Zeitschrift: Bollettino della Società ticinese di scienze naturali

Herausgeber: Società ticinese di scienze naturali

Band: 87 (1999)

Artikel: Mappe discrete e numeri naturali : alcune considerazioni sul problema del 3n + 1

Autor: Sala, Nicoletta / Merlini, Danilo

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1003283

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Mappe discrete e numeri naturali: alcune considerazioni sul problema del 3n+1

Nicoletta Sala[1,2] e Danilo Merlini[1]

[1] CERFIM Centro di Ricerca in Fisica e Matematica, Via F. Rusca, CH-6600 Locarno

[2] Accademia di Architettura di Mendrisio, Largo Bernasconi, CH-6850 Mendriso, Università della Svizzera italiana

Riassunto: Lo scopo di questo articolo è di presentare alcuni aspetti di una nostra ricerca orientata allo studio di una congettura ancora aperta che prende il nome di «problema del 3n+1».
L'approccio che abbiamo seguito, in alternativa ai tradizionali metodi matematici, è stato quello di ricercare un nuovo modello di analisi statistica del problema, confrontando poi alcuni dei nostri risultati con ricerche svolte in questo campo da altri studiosi (LAGARIAS & WEISS, 1992; BELAGA & MIGNOTTE, 1998).

Abstract: The aim of this paper is to present some interesting aspects of the «3n+1 problem».
In our rechearche we have divided the 3n+1 problem in three parts:
1) the growth of the chalice;
2) the Fibonacci's attractor;
3) the long orbits.
We have found a new mathematical model to study and to simplify this problem, a numerical sequence that is in excellent agreement with our theoretical values, obtained by means of a Fibonacci's attractor and some simple models to analyse the data using C++ programs on personal computer (IBM compatible).

INTRODUZIONE

All'inizio di questo secolo, verso il 1928, Lothar Collatz, interessato a problemi di tipo iterativo, inventò un problema che chiamò «il problema del 3n+1».

Lo pubblicizzò in diverse conferenze. Attualmente questo problema è anche noto come «algoritmo di Hasse», oppure problema di «Syracuse» di Ulam e di Kukutani.

Il problema del 3n+1 riguarda lo studio delle iterate (orbite) di un numero intero $n \geq 1$, nel processo iterativo generato dalla funzione $T: N^* \rightarrow N^*$ (dove N^* è l'insieme degli interi positivi) definita da:

$$T(n) = \begin{cases} f(n) = n/2 \text{ se } n \text{ è pari} \\ f(n) = 3n+1 \text{ se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Esempio
Se consideriamo n= 6 come numero di partenza, si genera la sequenza numerica:
6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

La congettura del 3n+1 asserisce che ogni intero n ha un'orbita finita di lunghezza l=l(n) e che questa termina nel ciclo di ordine 3, contenente l'unità e dato da (4, 2, 1, 4 , 2, 1...).

Dal punto di vista computazionale, questa congettura è stata verificata per numeri dell'ordine di $n_0 \approx 2\ 10^{12}$ ed un modo efficiente di calcolo delle orbite è apparso con l'uso del S/W di computer algebra Maple V. (BELTRAMINELLI, MERLINI & RUSCONI, 1995)

Finora è stato dimostrato che tutti i numeri fino a 2^{40} cadono in questo ciclo attrattore.

Dato un numero n prende il nome di *lunghezza del ciclo di n*, o *lunghezza delle orbite* oppure *lunghezza delle traiettorie*, l'ammontare dei numeri generati dall'algoritmo del 3n+1 (escluso il numero di partenza).

Ad esempio la lunghezza del ciclo del numero 6 è 8.

Abbiamo organizzato il nostro studio del problema del n+1 in tre fasi ben distinte:
1) la crescita del calice (una nostra rappresentazione del problema della crescita dei numeri);
2) l'attrattore di Fibonacci;
3) le orbite lunghe.

La crescita del calice

Per una conreta descrizione dei nostri risultati è bene considerare lo studio del processo moltiplicativo che è connesso con la crescita dei numeri illustrata in figura 1 (che noi abbiamo raffigurato simile a un calice) (BELTRAMINELLI, MERLINI & RUSCONI, 1995).

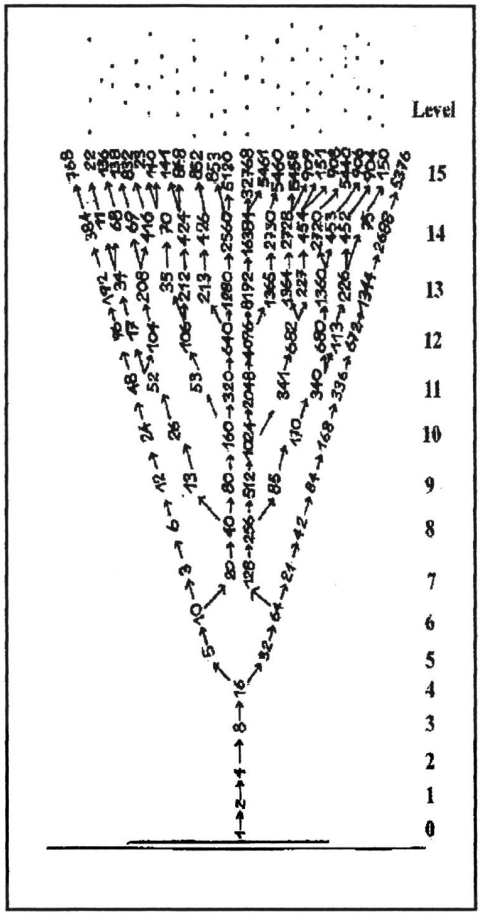

Fig. 1 - Il calice di altezza 15

Questa caratteristica connette la popolazione dei numeri che appare nel processo (orbite inverse) al livello k e al successivo k+1, specialmente per grandi valori di k (comportamento asintotico).

Emerge che il rapporto fra due popolazioni successive è asintoticamente dato da un numero irrazionale dell'ordine dell'unità. Tale numero, da noi chiamato *costante di Collatz*, in onore del matematico che per primo affrontò il problema del 3n+1, è definito dal rapporto (asintotico per grandi valori di k):

$$c = \frac{n_{k+1}}{n_k}$$

dove n_k è il numero (cardinalità) dei numeri che si sono formati alla k-esima iterazione inversa a partire dal numero 1.

Per determinare una prima stima numerica della costante di Collatz si consideri la prossima tabella che fornisce i valori dei seguenti parametri:

$\mathbf{n_k}$: quanti numeri si sono formati alla k-esima iterazione inversa (livello k a partire dal livello 0 dove si trova l'unità)

$\mathbf{N_k}$: il totale di tutti i numeri che si sono formati nelle prime k iterazioni inverse, compresa l'unità:

$$N_k = \sum_{p=0}^{k} n_p$$

$\mathbf{n_{k,p}}$ i numeri pari al k-esimo livello
$\mathbf{n_{k,d}}$ i numeri dispari al k-esimo livello
$\mathbf{N_{k,p}}$ totale dei pari
$\mathbf{N_{k,d}}$ totale dei dispari
$\mathbf{N_{k,3}}$ totale dei multipli di 3 fino al livello k

k	n_k	N_k	$n_{k,p}$	$n_{k,d}$	$N_{k,p}$	$N_{k,d}$	$N_{k,3}$
0	1	1	0	1	0	1	0
1	1	2	1	0	1	1	0
2	1	3	1	0	2	1	0
3	1	4	1	0	3	1	0
4	1	5	1	0	4	1	0
5	2	7	1	1	5	2	0
6	2	9	2	0	7	2	0
7	4	13	2	2	9	4	2
8	4	17	4	0	13	4	4
9	6	23	4	2	17	6	6
10	6	29	6	0	23	6	8
11	8	37	6	2	29	8	10
12	10	47	8	2	37	10	12
13	14	61	10	4	47	14	16
14	18	79	14	4	61	18	23
15	24	103	18	6	79	24	32
16	29	132	24	5	103	29	42
17	36	168	29	7	132	36	54
18	44	212	36	8	168	44	69
19	58	270	44	14	212	58	89
20	72	342	58	14	270	72	114
21	91	433	72	19	342	91	146
22	113	546	91	22	433	113	185
23	143	689	113	30	546	143	231
24	179	868	143	36	689	179	288
25	227	1095	179	48	868	227	364
26	287	1382	227	60	1095	287	459
27	366	1748	287	79	1382	366	584
28	460	2208	366	94	1748	460	732
29	578	2786	460	118	2208	578	928
30	732	3518	578	154	2786	732	1168
31	926	4444	732	194	3518	926	1469
32	1174	5618	926	248	4444	1174	1868

Tab. 1

Dalla definizione del processo si ha:

$$n_k = n_{k,p} + n_{k,d}$$

dove:

$$n_{k,p} = n_{k-1}$$

quindi:

$$n_{k,p} = n_{k-1}$$
$$n_{k,d} = n_k - n_{k-1}$$

Si deduce che:

$$N_{k,p} = \sum_{p=1}^{k} n_{p,p} = \sum_{p=1}^{k} n_{p-1} = N_{k-1}$$

$$N_{k,d} = n_k$$

$$N_k = \sum_{p=0}^{k} n_p = N_{k,p} + N_{k,d} = N_{k-1} + n_k$$

Osservando la tabella dei calcoli numerici per le orbite in-

verse di lunghezza massima calcolata k=32, appare chiaro che si è in presenza di un processo moltiplicativo del tipo:

$$n_k = c_k \cdot n_{k-1} \qquad k \geq 1 \qquad (1)$$

Nel limite asintotico di interesse, ossia per $k \to \infty$, ci si aspetta che:

$$n_k = \cdot\, n_0\, c^k \qquad (2)$$

dove:

$$\lim_{k \to \infty} c_k = c$$

Usando la (1) si ha:

$$c_k = \frac{n_k}{n_{k-1}}$$

Con gli ultimi dieci risultati numerici si ottiene la prima stima per c_k (che rappresenta la costante di Collatz calcolata in relazione ai livelli da k= 23 fino a k=32):

$$< c_k > = \frac{1}{10} \sum_{p=23}^{32} \frac{n_p}{n_{p-1}} = 1.263760413 \qquad (4)$$

Usando sempre la (2) e la (4) si ha:

$$n_k = n_{23} \cdot c_{24} \cdot \ldots \cdot c_k$$

Per determinare il valore analitico (o esatto) della costante di Collatz si assume l'ipotesi di uniformità, ossia che un pari x su 3 al livello k, biforca per dare un dispari $\frac{x-1}{3}$, si ha allora che:

$$n_{k+1,d} = \frac{n_{k,p}}{3}$$

$$n_{k+1} - n_k = \frac{n_{k-1}}{3}$$

ne segue:

$$c^2 \cdot n_{k-1} - c \cdot n_{k-1} = \frac{1}{3} n_{k-1}$$

$$c^2 - c - \frac{1}{3} = 0$$

$$c = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{7}{3}}}{2} = 1.2633762616$$

Si utilizza la soluzione positiva e tale valore di c coincide al millesimo con il valore numerico espresso dalla (4).

L'attrattore di Fibonacci

Nelle nostre ricerche abbiamo trovato una sequenza stocastica (attrattore) di tipo Fibonacci che governa la crescita della popolazione dei numeri nei vari livelli.
Abbiamo verificato che l'attrattore è del tipo:

$$n_{k+1} = n_k + p_{k-1} \cdot n_{k-1} \qquad (7)$$

dove p_{k-1}=f(k-1) deve essere della forma $p+c_{k-1}$, con c_{k-1} piccola ($c_{k-1} = n_{k-1}/n_{k-2}$) e.

$$p = \frac{1}{3}.$$

Abbiamo applicato questa sequenza stocastica e verificato la bontà di questo modello descrittivo al crescere del valore k (che identifica il livello). I risultati ottenuti sono raccolti nella tabella 2.

k	n_k (esatto)	n_k (Fibonacci eq.)
0	1	0.654
1	1	0.827
2	1	1.045
3	1	1.321
4	1	1.669
5	2	2.110
6	2	2.666
7	4	3.370
8	4	4.259
9	6	5.382
10	6	6.802
11	8	8.596
12	10	10.864
13	14	13.729
14	18	17.351
15	24	21.927
16	29	27.711
17	36	35.020
18	44	44.257
19	58	55.931
20	72	70.684
21	91	89.327
22	113	112.889
23	143	142.665
24	179	180.295
25	227	227.850
26	287	287.948
27	366	363.898
28	460	459.881
29	578	581.180
30	732	734.474
31	924	928.201
32	1174	1173.026

Tab. 2

Le lunghe orbite

Nello studio del problema del 3n+1 abbiamo cercato un approccio che ci consentisse di verificare le nostre congetture senza coinvolgere numeri molto grandi (problema esistente poiché abbiamo usato per i calcoli degli algoritmi eseguibili con personal computer dotati di processori del tipo Pentium II). La nostra idea è stata quella di analizzare delle orbite inverse medio lunghe (da 150 a 260) generate però solo dai multipli dispari del numero 3; questo ha ampiamente ristretto la nostra analisi numerica.

Abbiamo inoltre dimostrato che nelle orbite inversa di un numero n, con $n \in N^*$, al massimo dopo sette iterazioni, appare un multiplo di 3 che è dispari (MERLINI, SALA & SALA, 1995).

Questo significa che la congettura del 3n+1 è vera se è vera per tutti i numeri dispari multipli di 3 (MERLINI, SALA & SALA, 1996b; MERLINI & SALA, 1996).

La prossima tabella 3 contiene i numeri di Lagarias-Weiss dove n_1 è il numero di partenza, n è il numero di di-

spari trovati nel processo iterativo e l è la lunghezza delle orbite che il numero di partenza ha generato.

n_1	n (dispari)	$n \cdot \alpha$ (pari)	$l = n + n \cdot \alpha = n(1+\alpha)$
27	41	70	111
703	62	108	170
6171	96	165	261
52527	125	214	339
837799	195	329	524
8400511	256	429	685
63728127	357	592	949
127456254	357	593	950
4890328815	425	706	1131
13371194527	455	755	1210

La lunghezza totale delle orbite è calcolata come il prodotto del numero dei dispari per il fattore $(1 + \alpha_0)$ (LAGARIAS & WEISS, 1992).

Una nostra prima stima di α_0 ha permesso di stabilirne il valore a = 1.66419629.

Un altro interessante confronto tra il modello da noi proposto e quello di Lagarias è stato nel comparare la probabilità p che rappresenta la probabilità di trovare un dispari in un orbita.

Il valore teorico fornito da Lagarias e Weiss è:

$$p = \frac{n}{l} \approx \frac{1}{1+\alpha_0} = 0.37534771\ 88$$

Con il nostro modello, che usava i multipli dispari di 3, abbiamo selezionanto le traiettorie medio – lunghe (da 150 a 260) calcolate dal computer tramite dei programma in C++.

L'elenco dei risultati ci è servito per impostare sul foglio elettronico i calcoli necessari per l'interpolazione dei punti trovati, usando il metodo dei minimi quadrati.

L'ordinata all'origine della retta interpolante ci ha fornito il comportamento asintotico del nostro modello (infatti sull'ascissa del nostro diagramma vi erano i reciproci dei numeri dispari trovati sulle varie orbite) (MERLINI & SALA, 1998).

Poiché il sistema studiato ha un comportamento instabile, abbiamo trovato due bande che stabiliscono i limiti di oscillazione della nostra probabilità.

I valori numeri trovati sono:

p_1=0,375948419

p_2=0,380498607

La loro media è:

$$p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) = 0.37822351\ 3.$$

CONCLUSIONI

Nel problema del 3n+1 qui studiato, dove il processo è definito da T(x)=x/2 se x è pari e T(x)=3x+1 se x è dispari, la costante di Collatz è il numero irrazionale dato da:

$$\varepsilon_c = \frac{1+\sqrt{\frac{7}{3}}}{2}$$

Osservando la Tabella 1 si scopre che: $\frac{n_{k+1,d}}{n_{k,p}} \approx \frac{1}{3}$, inoltre la cumulata dei multipli di 3 ($N_{k,3}$) è un terzo di quella di tutti i numeri N_k, formatisi sino al livello k.

Occorre notare che il valore della costante c derivato dai nostri lavori non è in contraddizione con un altro valore (razionale) $c = \frac{4}{3}$ che appare in lavori precedenti e che è ottenuta per altre vie. Infatti in tali lavori il processo è dato da:

$$\begin{cases} T(x) = \frac{x}{2} & \text{se x è pari} \\ T(x) = \frac{3x+1}{2} & \text{se x è dispari} \end{cases}$$

con la differenza del fattore 2 a denominatore nella seconda equazione.

La struttura delle orbite inverse è differente nei due casi e senza legame diretto evidente; nelle precedenti formulazioni la costante è razionale, contrariamente a ciò che in questo ambito è stato rilevato, ossia che la costante è irrazionale.

I nostri risultati sono stati ottenuti usando alcuni modelli elementari (usando ad esempio i multipli dispari del numero 3) invece che architetture di calcolo parallele e di algoritmi complessi (BELAGA & MIGNOTTE, 1998).

Noi abbiamo calcolato una probabilità media di trovare un numero dispari in un'orbita di lunghezza n di 0.378223513 che, con un'accuratezza di $3 \cdot 10^{-4}$, si avvicina a quella determinata da Lagarias-Weiss che è fornita dal valore 0.3785306325.

Ciò conferma la nostra strategia ossia che è possibile studiare il problema del 3n+1 usando semplici modelli stocastici e scegliendo in modo appropriato le variabili sotto analisi.

BIBLIOGRAFIA

BELAGA E. G., MIGNOTTE M., 1998 - Embedding the 3x+1 Conjecture in a 3x+d Context - In: Experimental Mathematics, Vol. 7, n. 2, pp. 145 – 151.

BELTRAMINELLI S., MERLINI D., RUSCONI L., 1995 - Orbite inverse nel problema del 3n+1 - In: Note di Matematica e Fisica, Atti del Colloquio,anno 7, Ed. Cerfim Locarno, vol.7, Locarno, Switzerland, pp. 325 - 352.

FEIX M. R., MURIEL A., MERLINI D., TARTINI R., 1995 - The (3x+1)/2 Problem: A Statistical Approch - In: Proc. 3rd International Conf. on Stochastic Processes, Physics and Geometry II, Edts. S. Albeverio et al, World Scientific, Singapore, pp. 289 - 300.

LAGARIAS J.C., 1991 - 3x+1 Problem - In: Annotated Bibliography.

LAGARIAS J. C., WEISS A., 1992 - The 3x+1 Problem: Two Stochastic Models - In: Annals of Applied Probability, 2, pp. 229 – 261.

MERLINI D., SALA M., SALA N., 1996a - Il problema del 3n+1 e la costante di Collatz - In: Atti del convegno nazionale Mathesis: Cento anni di matematica, Fratelli Palombi Editore, Roma, pp. 331 – 336.

MERLINI D., SALA M., SALA N., 1996b - On the Stopping Constant in the 3n+1 Problem - Preprint Cerfim 24/96, Locarno.

MERLINI D., SALA N., 1996 - Limite superiore della lunghezza delle orbite nel problema del 3n+1 - In: Atti convegno nazionale Mathesis I fondamenti della Matematica per la sua didattica nei loro legami con la società contemporanea, Verona, Italy, pp. 291 - 300.

MERLINI D., SALA N., 1999 - On the Fibonacci's Attractor and the Long Orbits in the 3n+1 Problem - Apparirà su International Journal of Chaos Theory and Applications.