

Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft =
Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della
Società Elvetica di Scienze Naturali

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 79 (1896)

Protokoll: Sektion für Mathematik

Autor: Geiser, C.F. / Rudio, F.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

IV.

Sektionssitzungen.

A. Sektion für Mathematik.

Sitzung, den 4. August, vormittags 8 $\frac{1}{2}$ Uhr,
im Auditorium IV der Universität.

Einführende: Herr Prof. Dr. C. F. Geiser, Zürich.

„ „ Dr. F. Rudio, Zürich.

Präsident: „ „ Dr. C. F. Geiser.

Sekretär: „ „ Dr. F. Rudio.

1. Herr Prof. G. Oltramare, Genf, hält einen Vortrag über: „Le calcul de généralisation“:

De tout temps les géomètres ont eu l'idée de faciliter leurs opérations en substituant à une grandeur une autre quantité se prêtant plus facilement au calcul.

Le calcul logarithmique est là pour nous montrer qu'en substituant à un nombre donné une quantité constante élevée à une certaine puissance déterminée, on pouvait effectuer le produit de deux nombres par une simple addition; de là a découlé toute la théorie des logarithmes et tout l'emploi qu'on en peut faire.

On comprend de même que, si l'on parvenait à représenter toute fonction par une expression qui

réduisit à des opérations très simples la détermination de sa différentielle et de son intégrale, on pourrait obtenir un procédé qui simplifierait considérablement les opérations auxquelles les fonctions sont soumises.

Il est remarquable que ce résultat peut s'obtenir par une extension du procédé logarithmique, en admettant que toute fonction peut être représentée par une somme finie ou infinie de termes contenant une exponentielle élevée à différentes puissances réelles ou imaginaires; cette représentation nous permettra d'effectuer la différentiation par une simple multiplication et par suite d'en obtenir l'intégration par une division toujours facile à effectuer.

Bien qu'il soit admis qu'une fonction quelconque puisse être représentée par une somme d'exponentielles, cependant on n'a aucun moyen d'effectuer, dans tous les cas, cette transformation; le problème à résoudre consiste donc à montrer de quelle manière nous pourrions user des avantages attachés à cette représentation, en admettant toutefois qu'il ne nous est pas possible de l'effectuer. C'est le but que nous avons cherché à atteindre en proposant le calcul de généralisation, il est donc bien naturel de se demander en quoi consiste cette opération, à laquelle on doit soumettre toutes les fonctions, et d'en fixer la nature d'une manière rigoureuse.

C'est la question qui fait le sujet de notre communication.

Soit $q(a, b, c, \dots)$ une fonction quelconque uniforme d'une ou plusieurs variables a, b, c, \dots

c'est-à-dire, telle, qu'à une valeur donnée pour chaque variable, il n'en corresponde qu'une seule valeur pour la fonction, et, cherchons à reconnaître

s'il existe une opération distributive dont nous désignerons par G la caractéristique qui, appliquée à cette fonction aurait pour effet d'éliminer les nouvelles variables u, v, w, \dots dans l'expression $e^{au+bv+cw+\dots}$ de telle sorte qu'il en résulterait l'identité

$$G e^{au+bv+cw+\dots} = \varphi(a, b, c, \dots) \quad (1)$$

Proposons-nous, en outre, de déterminer la valeur de l'expression

$$G \Psi(u, v, w, \dots) \quad (2)$$

en appliquant à la fonction $\Psi(u, v, w, \dots)$ l'opération que nous aurons reconnue capable de satisfaire à l'égalité précédente.

Ces deux problèmes peuvent se résoudre de la manière suivante:

Désignons par x, y, z, \dots des quantités que nous considérerons comme constantes arbitraires et substituons dans l'identité (1) les valeurs $x+a, y+b, z+c, \dots$ à la place des variables a, b, c, \dots nous obtiendrons

$$G e^{xu+yv+zw+\dots} \times e^{au+bv+cw+\dots} = \varphi(x+a, y+b, z+c, \dots) \quad (3)$$

Cela posé, écrivons l'expression (2) sous la forme

$$G e^{xu+yv+zw+\dots} \Psi(u, v, w, \dots) \quad (4)$$

nous pourrions à ces formules (3) et (4) substituer les deux suivantes:

$$G e^{au+bv+cw+\dots} = \varphi(x+a, y+b, z+c, \dots) \quad (5)$$

$$G \Psi(u, v, w, \dots) \quad (6)$$

En admettant que, toutes les fois qu'on aura à effectuer l'opération G sur une fonction des variables u, v, w, \dots on devra la considérer comme préalablement multipliée par le facteur $e^{xu+yv+zw+\dots}$ que nous ne ferons pas figurer et que même nous supprimerons s'il venait à se présenter puisque, par

convention, la fonction est toujours censée multipliée par ce facteur.

Pour déterminer en quoi consiste cette opération distributive G , nous développerons les deux membres de l'identité (5) en séries ordonnées suivant les puissances des variables a, b, c, \dots en remarquant que dans le premier membre

$$Ge^{au+bv+cw+\dots} = 1 + \frac{au+bv+cw+\dots}{1} + \frac{(au+bv+cw+\dots)^2}{1.2} + \dots$$

et que la fonction du second membre se développe par la formule de Taylor étendue à une fonction de plusieurs variables.

Nous aurons ainsi

$$G \left\{ 1 + au + \frac{a^2}{1.2} u^2 + \dots + bv + ab uv + \dots + cw + \frac{b^2}{1.2} v^2 + \dots + \dots + ac uw + \dots + \dots + \dots \right\} = \varphi(x, y, z, \dots) + a \frac{d\varphi}{dx} + \frac{a^2}{1.2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \dots + b \frac{d\varphi}{dy} + ab \frac{d^2\varphi}{dx dy} + \dots + c \frac{d\varphi}{dz} + \frac{b^2}{1.2} \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \dots + \dots + ac \frac{d^2\varphi}{dx dz} + \dots + \dots$$

en effectuant, dans le premier membre, l'opération G sur chaque terme et en identifiant les coefficients des différentes puissances des variables on obtient :

$$\begin{aligned} G1 &= \varphi(x, y, z, \dots) \\ Gu &= D_x \varphi(x, y, z, \dots) \quad Gv = D_y \varphi(x, y, z, \dots) \quad Gw = D_z \varphi(x, y, z, \dots) \\ Gu^2 &= D_x^2 \varphi(x, y, z, \dots) \quad Gv^2 = D_y^2 \varphi(x, y, z, \dots) \\ Guv &= D_x D_y \varphi(x, y, z, \dots) \quad Guw = D_x D_z \varphi(x, y, z, \dots) \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

On voit ainsi que

Pour effectuer l'opération G sur une fonction quelconque

uniforme $\Psi(u, v, w, \dots)$ lorsqu'elle a été préalablement multipliée par le facteur $e^{xu + yv + zw + \dots}$, il suffit d'y remplacer u par D_x , v par D_y , w par D_z , .. et de déterminer la valeur de l'expression symbolique $\Psi(D_x, D_y, D_z, \dots) \varphi(x, y, z, \dots)$ lorsque l'on conçoit cette fonction développée en série suivant les puissances des caractéristiques D_x, D_y, D_z, \dots et qu'on effectue tous les coefficients différentiels indiqués.

Nous aurons donc d'une manière générale comme définition de la généralisation d'une fonction

$$G \Psi(u, v, w, \dots) = \Psi(D_x, D_y, D_z, \dots) \varphi(x, y, z, \dots)$$

Le second membre de cette identité présente, à peu d'exceptions près, une série d'un nombre illimité de termes qui n'est pas de nature à être introduite dans le calcul lorsqu'on laisse, ce qui est nécessaire, à la fonction $\varphi(x, y, z, \dots)$ toute sa généralité.

Le but du calcul de généralisation sera de présenter la valeur de cette expression sous une forme finie et c'est généralement à l'aide d'intégrales définies qu'il atteint ce résultat.

Le calcul de généralisation, tel que nous le présentons, n'exige pas qu'il soit nécessaire qu'on puisse développer la fonction Ψ suivant les puissances de ses variables; il résulte de là que lors même que la fonction n'est pas développable, l'expression $G \Psi$ n'en présente pas moins une valeur parfaitement déterminée.

C'est ainsi que les expressions $G \log u$ et $G \Gamma(u)$ sont telles que, bien que leurs valeurs ne puissent être exprimées directement par les développements de $[\log D_x] \varphi(x)$ et $\Gamma(D_x) \varphi(x)$ en séries ordonnées suivant les puissances de D_x , cependant la généralisation en sera donnée par les intégrales

$$G \log u = \int_0^{\infty} e^{-v} \{ \varphi(x) - \varphi(x-v) \} \frac{dv}{v}$$

$$G \Gamma(u) = \int_0^{\infty} e^{-v} \varphi(x + \log v) \frac{dv}{v}.$$

Nous avons reconnu que, quelle que fût la fonction Ψ , l'expression $G \Psi$ pouvait, dans tous les cas, être exprimée à l'aide d'intégrales définies, lorsque cette fonction, continue ou discontinue, était telle qu'à une valeur donnée à chaque variable il ne correspondait qu'une seule valeur pour la fonction.

Cette proposition établit le calcul de généralisation sur une base solide et indiscutable de sorte que les résultats auxquels il conduit ne sauraient être mis en doute; nous devons cependant ajouter qu'il faut s'assurer de la convergence des séries et des intégrales qu'on y rencontre dans le cours du calcul.

Il ne nous est pas possible, sans la connaissance du calcul de généralisation, de faire connaître les avantages que présente ce procédé, vous reconnaîtrez cependant que la représentation d'une fonction à l'aide de la caractéristique G , représentation qui est donnée par l'identité

$$\varphi(x+a, y+b, z+c, \dots) = G e^{au+bv+cw+\dots}$$

conduit immédiatement à la détermination de la différentielle et de l'intégrale de cette fonction par les opérations les plus simples. En effet, on déduit de cette relation

$$\frac{d\varphi}{da} = \frac{d\varphi}{dx} = G u e^{au+bv+cw+\dots}$$

$$\int \varphi da = \int \varphi dx = G \frac{1}{u} e^{au+bv+cw+\dots}$$

tielles partielles par une somme d'exponentielles ne soit tout-à-fait analogue au procédé de la généralisation.

Dans notre opinion, c'est plutôt dans le calcul des fonctions génératrices et des déterminantes d'Abel que l'on trouverait les procédés ayant le plus de rapport avec le calcul de généralisation. Quoi qu'il en soit, ni l'un ni l'autre de ces illustres géomètres n'a eu la pensée de faire de leurs procédés un corps de doctrine capable de résoudre les questions d'analyse qui n'avaient encore trouvé leurs solutions par les calculs ordinaires.

2. Herr Prof. A. Hurwitz, Zürich, hält einen Vortrag: „Ueber die Theorie der geometrischen Maxima und Minima.“ Der Vortragende weist darauf hin, dass die einfachen Methoden, deren sich die älteren Mathematiker, insbesondere L'Huilier und Steiner, bei der Behandlung von Aufgaben des Maximums und Minimums bedienten, derselben Kritik unterworfen sind, wie das Dirichlet'sche Princip, indem diese Methoden die Existenz des Maximums resp. Minimums stillschweigend voraussetzen. Mit Hülfe eines Satzes von Weierstrass lässt sich indessen der fehlende Existenzbeweis erbringen, worauf dann die Betrachtungen L'Huilier's und Steiner's in Kraft treten, freilich mit einer in den meisten Fällen notwendig werdenden Ergänzung. Diese allgemeinen Bemerkungen erläutert der Vortragende an einigen einfachen Beispielen, insbesondere an der Aufgabe: „Unter allen n -Ecken von dem nämlichen gegebenen Flächeninhalt dasjenige zu bestimmen, für welches die Summe der λ^{ten} Potenzen der Seiten ein Minimum wird, wobei λ eine reelle positive Konstante bedeutet.“ Das Minimum findet stets für das reguläre

n -Eck statt, wenn $\lambda \geq 1$ ist. Der Fall $\lambda < 1$ bietet erhebliche Schwierigkeiten dar. Es lässt sich in diesem Falle zeigen, dass schon für $n = 5$ bei geeigneter Wahl von λ keineswegs dem regulären Fünfeck unter allen Fünfecken gleichen Inhalts die kleinste Summe der λ^{ten} Potenzen der Seiten entspricht.

An der Diskussion beteiligen sich die Herren Galopin, Genf, und Hurwitz, Zürich.

3. Herr Prof. Franel, Zürich, hält einen Vortrag: „Sur une formule fondamentale de Kronecker.“ Soient a, b, c des quantités imaginaires telles que la partie réelle de l'expression $ax^2 + 2bxy + cy^2$ (x et y étant réels) soit une forme positive et

$$F(s) = \sum' \frac{1}{(am^2 + 2bmn + cn^2)^s}, \quad (1)$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs entières de m et de n , le système $m = 0, n = 0$ excepté. La fonction $F(s)$ est développable en série toujours convergente de la forme

$$\frac{A_{-1}}{s-1} + A_0 + A_1(s-1) + \dots;$$

il s'agit d'exprimer le coefficient A_0 au moyen des fonctions \mathfrak{P} d'argument 0. A cet effet faisons

$$F_m(s) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{(am^2 + 2bmn + cn^2)^s}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^s}, \quad F_0(s) = \frac{1}{c^s} \zeta(2s),$$

on aura

$$F(s) = 2 \left[\frac{\zeta(2s)}{c^s} + \sum_{m=1}^{m=\infty} F_m(s) \right]. \quad (2)$$

Désignons maintenant par $\Psi_m(s)$ la différence

$$F_m(s) - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(am^2 + 2bmx + cx^2)^s} =$$

$$= F_m(s) - \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) \cdot c^{s-1}}{\Gamma(s) \cdot (\sqrt{D})^{2s-1} \cdot m^{2s-1}}.$$

De la formule (2) résultera

$$F(s) - 2 \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) \cdot c^{s-1}}{\Gamma(s) (\sqrt{D})^{2s-1}} \cdot \zeta(2s-1) =$$

$$= 2 \frac{\zeta(2s)}{c^s} + \alpha \sum_{m=1}^{m=\infty} \psi_m(s).$$

Or le second membre converge uniformément dans toute région finie du plan situé à droite de la parallèle à l'axe des y d'abscisse $\frac{1}{2}$. Ce second membre peut donc se développer en série de la forme $B_0 + B_1(s-1) + \dots$ et le calcul de B_0 conduit immédiatement à la formule de Kronecker.

An der Diskussion beteiligt sich Herr Hurwitz.

4. Herr Prof. Dr. J. H. Graf, Bern, spricht über eine „Ableitung der Formeln für die Bessel'schen Funktionen, bei welchen das Argument eine Distanz darstellt.“

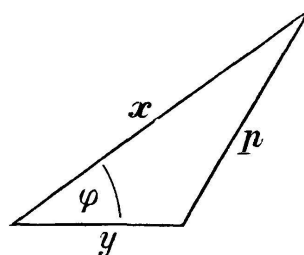
Bekanntlich haben C. Neumann, E. Lommel, N. Sonine, L. Gegenbauer und E. Heine für die Bessel'schen Funktionen, bei denen das Argument eine Distanz darstellt, Hinweise und Ableitungen gegeben. Im 43. Bd. der Math. Annalen findet sich am Schluss meines Aufsatzes über Addition und Subtraktion der Argumente bei Bessel'schen Funktionen ein weiterer Beweis, wo wir von der Formel

$$V = \sum_{-\infty}^{\infty} J_{(x)}^{n+\lambda} J_{(y)}^{\lambda} z^{\lambda}$$

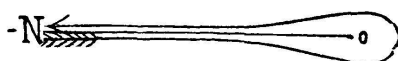
ausgehen.

Wir können nun nach einer Anregung Schläflis die Ableitung noch viel direkter gestalten.

Es sei $p = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi}$
und wir setzen
(1) $\begin{cases} pgh = gx - hy \\ p = hx - gy, \text{ reelle Comp. von} \\ p \text{ pos.} \end{cases}$



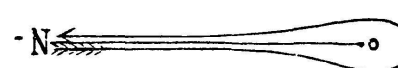
Nun ist nach der Schläflischen Form das Integral von $\overset{a}{J}(p)$ folgendermassen darstellbar:

$$\overset{a}{J}(p) = \frac{1}{2i\pi} \int e^{\frac{1}{2}p \left(t - \frac{1}{t}\right)} t^{-n-1} dt.$$


Weg eine rechtsläufige Schleife vom Westpunkt um O .

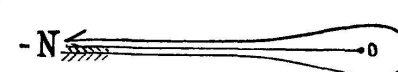
Nun ersetze man t durch ht und p durch den angegebenen 2^{ten} Ausdruck (1), dann folgt

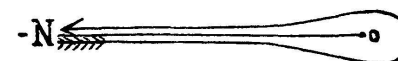
$$p \left(ht - \frac{1}{ht} \right) = x \left(t - \frac{1}{t} \right) + y \left(\frac{g}{ht} - \frac{ht}{g} \right), \quad dt \text{ durch } hdt$$

$$\overset{a}{J}(p) = \frac{1}{2i\pi} \int e^{\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) + \frac{y}{2} \left(\frac{g}{ht} - \frac{ht}{g}\right)} h^{-a} t^{-a} \frac{dt}{t}.$$


Nun aber ist

$$e^{\frac{y}{2} \left(\frac{g}{ht} - \frac{ht}{g}\right)} = \sum_{-\infty}^{\infty} J^{\lambda}(y) \left(\frac{g}{ht}\right)^{\lambda}, \text{ eingesetzt,}$$

$$\overset{a}{J}(p) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{g}{h}\right)^{\lambda} J^{\lambda}(y) \frac{h^{-a}}{2i\pi} \int e^{\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right)} t^{-\lambda-a} \frac{dt}{t},$$


$$\text{aber } \frac{1}{2i\pi} \int e^{\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right)} t^{-\lambda-a} \frac{dt}{t} = J_{(x)}^{a+\lambda}, \text{ somit}$$


$$J^a(p) = h^{-a} \sum_{-\infty}^{\infty} J_{(x)}^{a+\lambda} J_{(y)}^{\lambda} \left(\frac{g}{h}\right)^{\lambda}$$

Multiplizieren wir die Gleichungen (1) mit einander und dividieren wir das Produkt mit gh , so folgt

$$p^2 = x^2 + y^2 - \frac{g^2 + h^2}{gh} xy,$$

$$\text{nun sei } \frac{g}{h} = f = e^{i\varphi}$$

$$\text{dann ist } p^2 = x^2 + y^2 - \left(f + \frac{1}{f}\right) xy$$

$$p^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi, \text{ wie verlangt.}$$

$$J^a(p) = h^{-a} \sum_{-\infty}^{\infty} J_{(x)}^{a+\lambda} J_{(y)}^{\lambda} f^{\lambda} \quad (2)$$

$$= h^{-a} \sum_{-\infty}^{\infty} J_{(x)}^{a+\lambda} J_{(y)}^{\lambda} e^{i\lambda\varphi}$$

$$J^a(p) = h^{-a} \sum_{-\infty}^{\infty} J_{(x)}^{a+\lambda} J_{(y)}^{\lambda} \cos \lambda \varphi \quad (3)$$

Ersetzt man in (2) g durch $\frac{1}{g}$

$$h \quad , \quad \frac{1}{h}$$

$$\lambda \quad , \quad -\lambda, \text{ so folgt}$$

$$J^a(p) = h^{+a} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{\lambda} f^{-\lambda} J_{(x)}^{a-\lambda} J_{(y)}^{\lambda}, \quad a \text{ durch } -a$$

$$\bar{J}^a(p) = h^{-a} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{\lambda} J_{(x)}^{a-\lambda} J_{(y)}^{\lambda} \cos \lambda \varphi \quad (4)$$

(3) und (4) in der Schläfli'schen komplementären Form

$$\bar{K}^a(p) = \cotg a \pi \cdot J^a(p) - \frac{1}{\sin a \pi} \bar{J}^a(p)$$

substituiert, giebt:

$$\bar{K}^a(p) = h^{-a} \sum_{-\infty}^{\infty} K_{(x)}^{a+\lambda} J_{(y)}^{\lambda} \cos \lambda \varphi \quad (5)$$

In (3) und (5) $a = 0$ gesetzt, folgt sofort

$$\bar{J}^0(p) = \sum_{-\infty}^{\infty} J_{(x)}^{\lambda} J_{(y)}^{\lambda} \cos \lambda \varphi$$

$$\overset{o}{K}(p) = \sum_{-\infty}^{\infty} K_{(x)}^{\lambda} J_{(y)}^{\lambda} \cos \lambda \varphi,$$

was die früher erhaltenen Resultate sind.

Sodann spricht Herr Graf über den von ihm herausgegebenen „Briefwechsel zwischen J. Steiner und L. Schläfli“, den die Berner naturforschende Gesellschaft der Zürcher Gesellschaft als Festgabe gewidmet hat.

Im Anschlusse hieran giebt Herr Prof. Dr. C. F. Geiser einige historische Erläuterungen.

Schluss 11 Uhr.

B. Sektion für Physik.

Sitzung, den 4. August, vormittags 8¹/₄ Uhr,
im Hörsaal 11 c des eidgenössischen Physikgebäudes.

Einführende: Herr Prof. Dr. H. F. Weber, Zürich.

„ „ Dr. A. Kleiner, Zürich.

Präsident: „ „ Dr. H. F. Weber.

Vizepräsident: „ „ Dr. A. Kleiner.

Sekretäre: „ Dr. L. Cellier.

„ U. Seiler.

-
1. Herr Dr. O. Frölich, Berlin, spricht über „Neuerungen in der elektrochemischen Metallgewinnung“.
 2. Herr Prof. Dr. E. Wiedemann, Erlangen, hält einen Vortrag über „Entladungs- und Lumineszenzerscheinungen.“
 3. Herr Prof. Dr. H. F. Weber, Zürich, spricht über eine „Neue Methode zur Bestimmung der Hysteresis in dielektrischen Medien.“