{A}x^4y^5z^2 = 0$$

présente au point

$$(2) \qquad x = y = z = 0.$$

Son procédé le conduit à faire correspondre aux points singuliers considérés certains polyèdres analogues aux polygones de Newton utilisés pour les courbes algébriques planes.

Dans l'exemple de ci-dessus, la polyèdre comporte une seule face finie, triangulaire, T. La résolution complète de la singularité s'effectue en partant de trois substitutions se rattachant respectivement à chacune des arêtes de T, et de la forme :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = \xi^a \, \eta^{a'} \, u^{a''} \\ y = \xi^b \, \eta^{b'} \, u^{b''} \\ z = \xi^c \, \eta^{c'} \, u^{c''} \end{array} \right.$$

Les exposants a, b, c, etc., sont des entiers positifs ; quelques-uns d'entre eux peuvent être nuls. Leur déterminant, pris en valeur absolue, doit se réduire à l'unité.

Par l'intermédiaire des substitutions (3) on obtient des représentations holomorphes de portions de la surface (1), dans le voisinage du point (2), qui, dans leur ensemble, représentent complètement cette surface (1) dans le voisinage de ce même point (2).

Pour atteindre ce dernier résultat, il suffit d'ailleurs un nombre fini de ces représentations [1].

M. G. Dumas montre ensuite que le polyèdre permet de distinguer les uns des autres les différents *cycles*, ou, ce qui revient au même, les diverses nappes qu'une surface présente dans le voisinage d'un point singulier, et, termine en donnant quelques

[1]) Pour de plus amples renseignements sur la résolution de la singularité considérée, voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 154, p. 1495, séance du 3 juin 1912.

indications relatives à différents polyèdres rencontrés dans le cours de ses recherches.

8. Prof. Dr M. PLANCHEREL, Fribourg. *Unicité du développement d'une fonction en série de polynômes de Legendre et expression analytique des coefficients de ce développement.*

$P_n(x)$ désignant le polynôme de Legendre $\frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$, nous appellerons série de polynômes de Legendre toute série de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$. $f(x)$ étant une fonction sommable dans l'intervalle $(-1, +1)$, on peut former les *coefficients de Legendre* $f_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x)\, dx$. La série $\Sigma f_n P_n(x)$ formée au moyen de ces coefficients n'est pas nécessairement convergente ; nous l'appellerons la *série de Legendre* de $f(x)$, $f(x)$ en sera dite la *génératrice.*

On peut se poser au sujet de ces séries des questions analogues à celles que *Cantor* et *Dubois-Reymond* ont posées et partiellement résolues dans la théorie des séries trigonométriques. Les théorèmes suivants constituent une réponse partielle à ces questions.

I. *La condition nécessaire et suffisante pour que dans tout l'intervalle $(-1, +1)$ à l'exception au plus d'un ensemble réductible de points, $\Sigma a_n P_n(x)$ converge vers zéro, est que $a_n = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.* Ce théorème est dû à M. Dini. La méthode qui me donne les théorèmes suivants m'en fournit une démonstration plus simple.

II. *Si la série $\Sigma a_n P_n(x)$ converge dans tout l'intervalle $(-1, +1)$, à l'exception au plus d'un ensemble réductible de points, vers une fonction $f(x)$ bornée, c'est une série de Legendre dont $f(x)$ est la génératrice.*

III. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une série $\Sigma a_n P_n(x)$ (convergente ou non) possède une fonction génératrice*

$f(x)$ est que la série $\Sigma\, a_n \int\limits_{-1}^{x} P_n(x)\, dx$ converge dans tout l'intervalle $(-1_1 + 1)$ vers $\int\limits_{-1}^{x} f(x)\, dx$.

Dans les théorèmes analogues de Cantor et de Dubois-Reymond, l'élément analytique qui joue un grand rôle dans la démonstration est l'expression $\frac{1}{h}\,[f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)]$ dont la limite pour $h = o$ donne la dérivée seconde généralisée de $f(x)$. Pour trouver dans notre cas une expression jouant un rôle analogue, nous considérerons une fonction F (δ,φ) sur la sphère de rayon 1. Décrivant autour du point (δ,φ) comme centre un petit cercle de rayon sphérique h, appelant (δ',φ') les points de ce petit cercle, ds' l'élement d'are et s le périmètre de ce petit cercle, nous formerons l'expression

$$\Delta_2 F(\delta,\varphi;\mathrm{h}) = \frac{1}{\sin^2 \frac{\mathrm{h}}{2}} \left[\frac{1}{s}\int F(\delta',\varphi')ds' - F(\delta,\varphi)\right]$$

Notant Δ_2 F (δ,φ) la limite de cette expression pour $h = o$, il vient, si F possède une différentielle seconde,

$$\Delta_2 F = \frac{1}{\sin\delta}\frac{\partial}{\partial\delta}\left(\sin\delta\,\frac{\partial F}{\partial\delta}\right) + \frac{1}{\sin^2\delta}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}.$$

En particulier, $\Delta_2 P_n(\cos\delta) = -n(n+1)\,P_n(\cos\delta)$. L'expression Δ_2 F $(\delta,\varphi;h)$ jouit de propriétés d'extrémum qui permettent de suivre dans la démonstration de nos théorèmes une marche analogue à celle donnée par Hölder dans le cas des séries trigonométriques. Faisant correspondre maintenant par la substitution $x = \cos\delta$, à toute série $\Sigma\, a_n P_n(x)$ une fonction $F(\delta) = -\Sigma \frac{a_n}{n(n+1)} P_n(\cos\delta)$, on démontre que $\lim\limits_{h=o} \sin\frac{h}{2}\,\Delta_2 F(\delta,h) = o$ et qu'en tout point de convergence de la série $\Sigma\, a_n P_n(x)$, $\Delta_2 F(\delta) + a_o = \Sigma\, a_n P_n(\cos\delta)$. L'utilisation de ces propriétés conduit sans difficulté aux théorèmes énoncés plus haut.

9. Prof. Dr. E. Meissner (Zürich). *Kinematische Untersuchungen.*

Das Problem der Stützung eines starren Körpers durch Ebenen führt u. a. auf die Frage nach der Existenz polyedraler Flächen. Darunter sind konvexe geschlossene Flächen zu verstehen, die im Innern eines regulären Polyeders sich mit drei Freiheitsgraden derart bewegen lassen, dass sie stets alle Polyederseiten berühren.

Mathematisch führt dies auf lineare Funktionalgleichungen, denen eine auf der Einheitskugel endeutige Funktion genügen muss. Je nach der Art des umschliessenden Polyeders kann man fünf Typen solcher Flächen unterscheiden und es frägt sich, ob ausser der Kugel Flächen von jedem Typus existieren.

Die zum Würfel gehörenden Flächen sind mit den Flächen konstanter Breite identisch. Von den tetraedralen und oktaedralen Flächen werden Beispiele nach einer bestimmten Methode konstruiert, die im Dodekaeder- und Ikosaederfall aber nur die Kugel ergibt.

Zum Schluss wird der Satz bewiesen, dass die Kugel die einzige Lösung desjenigen Problems ist, bei dem das reguläre Polyeder durch ein reguläres dreiseitiges Prisma ersetzt wird. Dies ist um so bemerkenswerter, als die zu lösende Funktionalgleichung derjenigen des Tetraederfalles vollständig analog ist.

10. Prof. Dr. A. Emch, Urbana (U. S. A.) *Ueber eine besondere conforme Transformation in der Ebene.*

Bezeichnet man mit $A\lambda$ und $A\mu$ zwei beliebige Punkte, welche in der komplexen Ebene durch $z\lambda$ und $z\mu$ dargestellt seien und trennt man in dem quadratischen Polynom $\alpha_0 (z - z\lambda (z - z\mu)$ den reellen vom imaginären Teil, so dass

$$u + iv = a_0(z - z_\lambda)(z - z_\mu)$$

ist, so stellen $u = o$, $v = o$ zwei orthogonale gleichseitige Hyperbeln dar, die durch $A\lambda$ und $A\mu$ gehen und ausserdem durch die imaginären Punkte $B\lambda$, $B\mu$, die mit $A\lambda$, $A\mu$ ein orthogonales Quadrupel bilden, mit dem Mittelpunkt $M\lambda\mu$ und den Kreispunkten J_1, J_2 als Diagonalpunkten.

$B\lambda$, $B\mu$ heissen *assozierte Punkte* von $A\lambda$, $A\mu$.

Stellt $u + iv = f(z)$ ein Polynom m^{ten} Grades dar, so wird durch $u + \lambda v = o$ ein *Stelloïdenbüschel* m^{ter} Ordnung definiert, welcher als Grundpunkte die m-reellen Wurzelpunkte des Polynoms und ihre $m(m-1)$ assozierten Punkte besitzt. Umgekehrt bestimmen m beliebige Punkte und ihre $m(m-1)$ assozierten als Grundpunkte ein Büschel von Stelloïden.

Die Polaren k^{ter} Ordnung in Bezug auf ein Stelloïdenbüschel m^{ter} Ordnung bilden einen Stelloïdenbüschel $(m\text{-}k)^{ter}$ Ordnung.

Ist ein Stelloïdenbüschel durch $(m+1)$ beliebige Punkte und ihre assozierten bestimmt, so kann man jeden Punkt $P'(x', y')$ der Ebene die n reellen der Grundpunkte des ersten Polarenbüschels bezüglich des Stelloïdenbüschels zerordnen, gemäss der Beziehung

$$z' = z - \frac{(n+1)\Phi(z)}{\Phi'(z)},$$

worin $\varphi(z) = o$ den Stelloidenbüschel definiert.

Endlich wird noch die Frage behandelt, ob es möglich sei, eine allgemeine irreduzible rationale Transformation

$$z' = \frac{f(z)}{g(z)}$$

in ähnlicher Weise geometrisch zu deuten.

11. R. DE SAUSSURE (Genève) : a) *Sur le mouvement le plus général d'un fluide dans l'espace.*

Le mouvement le plus général d'un fluide dans un plan (à un instant donné) est le mouvement défini par le système de tous les cercles tangents en un même point M_0 à une même droite D_0. Ce système est la forme fondamentale de la géométrie des flèches dans un plan, c'est-à-dire de la géométrie où l'on prend comme élément spatial primitif une flèche (ensemble d'un point M et d'une droite D passant par ce point et affectée d'un sens).

A la géométrie des flèches dans le plan correspond dans l'espace à 3 dimensions la géométrie des *feuillets* (ensemble d'un point M, d'une droite dirigée D passant par M, et d'un plan P passant par M et par D, et dont les faces sont différenciées par les signes + et —). Les systèmes de feuillets sont analogues aux systèmes de droites, donc la géométrie des feuillets est analogue à la géométrie réglée, avec cette différence qu'un feuillet dépend de 6 coordonnées, tandis qu'une droite ne dépend que de 4 coordonnées[1].

Si l'on affecte un feuillet MDP d'un coefficient numérique *a* on obtient un *feuillet coté.* D'autre part une droite affectée d'un coefficient numérique *(droite cotée)* n'est pas autre chose, au point de vue géométrique, que l'élément appelé par R.-S. Ball: une *vis (screw).* Donc les systèmes de feuillets cotés sont analogues aux systèmes de vis de Ball. On trouve en effet que le système *linéaire* de feuillets cotés ∞^1 est complètement déterminé par 2 feuillets cotés ; le système linéaire ∞^2, par 3 feuillets cotés ; le système linéaire ∞^3, par 4 feuillets cotés, etc.

C'est le système linéaire (∞^3) de feuillets cotés qui représentera le mouvement le plus général d'un fluide dans l'espace (à un moment donné), car ce système remplit tout l'espace de telle façon qu'en un point quelconque se trouve un feuillet et un seul, lequel feuillet définit le mouvement de la molécule fluide située en ce point.

b) *Continuité et discontinuité.*

La continuité est une propriété essentielle et inhérente à la notion d'espace, de même que la discontinuité est inhérente à la notion de nombre. Les nombres sont des points isolés et ce n'est que par un procédé artificiel et purement intellectuel que l'on arrive à la notion du *continu mathématique.* Au contraire, dans le continu physique, tel que l'espace, ce qui est réel c'est la continuité et le *point* est une notion purement intellectuelle ne correspondant à aucune réalité. En d'autres termes : les nombres sont des points isolés sans pont pour les réunir, au contraire l'espace est un pont continu qui n'a pas d'extrémités. On ne doit donc pas définir (comme le fait par exemple M. Poincaré dans *La valeur de la science*) le continu physique comme on définit le continu mathématique, car cette définition sup-

[1] Voir *Exposé résumé de la géométrie des feuillets*, par R. de Saussure. *Mémoires de la Soc. de Phys. de Genève*, vol. 36.

pose l'existence d'éléments, discernables ou indiscernables, qui n'existent pas dans l'espace. Ce qu'il faut définir dans le nombre, c'est la continuïté théorique entre des points isolés que l'on rapproche toujours davantage; au contraire, dans l'espace la continuité est la chose primitivement donnée, et ce qu'il faut définir, c'est l'existence théorique de points, lignes, surfaces, servant à limiter la continuité de l'espace.

Le nombre et l'espace sont deux entités inadéquates l'une à l'autre, car ce qui existe dans l'une, n'existe pas dans l'autre et réciproquement. Mais l'esprit humain est parvenu à les rendre adéquats artificiellement, en créant d'une part un pont continu entre les nombres, et d'une part des points dans l'espace pour le limiter. Tel est le double artifice qui permet d'appliquer le nombre discontinu à l'espace continu.

12. Prof. Dr. F. Rudio (Zurich). *Der Stand der Herausgabe der Werke Leonhard Euler's.*

Der Vortragende teilt mit, dass nunmehr fünf Bände der Eulerausgabe erschienen seien: Der erste Band, der am Tage der Bundesfeier 1911 hat vorgelegt werden können, enthält die *Algebra*, herausgegeben von *H. Weber*-Strassburg, zwei weitere Bände umfassen die *Dioptrik*, herausgegeben von *E. Cherbuliez*-Zürich und die beiden zuletzt erschienenen, von *P. Stäckel*-Karlsruhe herausgegebenen Bände enthalten die *Mechanik*. Die Algebra und der erste Band der Mechanik sind mit Bildnissen Eulers geschmückt. Die Mechanik musste in *zwei* Bänden herausgegeben werden, da sie 111 Bogen umfasst, die zum Preise von 25 Fr. zu liefern ein Ding der Unmöglichkeit wäre — ganz abgesehen von der Monstruosität einer solchen Publikation. Der Vortragende kommt dabei auf die Herstellungskosten der ersten Bände zu sprechen. Der erste Band, die Algebra, hat allein rund 22,000 Fr. gekostet, denen aus dem Abonnement nur 9,450 Fr. Einnahmen gegenüberstehen. Dieser eine Band hat also ein Defizit von über 12,000 Fr. verursacht. Günstiger stellt sich die Rechnung bei den zwei dünneren Dioptrikbänden, die mit rund 31,000 Fr. Ausgaben und 19,000 Fr. Einnahmen den Eulerfond *zusammen* mit 12,000 Fr. belasten.

Die Hauptursache dieser unverhältnismässig grossen Defizite besteht darin, dass für die Eulerausgabe eine grössere Schrift gewählt wurde, als ursprünglich vorgesehen worden war. Die den ersten Berechnungen zugrunde gelegte Korpusschrift hätte aber dem monumentalen Charakter, den eine Eulerausgabe beanspruchen darf, nicht entsprochen. Freilich ergibt sich aus den mitgeteilten Zahlen die ernste Mahnung, der sich kein Einsichtiger wird verschliessen können, dass die Bände im Durchschnitt nicht über 60 Bogen umfassen dürfen, wenn nicht das ganze Unternehmen schwer gefährdet werden soll. Eine Erhöhung der ursprünglich in Aussicht genommenen Bändezahl ist daher nicht zu vermeiden.

Den jetzt vorliegenden fünf Bänden werden sich in wenigen Monaten drei weitere angeschlossen haben. Als sechster Band wird noch im Laufe dieses Jahres die erste Hälfte der Abhandlungen über die *Elliptischen Integrale,* herausgegeben von *A. Krazer*-Karlsruhe, erscheinen. Der Band ist bereits fertig gesetzt und korrigiert. Auch von dem folgenden Bande, der die zweite Hälfte der genannten Abhandlungen bringen wird, ist bereits ein grosser Teil gesetzt. Da beide Teile über 90 Bogen umfassen, mussten sie aus den angegebenen Gründen in zwei Bänden untergebracht werden. Von einem weiteren Bande, den von *G. Kowalewski*-Prag herausgegebenen *Institutiones calculi differentialis* ist ebenfalls ein Teil gesetzt. Die Eulerausgabe schreitet also rüstig vorwärts.

Zum Schlusse teilte der Vortragende noch einiges über das gewaltige handschriftliche Material mit, das die Petersburger Akademie in liberalster Weise zur Verfügung gestellt und nach Zürich gesandt hat. Mit der Sichtung der Manuskripte, die noch reiche Ausbeute für die Eulerausgabe versprechen, ist namentlich *G. Eneström*-Stockholm beschäftigt, der bereits wiederholt zu diesem Zwecke in Zürich Aufenthalt genommen hat.

Der Vortragende hatte wenige Wochen zuvor Gelegenheit gehabt, auch dem *Internationalen Mathematiker-Kongress in Cambridge* über die Eulerausgabe zu referieren. Auf Grund dieses Referates fasste der Kongress einstimmig folgende Resolution :

«Im Anschluss an die Verhandlungen der früheren Internationalen Mathematiker-Kongresse, insbesondere an den Beschluss des IV. Kongresses in Rom, betreffend die Herausgabe der sämtlichen Werke *Leonhard Eulers* bringt der V. Internationale Kongress zu Cambridge der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft seinen wärmsten Dank für die tatkräftige Inangriffnahme des grossen Unternehmens zum Ausdruck und verbindet damit zugleich seine hohe Anerkennung für die monumentale Ausgestaltung, die sie dem Werke in den bereits vorliegenden fünf Bänden hat angedeihen lassen. Der Kongress spricht die Erwartung aus, dass der Euler-Ausgabe auch fernerhin die Unterstützung nicht fehlen werde, die ihr bisher schon in so dankenswerter Weise von der ganzen wissenschaftlichen Welt, insbesondere von den grossen Akademien, zu teil geworden ist».

13. Prof. Dr. H. Fehr (Genève). *L'état des travaux de la Commission internationale d'enseignement mathématique et de la Sous-commission suisse.*

Dans la précédente réunion (Soleure), M. H. Fehr a indiqué le plan des travaux adopté par la Sous-commission suisse comme contribution à l'enquête générale entreprise par la Commission internationale de l'enseignement mathématique dans le but de mettre en lumière les tendances modernes de cet enseignement.

Cette étude, qui vient de paraître, comprend douze rapports publiés sous la direction de M. H. Fehr, qui est à la fois président de la Sous-commission suisse et secrétaire-général de la Commission internationale.

M. H. Fehr dépose sur la table un exemplaire destiné au Dr. P. Huber, président du Comité annuel d'Altdorf. Voici la composition de ce volume :

L'Enseignement Mathématique en Suisse. Rapports de la Sous-commission suisse publiés sous la direction de *H. Fehr.* — 1 vol., XVI et 756 p., 18 fr., en 8 fascicules en vente séparément, Georg & C[ie], Genève et Bâle.

Fasc. 1. — Les travaux préparatoires : Rapport préliminaire sur l'organisation de la Commission et le plan général de ses travaux, publié au nom du Comité central par *H. Fehr*, secrétaire-général de la Commission (en français et en allemand).

Organisation des travaux en Suisse. — 43 p.

Fasc. 2. — Aperçu général, par *H. Fehr.*

Der mathematische Unterricht an den schweizerischen Primarschulen, von *Just. Stöcklin.*

Der mathematische Unterricht an den schweizerischen Sekundarschulen, von *von Badertscher*, Bern. — 106 p.

Fasc. 3. — Der mathematische Unterricht an den höheren Mädchenschulen der Schweiz, von *E. Gubler,* Zürich.

Der mathematische Unterricht an den Lehrer- und Lehrerinnenseminarien der Schweiz, von *F. R. Scherrer*, Küsnacht.

Organisation und Methodik des mathematischen Unterrichts in den Landerziehungsheimen, von *K. Matter,* Frauenfeld. — 109 p.

Fasc. 4. — Der mathematische Unterricht an den schweizerischen Gymnasien und Realschulen, von *K. Brandenberger*, Zürich. — 167 p.

Fasc. 5. — Les mathématiques dans l'enseignement technique moyen en Suisse, par *L. Crelier,* Bienne. — 112 p.

Fasc. 6. — Les mathématiques dans l'enseignement commercial suisse, par *L. Morf,* Lausanne. — 70 p.

Fasc. 7. — Der mathematische Unterricht an der Eidgenössischen Technischen Hochschule, von M. *Grossmann,* Zürich. — 52 p.

Fasc. 8. — L'Enseignement mathématique à l'Ecole d'Ingénieurs de l'Université de Lausanne, par *M. Lacombe,* Lausanne.

Der mathematische Unterricht an den schweizerischen Universitäten, von *J. H. Graf,* Bern. — 72 p.

Ces rapports contiennent un ensemble de documents fort précieux, mais il ne constituent en réalité qu'une première partie des travaux. Il y a lieu de tirer parti de l'enquête faite en Suisse et à l'étranger et d'examiner les progrès à réaliser dans l'enseignement aux divers degrés. Dans une réunion, tenue à Bienne le 11 juillet, la Sous-commission a décidé, sur la proposition de son Président, de s'adresser, d'une part, aux autorités scolaires, pour leur signaler un certain nombre de réformes qui s'imposent à l'heure actuelle, d'autre part, aux Sociétés d'ordre pédagogique, telles que la Société des professeurs de Gymnases, la Société des professeurs de Mathématiques, etc., pour leur proposer de mettre en discussion un certain nombre de questions.

La place nous manque pour résumer ici ces vœux et propositions ; bornons-nous à mentionner que pour l'enseignement universitaire on estime que, par suite du nombre trop restreint des professeurs ordinaires, l'organisation des études mathématiques dans les universités suisses est insuffisante; elle est loin de satisfaire aux exigences, même les plus modestes, de la science moderne et aux buts que doit poursuivre l'enseignement universitaire. Il est donc désirable que de nouvelles chaires soient créées de manière que chaque université possède au moins trois chaires de Mathématiques pures [1], une chaire d'Astronomie, une chaire de Mécanique et une chaire de Physique mathématique.

La Sous-commission demande en outre qu'une plus grande attention soit vouée :

1. Au développement des études dans leur côté purement scientifique, ainsi qu'à la préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques.

2. A l'enseignement théorique et pratique destiné aux étudiants en sciences naturelles.

Quant aux travaux effectués dans les autres pays, ils comprennent plus de 280 rapports répartis sur près de 150 fascicules ou volumes. Ils ont été présentés au V^{e} Congrès international des Mathématiciens, qui vient d'avoir lieu à Cambridge. Dans sa séance de clôture, le 27 août dernier, le Congrès a décidé de renouveler le mandat de la Commission pour une durée de 4 ans, afin de permettre aux Sous-commissions nationales de terminer leurs rapports et d'étudier un certain nombre de questions d'une importance fondamentale dans des réunions qui auront lieu avant le prochain Congrès. On trouvera dans *l'Enseignement mathématique* du 15 novembre un compte rendu très complet de la Réunion de Cambridge avec une liste de tous les travaux publiés ou en préparation.

[1] 1. Calcul différentiel et Intégral; Analyse supérieure.
2. Algèbre supérieure; Théorie des nombres; Calcul des probabilités.
3. Géométrie analytique; Géométrie supérieure.