Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 59 (1876)

Artikel: Ueber ein Problem der kinematischen Geometrie

Autor: Geiser

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-90014

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

IX.

Ueber ein Problem der kinematischen Geometrie.

Von

Prof. **Geiser** in Zürich.

Von den mannigfach verschiedenen Arten, die Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene zu bestimmen, hat man bis jetzt in den Anwendungen auf den Maschinenbau hauptsächlich zwei berücksichtigt. Die erste besteht darin, die Bahnen zweier Punkte zu geben, da weitaus die grösste Mehrzahl der in der Praxis verwerthbaren Mechanismen zurückgeführt werden kann auf specielle Fälle und Combinationen derjenigen Systeme, in welchen zwei ausgezeichnete Punkte sich in Kreisen bewegen*), die zweite, namentlich für die Lehre von den Verzahnungen wichtig, geht von den Polbahnen aus und sucht die zugehörigen Punktbahnen.**)

Der Wunsch, für meine Vorlesungen ein neues, von den bisherigen wesentlich verschiedenes Beispiel auszu-

---

*) Herr Professor Aronhold behandeit in seinen Vorlesungen über kinematische Geometrie an der Berliner Gewerbeakademie hauptsächlich die Kurbelbewegungen und die Geradführungen als Beispiele. Hoffentlich werden seine ebenso einfachen als vollständigen Resultate, die er mir schon vor längerer Zeit schriftlich und mündlich mitgetheilt hat, bald veröffentlicht werden.

**) Reuleaux, Theoretische Kinematik. Braunschweig, 1875, p. 135 etc.

führen, welches zugleich die mannigfaltigsten Spezialfälle zulasse, bewog mich auf die allgemeinste Bestimmung der Bewegung eines ebenen Systems zurückzugehen, welche von zwei beliebigen Curven desselben die Umhüllten gibt. Lässt man die beiden Hüllcurven sowohl als die beiden Hüllbahnen jeweilen zusammenfallen, so entsteht ein System, in welchem eine Curve gezwungen ist, stets eine gegebene feste Curve doppelt zu berühren und man erkennt jetzt leicht, dass ein höchst einfacher und symmetrischer Bewegungsvorgang eintritt, wenn Hüllcurve und Hüllbahn als Kegelschnitte gewählt werden. Die Symmetrie der Entwicklungen wird noch erhöht, wenn man in den Raum übergeht und *ein starres System sich so bewegen lässt, dass ein in ihm enthaltener Kegel zweiten Grades stets einen andern ihm concentrischen Kegel zweiten Grades doppelt, d. h. längs zweier Kanten berührt.*

Zur analytischen Darstellung bedient man sich am einfachsten rechtwinkliger Raumcoordinaten, die übrigens nur in ihren Verhältnissen, nicht dem absoluten Werthe nach in Betracht kommen, da die zu untersuchenden Gebilde Kegelflächen mit gemeinschaftlichem Mittelpunkte sind. Werden diese Kegelflächen durch Bewegung eines Strahles erzeugt, so können sie gegeben werden durch Gleichungen von der Form:

$$x^2 = \varphi_1(\mu) \qquad y^2 = \varphi_2(\mu) \qquad z^2 = \varphi_3(\mu)$$

wo φ_1, φ_2, φ_3 rationale Functionen des variabeln Parameters μ sind. Da alle drei mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Nenner multiplizirt werden dürfen, so kann man sie zu ganzen Functionen machen und weiss dann, dass der Grad des zugehörigen Kegels im Allgemeinen gleich dem doppelten Grade der Functionen φ, resp. des höchsten unter ihnen ist.

Wird ein Kegel durch Umhüllung einer Ebene erzeugt, deren Gleichung:

$$\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z = 0$$

ist, wobei β_1, β_2, β_3 in gewissem Sinne als Ebenencoordinaten angesehen werden können, so werden in allen Fällen, die für uns wichtig sind, die Grössen β_1, β_2, β_3 durch Gleichungen von der Form ausgedrückt:

$$\beta^2{}_1 = \psi_1(\mu) \qquad \beta^2{}_2 = \psi_2(\mu) \qquad \beta^2{}_3 = \psi_3(\mu)$$

wo für die ψ die nämlichen Bemerkungen gelten, die oben für die φ gemacht worden sind. Damit ist es in jedem gegebenen Falle möglich, eine obere Grenze für die Klasse des Kegels zu bestimmen.

Bevor ich auf die ausführliche Ableitung der gefundenen Resultate eingehe, will ich noch an den Zusammenhang erinnern, in welchem diese Untersuchung mit einem Apparate steht, den Herr Reuleaux unserer Gesellschaft im Jahre 1864 vorgelegt hat,*) und den er unter dem Namen: „Das Bogenzweieck im Dreieck“ auch in seiner theoretischen Kinematik behandelt. **) Es dient dieser Apparat dazu, zu zeigen, dass trotz der scheinbaren Ueberbestimmung die Bewegung eines starren Systems unter Umständen auch dann noch möglich ist, wenn mehr als zwei, im vorliegenden Falle in jedem Augenblick drei Stützungen vorhanden sind. Man findet in der That einen analogen Sachverhalt bei Spezialisirung unseres Beispiels unter Benutzung des elementaren Satzes: Lässt ein Kegel zweiten Grades ein Tripel zueinander senkrechten Kanten oder Tangentialebenen zu, so existiren deren unendlich viele.

Lässt man in dem starren System, dessen Bewegung durch einen mit ihm verbundenen Kegel zweiten Grades bestimmt ist, der einen festen Kegel des nämlichen Grades fortwährend doppelt berührt, den ersteren sich abplatten,

---

*) Verhandlungen der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft in Zürich 1864, pag. 56.

**) Pag. 120 etc.

bis er zu einem ebenen rechten Winkel wird, während der zweite Tripel rechtwinkliger Kanten zulässt, so hat man ein im Raum um einen festen Punkt drehbares System, von welchem drei Strahlen stets auf dem nämlichen Kegel zweiten Grades bleiben. Analog könnte man den ersten Kegel in ein rechtwinkliges Ebenenpaar zerfallen lassen, während der zweite Tripel senkrechter Tangentialebenen enthielte: es würde dann ein System entstehen, von dem drei Ebenen fortwährend Tangentialebenen eines Kegels zweiter Klasse wären. Damit sind zwei kinematische Apparate definirt: der erstere mag „Dreikant im Kegel", der letztere „Kegel im Dreiflach" heissen.

I,

Wir wählen ein rechtwinkliges Coordinatensystem im Raume so, dass der Kegel A in der Gleichungsform

$$1)\quad \alpha_1 x^2+\alpha_2 y^3+\alpha_3 z^2=0$$

erscheint. Die Grössen α_1, α_2, α_3 sind dann den reziproken Axenquadraten desselben proportional. Irgend ein Kegel C, welcher mit A concentrisch ist und ihn doppelt berührt, erscheint in der Gestalt

$$2)\quad (\beta_1 x+\beta_2 y+\beta_3 z)^2-(\alpha_1 x^2+\alpha_2 y^2+\alpha_3 z^2)=0$$

wo $B=\beta_1 x+\beta_2 y+\beta_3 z=0$ die Gleichung der Berührungsebene ist, d. h. der Ebene, welche die beiden Berührungskanten enthält. Die Axen des Kegels 2) hangen von der in λ cubischen Gleichung

$$3)\quad \frac{\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda}+\frac{\beta_2^2}{\alpha_2+\lambda}+\frac{\beta_3^2}{\alpha_3+\lambda}-1=0$$

ab, bezeichnen wir also mit γ_1, γ_2, γ_3 die reziproken Axenquadrate des Kegels C, so haben wir diesen in einer seiner Lagen, wenn wir festsetzen, dass die Wurzeln

der Gleichung 3) diesen Grössen proportional, also $\mu\gamma_1$, $\mu\gamma_2$, $\mu\gamma_3$ seien, wo μ einen beliebigen Factor bedeutet.

[Ein Kegel zweiten Grades, der einen bestimmten im Endlichen gelegenen Mittelpunkt besitzt, bleibt sich selbst congruent, wenn seine Axen im gleichen Verhältnisse verändert werden.]

Jedem Werthe von μ entpricht eine bestimmte Lage von C, durch Variation dieses Parameters kann man also die Bewegung des kinematischen Systems ausdrücken. Es geschieht dies im Einzelnen wie folgt.

II.

Setzt man in der Gleichung

$$\frac{\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda}+\frac{\beta_2^2}{\alpha_2+\lambda}+\frac{\beta_3^2}{\alpha_2+\lambda}-1=0$$

für λ successive $\mu\gamma_1$, $\mu\gamma_2$, $\mu\gamma_3$, so erhält man drei lineare Gleichungen für β_1^2, β_2^2, β_3^2 deren Auflösung ergibt:*)

$$4)\quad \begin{cases} \beta_1^2=\dfrac{(\alpha_1+\mu\gamma_1)(\alpha_1+\mu\gamma_2)(\alpha_1+\mu\gamma_3)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)} \\ \beta_2^2=\dfrac{(\alpha_2+\mu\gamma_1)(\alpha_2+\mu\gamma_2)(\alpha_2+\mu\gamma_3)}{(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_1)} \\ \beta_3^2=\dfrac{(\alpha_3+\mu\gamma_1)(\alpha_3+\mu\gamma_2)(\alpha_3+\mu\gamma_3)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)} \end{cases}$$

Jedem Werthe von μ entspricht ein Werthsystem der β_1, β_2, β_3 und diesem eine Lage der Berührungsebene B. Alle diese Berührungsebenen umhüllen einen Kegel, der mit A und C concentrisch ist. Nennt man β_1, β_2, β_3 die Ebenencoordinaten von B, so erhält man eine Gleichung zwischen denselben, indem man μ aus der Gleichung 3) eliminirt. Das Resultat ist eine homogene Gleichung

*) Vergl. „Hesse, Analyt. Geom. des Raumes". Erste Aufl. pag. 253 überhaupt den ersten Theil der 22. Vorlesung.

3ten Grades zwischen β_1^2, β_2^2, β_3^2, d. h. *die sämmtlichen Berührungsebenen umhüllen einen Kegel sechster Klasse,* Da diejenigen Werthe von μ, für welche eines der β verschwindet, sich unmittelbar ergeben, so kann man sofort diejenigen Tangentialebenen des Kegels finden, welche durch eine der Coordinatenaxen hindurchgehen. Um weitere Elemente dieses Kegels zu finden, kann man diejenigen Lagen von C berechnen, in denen B eine Tangentialebene von A ist. In diesen Fällen (eine Gleichung dritten Grades muss zu ihrer Herstellung aufgelöst werden) berühren sich A und B vierkantig.

III.

Die Axenrichtungen für die einem bestimmten μ zugehörige Lage von C ergibt sich aus Formeln, welche der citirten Hesse'schen Vorlesung entnommen sind. Führt man die Grössen

$$\begin{cases} B_1^2 = \dfrac{(\alpha_1+\mu\gamma_1)(\alpha_2+\mu\gamma_1)(\alpha_3+\mu\gamma_1)}{\mu^2(\gamma^1-\gamma_2)(\gamma_1-\gamma_3)} \\ B_2^2 = \dfrac{(\alpha_1+\mu\gamma_2)(\alpha_2+\mu\gamma_2)(\alpha_3+\mu\gamma_2)}{\mu^2(\gamma_2-\gamma_3)(\gamma_2-\gamma_1)} \\ B_3^2 = \dfrac{(\alpha_1+\mu\gamma_3)(\alpha_2+\mu\gamma_3)(\alpha_3+\mu\gamma_3)}{\mu^2(\gamma_3-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_2)} \end{cases}$$

ein, so lässt sich die orth. Substitution, welche den Ausdruck

$$(\beta_1 x+\beta_2 y+\beta_3 z)^2-(\alpha_1 x^2+\alpha_2 y^2+\alpha_3 z^2)$$

in

$$\mu(\gamma_1 X^2+\gamma_2 Y^2+\gamma_3 Z^2)$$

überführt, darstellen durch

$$\begin{array}{l|l} x=aX+a'Y+a''Z & X=ax+by+cz \\ y=bX+b'Y+b''Z & Y=a'x+b'y+c'z \\ z=cX+c'Y+c''Z & Z=a''x+b''y+c''z \end{array}$$

wobei

$$\left.\begin{array}{lll} a=\dfrac{\beta_1 B_1}{\alpha_1+\mu\gamma_1} & b=\dfrac{\beta_2 B_1}{\alpha_2+\mu\gamma_1} & c=\dfrac{\beta_3 B_1}{\alpha_3+\mu\gamma_1} \\ a'=\dfrac{\beta_1 B_2}{\alpha_1+\mu\gamma_2} & b'=\dfrac{\beta_2 B_2}{\alpha_2+\mu\gamma_2} & c'=\dfrac{\beta_3 B_2}{\alpha_3+\mu\gamma_2} \\ a''=\dfrac{\beta_1 B_3}{\alpha_1+\mu\gamma_3} & b''=\dfrac{\beta_2 B_3}{\alpha_2+\mu\gamma_3} & c''=\dfrac{\beta_3 B_3}{\alpha_3+\mu\gamma_3} \end{array}\right\} 5)$$

Bezeichnen wir also mit ξ_1, η_1, ζ_1 die Coordinaten eines Punktes der Axe des Kegels C, welche dem γ_1 entspricht, so hat man

$$\xi_1 : \eta_1 : \zeta_1 = a : b : c$$

man darf also setzen, da

$$\left.\begin{array}{l} a^2=\dfrac{1}{\mu^2}\ \dfrac{(\alpha_1+\mu\gamma_2)(\alpha_1+\mu\gamma_3)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}\cdot\dfrac{(\alpha_2+\mu\gamma_1)(\alpha_3+\mu\gamma_1)}{(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_1-\gamma_3)} \\ b^2=\dfrac{1}{\mu^2}\ \dfrac{(\alpha_2+\mu\gamma_2)(\alpha_2+\mu\gamma_3)}{(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_1)}\cdot\dfrac{(\alpha_3+\mu\gamma_1)(\alpha_1+\mu\gamma_1)}{(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_1-\gamma_3)} \\ c^2=\dfrac{1}{\mu^2}\ \dfrac{(\alpha_3+\mu\gamma_2)(\alpha_3+\mu\gamma_3)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)}\cdot\dfrac{(\alpha_1+\mu\gamma_1)(\alpha_2+\mu\gamma_1)}{(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_1-\gamma_3)} \end{array}\right\} 6)$$

ist,

$$\left.\begin{array}{l} \xi_1^2=(\alpha_2-\alpha_3)\ (\alpha_1+\mu\gamma_2)(\alpha_1+\mu\gamma_3)(\alpha_2+\mu\gamma_1)(\alpha_3+\mu\gamma_1) \\ \eta_1^2=(\alpha_3-\alpha_1)\ (\alpha_2+\mu\gamma_2)(\alpha_2+\mu\gamma_3)(\alpha_3+\mu\gamma_1)(\alpha_1+\mu\gamma_1) \\ \zeta_1^2=(\alpha_1-\alpha_2)\ (\alpha_3+\mu\gamma_2)(\alpha_3+\mu\gamma_3)(\alpha_1+\mu\gamma_1)(\alpha_2+\mu\gamma_1) \end{array}\right\} 7)$$

Durch Elimination von μ folgt hieraus eine homogene Gleichung vierten Grades zwischen ξ_1^2, η_1^2, ζ_1^2, d. h. *die Axe des Kegels C, welche dem Werthe γ_1 entspricht, beschreibt einen Kegel achten Grades.* Das nämliche lässt sich für die beiden andern Axen zeigen. — Wenn man auf sämmtliche Kanten eines Kegels im Mittelpunkt senkrechte Ebenen legt, so erhält man als Umhüllung derselben den Polarkegel (die Polarität bezieht sich auf den unendlich entfernten imag. Kreis des Raumes), dessen Klasse mit dem Grad des ursprünglichen übereinstimmt; *jede Hauptebene des Kegels C umhüllt also einen Kegel achter Klasse, welcher der Polarkegel des von ihrer Normalaxe durchlaufenen Kegels ist.*

IV.

Jede Lage von C kann in die unendlich benachbarte durch Drehung um die Momentanaxe übergeführt werden. Diese ist der Durchschnitt der Normalebenen an den Kegel C (oder A) in den beiden Berührungskanten. Da $\beta_1 x+\beta_2 y+\beta_3 z=0$ durch die beiden Berührungskanten hindurchgeht, so schneiden sich die Normalebenen derselben in einer Geraden durch den Coordinaten-Anfangspunkt, von der ein Punkt durch die Coordinaten x, y, z gegeben ist, wenn

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{\beta_1(\alpha_2\beta_3{}^2+\alpha_3\beta_2{}^2)}{\alpha_2-\alpha_3}\\ y&=\frac{\beta_2(\alpha_3\beta_1{}^2+\alpha_1\beta_3{}^2)}{\alpha_3-\alpha_1}\\ z&=\frac{\beta_3(\alpha_1\beta_2{}^2+\alpha_2\beta_1{}^2)}{\alpha_1-\alpha_2}\end{aligned}\right\}\ 8)$$

gesetzt wird. x^2, y^2, z^2 werden unter Benutzung der Gleichungen 4) ganze Functionen 9. Grades in μ, die Elimination von μ ergibt also den Satz: *Der Kegel, welcher von der momentanen Drehungsaxe durchlaufen wird, ist vom 18ten Grade.* Wie bekannt, lässt sich die Bewegung unseres Systems durch Rollen eines gewissen Kegels auf dem eben gefundenen herstellen. Nach dem Satze von der Umkehrung der Bewegung hat man in der Gleichung dieses Letztern blos α_1, α_2, α_3 mit γ_1, γ_2, γ_3 zu vertauschen um sofort den noch unbekannten zu erhalten, freilich in der möglichst einfachen Verschiebung zu unserm Coordinaten-System, also nicht etwa in einer der Lagen, die er bei der vorgeschriebenen Bewegung annehmen kann.

V.

Aus der grossen Masse von möglichen Specialfällen hebe ich einige heraus. Wenn der Kegel C in ein Ebenen-

paar zerfällt, welches den Winkel φ einschliesst, so kann man setzen $\gamma_1=0$, während zwischen γ_2 und γ_3 die Relation besteht: $\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{-4\gamma_2\gamma_3}{(\gamma_2+\gamma_3)^2}$. Jetzt vereinfacht sich das System der früher gefundenen Formeln. Da aus dem β^2 jeweilen der erste Factor das μ verliert, so führt die Elimination von μ auf eine Gleichung 2ten Grades zwischen β_1^2, β_2^2, β_3^2, d. h.: *die sämmtlichen Berührungsebenen B umhüllen einen Kegel vierter Klasse.* Im Fernern verschwindet in den Gleichungen 7) das μ jeweilen aus den beiden letzten Factoren, demzufolge *durchläuft die Schnittgerade des Ebenenpaares einen Kegel vierten Grades.* (Er ist die Polarfigur des vorigen Kegels in Bezug auf A). Um die Kegel, welche von den Axen γ_1 und γ_2 durchlaufen werden, zu finden, hat man in 7) von $\gamma_1 \cdot \gamma_2, \gamma_3$ zu den cyclischen Vertauschungen $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_1$; $\gamma_3, \gamma_1, \gamma_2$ fortzuschreiten und nachher die Specialwerthe einzuführen. Da hiebei jeweilen ein Factor rechts von μ befreit wird, so sieht man, dass *die beiden andern Axen Kegel vom 6ten Grad durchlaufen.* Aus den Gleichungen 8) findet man, da β_1^2, β_2^2, β_3^2 nur vom zweiten Grade in μ sind, dass *der Kegel der Momentancentra vom 12ten Grade ist.* Der auf ihm rollende Kegel wird durch Umkehrung der Bewegung gefunden.

Bei dieser Umkehrung der Bewegung hat man die α und γ zu vertauschen, so dass also $\alpha_1=0$ wird, während α_2 und α_3 der Gleichung $\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{-4\alpha_2\alpha_3}{(\alpha_2+\alpha_3)^2}$ genügen, hingegen sind jetzt die γ an keine Bedingungsgleichungen gebunden. Dies bewirkt, dass zwar Vereinfachungen an den Ausdrücken des allgemeinen Falles eintreten, aber Gradreductionen, wie im vorigen Falle dies vorkam, im Allgemeinen sich nicht ergeben, so weit ich die Rechnung durchgeführt habe. Immerhin führt die Elimination von

μ aus den Gleichungen 7) aus leicht ersichtlichem Grunde *für die von den Axen γ des irreductiblen Kegels durchlaufenen Kegel auf den sechsten Grad.*

Auch die Gleichungen 8) geben eine Gradreduction, weil für $\alpha_1=0$ aus x, y, z der Factor β_1 abgesondert werden kann, d. h. *der betreffende Kegel ist vom zwölften Grade.*

VI.

Noch wirksamer wird die Reduction, wenn wir das Ebenenpaar rechtwinklig annehmen, also setzen: $\gamma_1=0$, $\gamma_2=+1$, $\gamma_3=-1$. Es werden die β_1^2, β_2^2, β_3^2 lineare Functionen μ^2 in und die Elimination dieser Grössen gibt

$$9)\quad \frac{\alpha_2+\alpha_3}{\alpha_1}\beta_1^2+\frac{\alpha_3+\alpha_1}{\alpha_2}\beta_2^2+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_3}\beta_3^2=0$$

d. h. *der von den Berührungsebenen B umhüllte Kegel ist zweiter Klasse.* Analog verhält es sich mit der Gleichung 7), die *als Ort der Schnittlinie des Ebenenpaares den Kegel zweiten Grades*

$$10)\quad \alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)x^2+\alpha_2(\alpha_3+\alpha_1)y^2+\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2)z^2=0$$

ergibt. (Die Kegel 9) und 10) sind natürlich wieder Polarfiguren in Bezug auf A.) Was die *beiden andern Axen des Ebenenpaares* anbetrifft, so geben die permutirten Gleichungen 7) *für die von ihnen durchlaufenen Kegel den sechsten Grad. Für den Kegel der Momentancentra erhält man ebenfalls den sechsten Grad,* wie die Gleichungen 8) zeigen, deren quadrirte rechte Seiten ganze Functionen des dritten Grades in μ^2 sind. Bei der Umkehrung sind A und C zu vertauschen, es ist $\alpha_1=0$, $\alpha_2=+1$, $\alpha_3=-1$ zu setzen, während die γ willkührlich bleiben. Die Berührungsebenen umhüllen einen Kegel sechster Klasse. *Die Axen beschreiben Kegel sechsten Grades,*

während die momentane Drehungsaxe einen Kegel zwölften Grades durchläuft.

Ein interessanter Bewegungsvorgang tritt ein, wenn das rechtwinklige Ebenenpaar an einem gleichzeitig hyperbolischen Kegel zweiter Art hingleitet, d. h. wenn $\gamma_1=0$, $\gamma_2=+1$, $\gamma_3=-1$ und $\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}=0$ ist. Wenn dann das Ebenenpaar zu einem rechtwinkligen Dreiflach ergänzt wird, so berühren während der ganzen Bewegung alle drei Ebenen desselben den Kegel C. Damit haben wir *die analytische Grundlage für die Theorie des Kegels im Dreiflach.*

VII.

Eine weitere Serie von Spezialfällen ergibt sich, wenn man den Kegel C sich unendlich abplatten und in einen ebenen Winkel übergehen lässt. Dies geschieht, wenn $\gamma_1=\varepsilon\lambda_0$, $\gamma_2=\varepsilon$, $\gamma_4=\lambda_0$ gesetzt wird, wo ε eine unendlich kleine Grösse bedeutet. Man hat dann einen Winkel φ, der durch $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{-\lambda_0}$ bestimmt ist. Würde man μ einen endlichen Werth beilegen, so bekäme man als Umhüllungskegel der Berührungsebenen B

$$\frac{\beta_1^2}{\alpha_1^2}+\frac{\beta_2^2}{\alpha_2^2}+\frac{\beta_3^2}{\alpha_3^2}=0$$

was auf einen imaginären Theil des Eliminationsresultates führt. Man hat also $\varepsilon\mu$ gleich einer endlichen Grösse zu setzen und dann die Verhältnisse der β unter Weglassung eines unendlichen Factors zu bilden; dies führt auf einen *Kegel vierter Klasse,* wie es sein muss, wenn man bedenkt, dass dieser Fall nach dem unendlich entfernten imaginären Kreis des Raumes polar ist zu dem im Anfang von V. behandelten.

Man kann also die früher gefundenen Resultate nach den Principien der Reciprocität unmittelbar übertragen aber dazu noch neue finden. Die γ_1 und γ_2 entsprechenden Axen beschreiben Kegel sechsten Grades, derjenigen der γ_3 entspricht ein Kegel vierten Grades: der Polarkegel des vorhin gefundenen vierter Klasse, der übrigens direct aus den Gleichungen 7) abzuleiten ist. *Eine weitere Spezialisirung gibt das Dreikant im Kegel.*

VIII.

Das Dreikant im Kegel kann auch direct in folgender Art angegriffen werden: Soll ein Kegel zweiten Grades sich so bewegen, dass er stets die drei Axen eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems enthält, so wird seine Gleichung in der Form

$$\alpha_1 yz + \alpha_2 zx + \alpha_3 xy = 0$$

erscheinen, wobei die Coefficienten α_1, α_2, α_3, sowie die Axen γ_1, γ_2, γ_3 den Gleichungen genügen:

$$11)\left\{\begin{array}{c}\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=0\\ \mu^2(\gamma_2\gamma_3+\gamma_2\gamma_1+\gamma_1\gamma_2)=-(\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2+\alpha_3{}^2)\\ \mu^3\gamma_1\gamma_2\gamma_3=2\alpha_1\alpha_2\alpha_3\end{array}\right.$$

Die Normalebenen des Kegels, welche die Coordinatenaxen enthalten, schneiden sich in einer Geraden, für welche

$$12)\quad x:y:z=\frac{1}{\alpha_1}:\frac{1}{\alpha_2}:\frac{1}{\alpha_3}$$

Der Kegel der Momentancentra im festen Raume wird also gefunden, wenn man aus der zweiten und dritten der Gleichungen 11) den Parameter μ eliminirt und nachher vermittelst 12) x, y, z an die Stelle der α einführt; das Schlussresultat ist eine Gleichung vom 12. Grade, wie es sein muss.

Um die von den Axen des Kegels zweiten Grades durchlaufenen Figuren zu finden, beachte man dass α_1, α_2, α_3 die Wurzeln einer cubischen Gleichung sind, welche ausser der Unbekannten noch einen willkührlichen Parameter enthält — es führen dann die Transformations-Formeln der Hesse'schen 20. Vorlesung zum Ziele.