

**Zeitschrift:** Bollettino della Società ticinese di scienze naturali  
**Herausgeber:** Società ticinese di scienze naturali  
**Band:** 86 (1998)  
**Heft:** 2

**Artikel:** La geometria "indivisibilibus continuorum" di Bonaventura Cavalieri e la determinazione dei volumi in biologia cellulare e morfologia clinica  
**Autor:** Losa, Gabriele A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1003278>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.05.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

# La geometria «indivisibilibus continuorum» di Bonaventura Cavalieri e la determinazione dei volumi in biologia cellulare e morfologia clinica

Gabriele A. Losa\*

Facoltà di Scienze, Università di Losanna, Losanna, Switzerland  
Centro di Ricerche in Fisica e Matematica, Locarno, Switzerland  
e-mail: glosa@guest.cscs.ch

---

**Riassunto:** La *Geometria degli Indivisibili* di Bonaventura Cavalieri assume un significato incommensurabile per la geometria e la matematica moderne. Inoltre i fondamenti teorici qualificano la metodologia a cui si ispira e che viene applicata per la misura quantitativa di forme ed ultrastrutture nel campo della biologia cellulare, della morfometria biologica e della biomatematica. Il principio di Cavalieri ha trovato significativa illustrazione anche nell'ambito dell'analisi d'immagine per la diagnosi clinica poiché, qualora implementato in procedimenti analitici non invasivi, consente di ottenere misurazioni oggettive a partire da immagini seriali radiografiche o mediante risonanza magnetica, selezionate in modo non preferenziale (unbiased) e pertanto rappresentative dei processi volumetrici e spaziali che connotano organi e tessuti umani.

**Summary:** The *Principle of Indivisibles* of Bonaventura Cavalieri is of paramount relevance for modern geometrical and mathematical sciences. It has also provided the rationale to support the methodology recently developed for biology, biostatistics and clinical diagnostics, which enables unbiased, random and reproducible measures of volumetric and spatial processes to be obtained from bodies, tissues and cells of living organisms.

---

## INTRODUZIONE

Le forme e le strutture spaziali che compongono il regno animale e vegetale hanno affascinato gli antichi e stimolato la loro creatività, primariamente per fini empirici, nel tentativo di stabilirne le proprietà dimensionali e geometriche (volume, superficie, ecc.) e di descriverne quelle qualitative (irregolarità, simmetria / asimmetria, complessità, ecc.). Le stesse continuano ad affascinare gli artisti, i biologi e gli studiosi della forma non solo per ragioni estetiche ma anche perché siamo lungi dal disporre di metodologie che rendano possibile la descrizione quantitativa e riproducibile delle forme viventi e naturali in termini altrettanto performanti di quanto lo siano le capacità sintetiche di identificazione e di lettura di cui il nostro cervello dispone. È opportuno precisare che se la rappresentazione visiva della realtà osservata è immediata ed aderente in quanto risultante di un processo associativo, tuttavia il cervello non è in grado di descriverla in modo attendibile e tale da permetterne una raffigurazione riproducibile. Ciò significa che la forma di un corpo o di un oggetto irregolare qualsiasi, pur se esaminata con acribia ma descritta con un linguaggio non appropriato come lo è quello convenzionale (non analitico), verrà percepita e raffigurata in modo completamente diverso (soggettivo) da un ipotetico interlocutore, qualora ne fosse preclusa la visione diretta dell'oggetto in esame. L'esigenza della descrizione quantitativa delle forme nelle scienze biologiche, in anatomia patologica ed in clinica si è affermata soprattutto nel secolo attuale, sia per finalità teorico cognitive (D'ARCY 1969) sia per finalità applicative diagnostiche. È vieppiù manifesta la consapevolezza di come la forma e la struttura archi-

tettonico spaziale del vivente, risultante dal concorso delle forze di tensione e di compressione adeguatamente descritto dalla proprietà di «tensegrità» (INGBER 1993; INGBER *et al.* 1997), renda possibile poiché contiene in sé l'«in-formazione» ogni specifica funzione e ne condizioni l'andamento sia nell'insieme dell'organismo sia a livello di componente cellulare. Benché il contributo delle metodiche quantitative elaborate ed applicate finora sia lungi dall'essere soddisfacente, ancorché in progressivo affinamento, è un dato di fatto che la morfometria e la stereologia biologica contemporanea sia stata favorita non solo dall'avvento dell'analisi d'immagine computerizzata ma altresì dal ricupero integrativo di modelli geometrici e processi matematici per la misura di corpi ed oggetti appartenenti al mondo inanimato prima che vivente, peraltro adombrati e sviluppati durante i secoli precedenti. A tale proposito basti citare la *sezione aurea*, o la *spira mirabilis* così denominata da Bernoulli anche se scoperta da Descartes e Torricelli o ancora il trattato *De Prospectiva Pingendi* di Piero della Francesca, nel quale è proposto uno studio del cranio umano sezionato mediante piani paralleli di uguale spessore  $T$  e che sembra prefigurare l'approccio geometrico e metodologico descritto più propriamente solo nel secolo successivo. Fra gli studiosi dell'era scientifica moderna attivi in siffatto contesto ad aver elaborato un corpo teorico e matematico per la caratterizzazione volumetrica e spaziale di oggetti, che appare di sorprendente attualità ed utilità per la valutazione dimensionale di corpi e tessuti biologici, vi è da annoverare *Bonaventura Cavalieri* con la *Geometria degli Indivisibili* {*Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*} (UTET 1969), insigne matematico e «morfometrista» di origine verbanese

(MONTI 1990) di cui si celebra il quattrocentesimo della nascita avvenuta nel 1598 (SALA 1999). La Geometria degli indivisibili fu elaborata nella prima metà del seicento in un clima propizio allo sviluppo dell'analisi geometrica moderna, reso tale grazie al concorso intellettuale di Galilei, Torricelli, Castelli e di altri studiosi affermatosi in quella scuola di matematica e fisica. La Geometria degli Indivisibili richiama concetti ed intuizioni già adombrati da Archimede, si ispira ai principi enunciati da Keplero per la valutazione della capacità e del volume delle botti vinifere (ottenuto sommando i volumi delle doghe di cui è costituita la botte) raccolti nel trattato «*Stereometria Doliorum*» (BRASCH 1931), e contiene le premesse per lo sviluppo del calcolo infinitesimale ed integrale elaborato successivamente da Leibniz (1675). Da una ventina d'anni, alcuni morfometristi e stereologisti attivi nel campo naturale e biologico hanno riesumato il principio ed il metodo di Cavalieri, rivalutandolo criticamente e ricavandone il fondamento teorico su cui basare l'assetto empirico per la misura volumetrica di corpi, tessuti, cellule e componenti subcellulari a partire da sezioni istologiche o da sezioni fini per la microscopia elettronica (STERIO 1984; CRUZ-ORIVE 1987; CRUZ-ORIVE 1997; GUNDERSEN & JENSEN 1987; WEIBEL 1979), e più recentemente estendendone l'applicazione ad immagini computerizzate di risonanza magnetica nucleare e radiografiche (ROBERTS *et al.* 1994; PACHE *et al.* 1993; ROBERTS *et al.* 1993; ROBERTS *et al.* 1997). È opportuno perciò chiarire il principio di Cavalieri nella sua connotazione geometrica e teorica e di seguito illustrare il crescente impatto della metodologia del «calcolatore» basato su tale principio adeguatamente reinterpretato, la quale in combinazione con tecniche non invasive di scansione ha prodotto agili approcci applicativi in morfometria biologica, biomatematica ed in diagnostica medica.

## METODI

### Il principio di Cavalieri quale fondamento per la determinazione volumetrica di figure e solidi geometrici

Cavalieri postulò che un'area potesse essere concepita come formata da un numero infinito di linee o indivisibili e che analogamente un solido potesse essere considerato un insieme infinito di aree o di volumi indivisibili (BOYER 1982). Ora, in un oggetto definito ed unico, le figure indivisibili possono essere considerate simili. La proposizione che illustra compiutamente il teorema di Cavalieri e contemporaneamente ne rivela l'assoluta rilevanza per la morfometria biologica e medica, asserisce che: «Se due solidi hanno uguale altezza e se le sezioni tagliate da piani paralleli alle basi e ugualmente distanti da queste stanno sempre in un dato rapporto, anche i volumi dei solidi staranno in quello stesso rapporto» (BOYER 1982). In particolare, due volumi non possono essere diversi se sono costituiti da blocchi sovrapposti le cui corrispondenti aree sono uguali. Si è tentato di raffigurare nel piano bidimensionale la proposizione fondamentale sopraccitata che si riferisce ovviamente ad oggetti tridimensionali (Fig. 1).

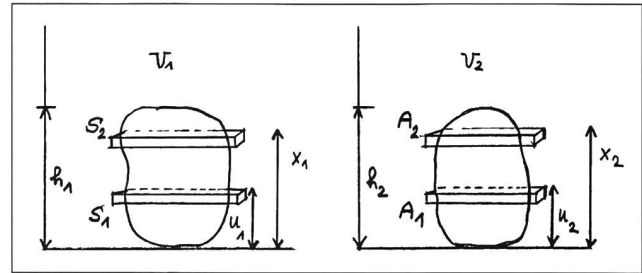


Fig. 1.

Siano le altezze  $h_1$  e  $h_2$ , che delimitano i solidi  $V_1$  e  $V_2$ , uguali tra loro come pure le altezze  $[x_1 = x_2]$  e  $[u_1 = u_2]$  delle sezioni tagliate dai rispettivi piani paralleli alla base.

Siano le sezioni  $[S_2 : S_1]$  e  $[A_2 : A_1]$  in un dato rapporto,

ovvero  $S_1 / A_1 = S_2 / A_2 \dots = S_m / A_m$   
 $m$ ; indica il numero delle sezioni condotte nei solidi

cioè  $S_1 / A_1 = k ; S_2 / A_2 = k ; S_m / A_m = k$  (costante)

da cui  $S_1 = k A_1 ; S_m = k A_m$

Il volume del singolo oggetto è definito dalla relazione

$$V_1 = h_1 (S_1 + S_2 + \dots S_m); V_2 = h_2 (A_1 + A_2 + A_m)$$

Sostituendo  $S_1, S_2, \dots, S_m$  in  $V_1$

si ottiene:  $V_1 = h_1 (k.A_1 + k.A_2 + \dots k.A_m)$   
 e ponendo  $k$  in evidenza,

l'espressione diventa

$$V_1 = k \cdot h_1 (A_1 + A_2 + \dots A_m)$$

Essendo  $h_1 = h_2$

allora  $h_1 (A_1 + A_2 + \dots A_m) = V_2$

da cui l'identità  $V_1 = kV_2$

e perciò  $V_1 / V_2 = k = S_1 / A_1 \dots S_m / A_m$

I volumi  $V_1$  e  $V_2$  dei rispettivi solidi stanno dunque nello stesso rapporto  $k$  delle aree sezionali generate dai piani paralleli alla base.

### Il principio di Cavalieri traslato ai corpi biologici

Il principio di Cavalieri può essere traslato ad un singolo solido od oggetto biologico di forma arbitraria, e renderne possibile la valutazione non distorta o «unbiased» del volume evitando approssimazioni incongrue. Il fondamento teorico-matematico è qui di seguito riportato in maniera succinta, con riferimento esplicito alla versione elaborata da CRUZ-ORIVE (1997).

Considerato un processo volumetrico stazionario o «omogeneo»  $Y_3$  contenente uno od altri elementi con densità di volume  $V_V$  (volume frazionario) che viene intersecato da un piano arbitrario, è noto che la sezione ottenuta è pure un processo stazionario con densità di area  $A_A$  e che in ossequio alla più diffusa equazione della stereologia,  $V_V = A_A$  (WEIBEL 1979). Poiché il piano arbitrario costituisce una finestra fissa e limitata ( $T_2$ ), ne consegue che la media dell'area sezionale  $E(A)$  nella finestra è uguale a  $V_V$  volte l'area fissa della finestra, e precisamente:

$$E A(Y_3 \cap T_2) = V_V \cdot A(T_2)$$

Per  $A(T_2)$  costante, allora l'area frazionaria osservata  $A(Y_3 \cap T_2) / (A(T_2))$  rappresenta il calcolatore (estimator) non preferenziale o «unbiased» (EU) di  $V_V$ .

Modificando l'equazione  $A_A = V_V$  in  $V(Y_3) / V(\text{ref}) = E A(Y_3 \cap T_2) / A(T_2)$ , dove ref. è lo spazio di referenza,  $Y_3$  denota un oggetto limitato non casuale di volume  $V(Y_3)$  e  $T_2$  costituisce un corpo sistematico di piani paralleli illimitati separati dalla distanza  $T$ , e per un successivo riarrangiamento l'identità precedente diventa:

$$V(Y_3) = \frac{V(\text{ref})}{A(T_2)} \cdot E A(Y_3 \cap T_2)$$

e ancora  $= T \cdot E A(Y_3 \cap T_2)$  o identità di Cavalieri.

Sezionando l'oggetto  $Y_3$  con un dispositivo (probe) sistematico di fette parallele o di scansioni planari, ne consegue che la sezione totale d'area osservata  $A(Y_3 \cap T_2) \cdot T$  risulta essere il calcolatore non preferenziale UE (unbiased estimator) del volume  $V(Y_3)$  dell'oggetto ( $Y_3$ ).

Più intuitivamente  $A(Y_3 \cap T_2)$  rappresenta l'insieme delle aree delle sezioni planari corrispondenti ( $A_1 + A_2 + A_3 \dots + A_m$ ) separate dalla distanza  $T$  (dove  $m$  è il numero delle sezioni) e pertanto il calcolatore di Cavalieri risulta essere:

$$V(Y_3) = T \cdot (A_1 + A_2 + A_3 \dots + A_m)$$

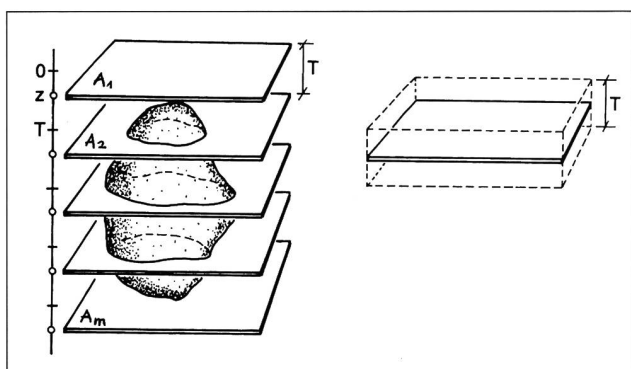


Fig. 2.

La figura 2 mostra che i piani paralleli attraverso l'oggetto  $Y_3$  di volume  $V$  sono separati dalla stessa distanza  $T$  a partire da  $z$ ;  $z$  indica la posizione del piano di sezione iniziale, stabilita a caso (uniform random) ma compresa entro l'intervallo di lunghezza  $T$  normale al piano. Ovviamente anche i successivi piani paralleli intervengono alla distanza  $T$ .

## RISULTATI

La rivisitazione del principio di Cavalieri ha generato un approccio metodologico strumentale connotabile come un calcolatore o «estimator» del volume  $V$  di un oggetto e costituito da pile sistematiche di piani paralleli separati dalla distanza  $T$  che tagliano detto oggetto in modo esaustivo a partire da una posizione iniziale ( $z$ ) scelta a caso ma compresa in  $T$ . Ciò ha offerto lo spunto per l'elaborazione di ulteriori versioni metodologiche dedicate alla misura volumetrica di oggetti biologici o di elementi cel-

lulari (come nuclei e particelle subcellulari) a partire da immagini bidimensionali di sezioni istologiche e/o di microscopia elettronica (SOERENSEN 1992), fra le quali vanno menzionate il bisettore (disector) (STERIO 1984), il selettore (selector) (CRUZ-ORIVE 1987), ed altre (GUNDERSEN & JENSEN 1987). Il disector, o calcolatore tridimensionale per la valutazione volumetrica e della grandezza di elementi variabili contenuti in un volume campione, è costituito da un dispositivo di due sezioni parallele condotte a distanza conosciuta. Il selector, o calcolatore tridimensionale che permette la valutazione «unbiased» del numero di elementi contenuti in un oggetto, è costituito da poche sezioni parallele attraverso l'oggetto e non comporta la necessità di conoscere lo spessore della sezione, né tantomeno la distanza  $T$  fra le sezioni. La validità universale del principio di Cavalieri è illustrata da recenti studi di stereologia applicata in diagnostica clinica: esso conferisce il fondamento teorico e statistico ai procedimenti moderni di analisi di immagine, ragion per cui i dati morfologici e funzionali ottenuti risultano riproducibili ma altresì rappresentativi dell'organo in esame. Dati morfometrici di tessuti fetali (ROBERTS *et al.* 1994) e polmonari (PACHE *et al.* 1993), oppure inerenti la composizione del corpo umano (ROBERTS *et al.* 1994) e la funzionalità del muscolo cardiaco (ROBERTS *et al.* 1997), sono stati ottenuti facendo ricorso a immagini di «sezioni seriali», prodotte mediante risonanza magnetica nucleare, tomografia computerizzata o indagini radiografiche, tutte metodiche di indagine non invasive.

## DISCUSSIONE E CONCLUSIONE

La Geometria degli Indivisibili di Bonaventura Cavalieri implica un concetto che appare intuibile, immanente ma che nel contempo sembra trascendere la realtà. Teoricamente un oggetto può essere suddiviso, sezionato all'infinito mediante infiniti piani paralleli di uguale spessore per cui il volume appare illimitato. Tuttavia non potendo prescindere dalla fisicità dell'oggetto, per ottenere la reale misura volumetrica occorre un intervento empirico-sperimentale ma teoricamente fondato che ne determini in un certo senso le condizioni iniziali. Dalla rappresentazione dell'oggetto come un insieme continuo ed infinito di indivisibili, e pertanto non quantificabile, si assiste ad una descrizione discreta e discontinua dello stesso che viene generata da un numero limitato ma sufficiente di piani paralleli che lo sezionano e che di conseguenza permette un'adeguata valutazione delle dimensioni geometriche e spaziali. La geometria degli indivisibili offre un nuovo paradigma di comprensione della natura e si fa carico di un significato euristico simile a quello sotteso dalla geometria frattale, per cui quanto più piccola o decrescente è la scala di misura tanto più grande, al limite infinita ed incommensurabile, risulta essere la lunghezza ed il contorno di un corpo o di un oggetto qualsiasi, irregolare ed autosomigliante (MANDELBROT 1983).

## BIBLIOGRAFIA

- BOYER C.B., 1982. Storia della matematica. Mondadori, Milano.
- BRASCH F.E., 1931. Stereometria Doliorum. Johann Kepler, 1571-1630. Baltimore (USA), William and Wilkins Editore.
- CAVALIERI B., 1966. Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota. Unione Tipografica Editrice Torinese, Torino.
- CRUZ-ORIVE L.M., 1987. Particle number can be estimated using a disector of unknown thickness: the selector. *Journal of Microscopy* 145: 121-142.
- CRUZ-ORIVE L.M., 1997. Stereology of single objects. *Journal of Microscopy* 186: 93-107.
- D'ARCY W.T., 1969. Crescita e Forma. La geometria della natura. Universale Scientifica Boringhieri, Torino.
- GUNDERSEN H.J.G. & JENSEN E.B., 1987. The efficiency of systematic sampling in stereology and its prediction. *Journal of Microscopy* 147: 229-263.
- INGBER D.E. *et al.*, 1997. Geometric control of cell life and death. *Science* 276: 613-627.
- INGBER D.E., 1993. Cellular tensegrity: defining new rules of biological design that govern the cytoskeleton. *Journal Cell Science* 104 (3): 613-627.
- MANDELBROT B., 1982. The fractal geometry of the nature. San Francisco, Freeman & Co. Editore.
- MONTI P., 1990. Fra Bonaventura Cavalieri. Verbanus 11. Intra, Alberti Editore, pp. 285-322.
- PACHE J.C., ROBERTS N., VOCK P., ZIMMERMANN A. & CRUZ-ORIVE L.M., 1993. Vertical LM sectioning and parallel CT scanning designs for stereology: application to human lung. *Journal of Microscopy* 170 (1): 9-24.
- ROBERTS N., CRUZ-ORIVE L.M., REID N.M.K., BRODIE D.A., BOURNE M. & EDWARDS R.H.T., 1993. Unbiased estimation of human body composition by the Cavalieri method using magnetic resonance imaging. *Journal of Microscopy* 171: 239-253.
- ROBERTS N., GARDEN A.S., CRUZ-ORIVE L.M., WHITHOUSE G.H. & EDWARDS R.H.T., 1994. Estimation of fetal volume by magnetic resonance imaging and stereology. *The British Journal of Radiology* 67: 1067-1077.
- ROBERTS N., CRUZ-ORIVE L.M., OOURNE M., HERFKENS R.J., KARWOSKI R.A. & WHITEHOUSE G.H., 1997. Analysis of cardiac function by MRI and stereology. *Journal of Microscopy* 187: 31-42.
- SALA N., 1999. Bonaventura Cavalieri: Alter Archimedes. Atti del Convegno, Pallanza, Editore.
- SORENSEN F.B., 1992. Quantitative analysis of nuclear size for objective malignancy grading: a review with emphasis on new, unbiased stereologic methods. *Laboratory Investigation* 66: 4-23.
- STERIO D.C., 1984. The unbiased estimation of number and size of arbitrary particles using the disector. *Journal of Microscopy* 134: 127-136.
- WEIBEL E.R., 1979. Practical methods for biological morphometry. Vol. I, New York, Academic Press Editore.

---

\* Relazione presentata alla Società svizzera di matematica durante il 178° Congresso dell'Accademia Svizzera di Scienze Naturali, Airolo, 23-26 settembre 1998.