Zeitschrift: Bollettino della Società ticinese di scienze naturali

Herausgeber: Società ticinese di scienze naturali

Band: 18 (1923)

Artikel: Note sulla definizione matematica di probabilità e sul concetto di tendenza

Autor: Bordin, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1002859

Dr. A. BORDIN

Note sulla definizione matematica di probabilità e sul concetto di tendenza

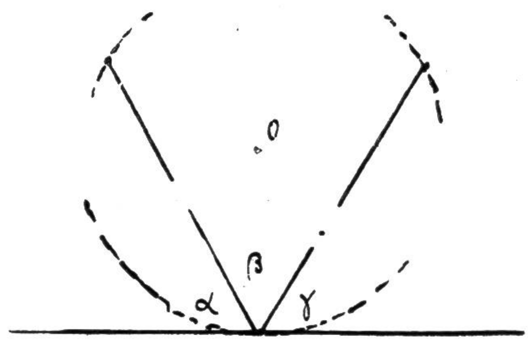
Egregio Sig. Bolla,

Per una simpatica indiscrezione del prof. Jäggli, a cui certo vorrà perdonare, ho saputo che Lei è stato officiato per una conferenza da tenersi a Lugano, sul tema: «il caso». Penso che intenderà quest'argomento riferendosi alle basi del calcolo delle probabilità e ai principi che informano le leggi della statistica. Comunque sia, vedo che s'occupa di questa materia e so che se n'è interessato per il passato; perciò mi permetto d'intrattenerla sopra alcuni dubbi che mi sono sorti da tempo e che ho procurato di sciogliere, nell'occasione delle lezioni di calcolo delle probabilità date agli allievi della mia scuola. Come vedrà nel seguito di questa lettera, tali dubbi furono originati dalla ricerca della possibilità di attuazione e del modo di applicare la probabilità al concetto empirico di tendenza di un prezzo o di un indice dei prezzi; in generale alla tendènza di un fenomeno passibile di espressione quantitativa. Ogni problema deve essere affrontato secondo questi due gradi di logica: possibilità e talora unicità di soluzione, forma della soluzione. Le sarò grato se, nel caso, mi farà le obbiezioni che credesse utili: dallo scambio delle idee sorge spesso un limpido costrutto di pensiero per il quale i fantasmi cadono e le forme si delineano decisamente. Dal canto mio auguro che così avvenga.

La probabilità a priori è generalmente definita come il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili (favorevoli più contrari), intesi tutti come egualmente probabili. Così la definiscono quasi tutti gli autori (Bertrand, Castelnuovo, Poincaré, Bachelier, per citarne alcuni). Bohlmann la definisce come un numero positivo connesso all'avvenimento E - (Castelnuovo, Calc. delle Prob., 1919, pag. 5-11); Bertrand commenta: « C'est une définition ». Castelnuovo osserva che, implicitamente, nella definizione si ammette il postulato empirico del caso per il quale è concepito un limite intorno a cui si debbono condensare i dati dell'esperienza. Ora io osservo che un concetto puro della probabilità, come grandezza, è completamente assente dalle suddette definizioni. Se non vogliamo cadere in una perfetta tautologia, quando parliamo di casi egualmente probabili e diamo, al postulato empirico del caso, un significato che dipenda dal risultato dell'esperienza, siamo indotti a tradurre il concetto qualitativo di probabilità in concetto quantitativo. In altre parole, come l'ofelimità non può essere data quantitativamente come concetto puro, nè tale concetto può essere desunto dall'esperienza perchè manca una misura, e un istrumento di rilevazione, ma può essere conosciuta sulla base sperimentale mostrata dalle curve di indifferenza, così dobbiamo procurare di tradurre sotto specie di grandezza quanto noi esprimiamo volgarmente con un aggettivo; questo è talora, in modo più preciso, corretto da un accrescitivo o da un diminutivo. Tale base, da cui in fondo ha origine il calcolo in parola, è la fonte a cui sicuramente si deve ritornare ogni qualvolta si voglia allargare il terreno di applicazione, massime se il nuovo studio debba tener conto, tra i suoi elementi fondamentali, del concetto empirico qualitativo di probabilità, oppure quando questo concetto influisca su fenomeni di cui cerchiamo l'andamento probabile nel succedersi del tempo. Prima di vedere se nella definizione comune si abbia raggiunta una felice trasformazione nel senso che ho detto, mi sia lecito indagare se la definizione abbia un carattere troppo particolare.

La probabilità conosciuta sotto forma di rapporto, anzitutto non è suscettibile di continuità: la successione di frazioni, che si possono pensare tra i due limiti (lo zero e l'unità), non costituisce un campo continuo. Ciò deriva dalla definizione che si basa su di un numero per quanto grandissimo di casi possibili e favorevoli ma sempre variabile di almeno un' unità. Qualora alla funzione discontinua di probabilità si abbia bisogno di sostituire una funzione continua è più che evidente che la definizione primitiva non valga. Bachelier (Calc. des prob. Cap. VI., pag. 152 e seg.) parla della necessità di dare il carattere di continuità alla funzione probabilità, già nella sua definizione primitiva, e cioè partendo dal concetto di probabilità a priori: ammette perciò un numero grandissimo di prove possibili per le quali la differenza tra un totale di esse e il successivo si possa concepire sotto forma di differenziale. In realtà a me pare che non sia punto necessario porre queste costruzioni di pensiero un po' artifiziose e per nulla rispondenti al carattere di una funzione continua quale è definita dall'analisi. D'altra parte quoziente di un numero infinito di casi favorevoli e di un numero di casi possibili, pur esso infinito, non ha significato, in questo calcolo, a meno che non s'introduca il concetto di ordine di infinità.

Nulla impedisce di sostituire ad un numero di casi possibili e favorevoli il concetto di campo limitato, continuo o discreto a seconda che il problema pratico ammetta o non ammetta questa qualità. Implicitamente questo concetto è pensato dal Bertrand nel problema n. 5, pag. 4 (Calc. des prob., Paris, 1907); invero se si domanda la probabilità di tracciare una corda inferiore al lato del triangolo equilatero inscritto in una circonferenza, conosciuto il ver tice di questo (estremo delle infinite corde che lo uniscono con tutti gli altri punti della circonferenza) quando la corda in questione abbia per estremo quel vertice, non possiamo parlare di rapporto di casi favorevoli e possibili i quali sono infiniti.



Tutti i casi di possibilità sono racchiusi in un campo limitato dato dall'angolo ($\alpha + \beta + \gamma$), i casi favorevoli sono nella parte del campo di possibilità : ($\alpha + \beta$). La probabilità dell'evento fissato dal problema è eguale a

$$p = \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{2}{3} \quad \text{essendo } \alpha = \beta = \gamma$$

Alla frase « casi possibili ma egualmente probabili » bisogna sostituire, con il concetto di campo, « campo di possibilità uniformemente probabile »; quest'ultima proposizione implica invero due concetti, il primo dei quali è completamente estraneo alla solita definizione di probabilità;

1° *a)* Nel caso di continuità: per ogni elemento primitivo del campo se ne deve avere un secondo la cui differenza (materialmente, distanza) sia un infinitesimo dello stesso ordine, per tutti gli elementi primitivi del campo.

Se tali elementi sono passibili di corrispondenza biunivoca con un sistema di coordinate, tale carattere deve estendersi alle coordinate.

b) Nel caso di discontinuità: concetto analogo al precedente con sostituzione della nozione di differenza costante al posto di infinitesimo e di ordine di infinitesimo.

2° Ad ogni elemento primitivo del campo sia connessa una costante di probabilità concepibile a priori. (Analog. il Bohlmann).

Più in generale se assumiamo quest'ultima grandezza, probabilità, come funzione delle caratteristiche particolari d'ogni elemento del campo, e, quando sia ammissibile, sostituita da queste, alle quali diamo il valore di peso (p_2) di ogni elemento — se, in secondo luogo, si ammette un secondo peso (p_1) dipendente dall'ordine dell' infinitesimo o dalla differenza (campo continuo o discreto), possiamo dare una definizione di probabilità anche quando manchi al campo il carattere d'uniformemente probabile. Mi spiego più dettagliatamente con alcuni esempi:

1° Sia una roulette circolare, nella quale la circonferenza sia divisa in archi eguali, ad ognuno dei quali è ordinatamente attribuito un numero. Evidentemente la probabilità di uscita, di uno dei numeri segnati, è eguale a

$$p = \frac{\frac{1 \; 2\pi r}{n}}{2\pi r} = \frac{1}{n}$$

dove con $2\pi r$ indichiamo tutto il campo di possibilità, composto di tutti gli infiniti punti corrispondenti alla posizione che può assumere la lancetta metallica fissata al centro della circonferenza e ruotante intorno ad esso. Con $\frac{1.\,2\pi r}{n}$ la parte del campo favorevole all'avvenimento. E' evidente che se ad es. l'arco, segnato col n. 6, è formato con materiale magnetizzato il campo di possibilità non è uniformemente probabile, ma in quella parte vi sarà una maggior intensità di probabilità dovuta al potenziale della calamita. Potremo quindi omologare l'arco in parola ad un arco di maggior grandezza dei rimanenti, per un coefficente, funzione del potenziale, che indicheremo con K.

La probabilità dipende perciò dalle relazioni:

$$(n - 1)\, x + x\, K = x\, (n - + K) = 2\pi r; \qquad x = \frac{2\pi r}{n - 1 + K}$$

$$p_i = \frac{\frac{1.\,2\pi r}{n - 1 + K}}{2\pi r} = \frac{1}{n - 1 + K} \qquad i = (0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n)$$

In generale se $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}$ sono i coefficenti dei singoli archi in confronto dell'arco n^{esimo} si avrà:

$$x K_1 + x K_2 + \ldots + x K_{n-1} + x = 2\pi r$$

posto $K_1 + K_2 + \ldots + K_{n-1} + 1 = S_K$

$$x = \frac{2\pi r}{S_K} \quad e$$

$$p_i = \frac{\frac{1.\,2\pi r\,.\,K_i}{S_K}}{2\pi r} = \frac{K_i}{S_K} \qquad i = (1, 2, \ldots, 5, 7, \ldots, n)$$

Ammettendo la continuità del potenziale, per tutta la circonferenza, e supponendo quindi $K_i = f(\varphi)$, la probabilità che la lancetta si arresti al numero *i* è eguale a:

$$i = \overset{\alpha_2}{\underset{\alpha_1}{F(\varphi)}} \qquad \overset{\alpha_2}{\underset{\alpha_1}{p_i}} = \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(\varphi)\, d\, \varphi}{\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\, \varphi}$$
(1)

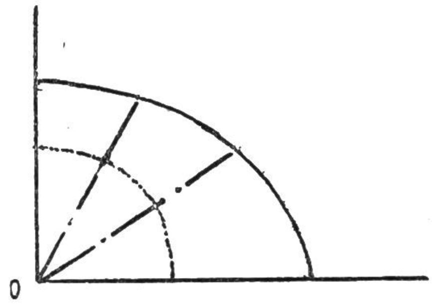
dove φ è la coordinata polare variabile angolo, mentre l'altra, ρ, è costante.

Per le notazioni ammesse $p_2 = f^1 (\varphi)\, d\, \varphi$.

(L'espressione (1) ha carattere generale.

2° Sia ora una roulette a forma elissoidale; se i numeri suddetti sono ad intervalli uguali, cioè corrispondenti ad archi eguali, nelle condizioni poste nella prima parte del caso precedente, è chiaro che non possiamo dire che

$$p_i = \frac{1}{n}$$



Poichè per gli archi, che sono prossimi ai fuochi, avremo un minore angolo al centro di quanto non siano gli angoli corrispondenti agli archi più lontani dai fuochi, la probabilità per questi ultimi sarà maggiore della probabilità per i primi.

Essendo in coordinate polari, per qualsiasi curva piana

$$d\, s = \sqrt{\rho^2\, d\, \varphi^2 = d\, \rho^2}$$

ammettendo l'origine delle coordinate nel centro dell'elisse, poichè per il cerchio $d\, \rho = 0$
si otterrà per esso: $d\, s_1 = \rho\, d\, \varphi$

Il campo di possibilità e definito da:

$$\int_0^{2\pi} \rho\, d\, \varphi\, \partial\, \varphi \neq \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2\, d\, \varphi^2 + d\, \rho^2}\; \partial\, \varphi$$

La parte di esso favorevole all'avvenimento è uguale a

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \rho\, d\, \varphi\, \partial\, \varphi \neq \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{\rho^2\, d\, \varphi^2 + d\, \rho^2}\; \partial\, \varphi$$

Il quoziente tra i due primi membri delle disuguaglianze non coincide, in generale, con il quoziente tra i secondi perchè

$$\frac{d\,s_1}{d\,\rho} \neq \frac{d\,s}{d\,\rho}$$

Il rapporto: $\dfrac{d\,s}{d\,s_1} = \dfrac{\sqrt{\rho^2\,d\,\varphi^2 + d\,\rho^2}}{\rho\,d\,\varphi} = \sqrt{1 + \dfrac{d\,\rho^2}{\rho^2\,d\,\varphi^2}} = \dfrac{1}{p^1}$

(peso, secondo le notazioni addottate).

Sarà: $d\,s_1 = \dfrac{d\,s}{\sqrt{1+\dfrac{d\,\rho^2}{\rho^2\,d\,\varphi^2}}} = \dfrac{\sqrt{\rho^2\,d\,\varphi^2 + d\,\rho^2}}{\sqrt{1+\dfrac{d\,\rho^2}{\rho^2\,d\,\varphi^2}}} = \sqrt{\dfrac{\rho^4\,d\,\varphi^4 + \rho^2\,d\,\rho^2\,d\,\varphi^2}{\rho^2\,d\,\varphi^2 + d\,\rho^2}}$

Ed infine: $d\,s_1 = \rho\,d\,\varphi\,\sqrt{\dfrac{\rho^2\,d\,\varphi^2 + d\,\rho^2}{\rho^2\,d\,\varphi^2 + d\,\rho^2}}$

dove la radice - 1 - non è altro che il peso definito più sopra, per il cerchio.

Integrando entro il limite del campo possibile e favorevole all'evento avremo il denominatore e il numeratore del rapporto indicante la probabilità dell'avvenimento in discorso.

Dagli esempi suddetti si può assurgere ad una concezione più larga, interpretando i simboli che abbiamo posti per i casi concreti, seppure essi siano di carattere generale. Infatti il coefficente p_1 non è altro che il rapporto tra un elemento infinitesimale del campo dato dal problema e il corrispondente di un campo uniformemente probabile. Tale corrispondenza, analiticamente, si traduce nella identità delle coordinate comuni ai due campi, delle quali essi sono funzioni dipendenti. Il coefficente p_2 non è che il rapporto tra il peso, di qualsiasi natura esso sia, d'un elemento qualsiasi del campo e il peso di un elemento particolare preso come unità di misura. Ambedue questi indici sono sperimentali, conoscibili a priori, indipendenti dal concetto di probabilità, in via generale; in particolare, possono derivare dalla legge empirica del caso.

Così mi pare d'aver mostrato come l'introduzione di campo allarghi il concetto solito di probabilità e che l'introduzione degli indici possa, nella comune dei casi, indurre a trascurare l'uniformità di probabilità del campo dato.

Ma la definizione, pur corretta nel senso detto, nasconde un'affermazione che dev'essere provata e non lo è, o non è stata provata, ch'io mi sappia, fino ad ora. Infatti, supposto il campo di possibilità costante, e uniformemente probabile, e quindi la probabilità y funzione della parte di esso favorevole all'evento x, perchè dev'essere tale funzione espressa nella particolare forma analitica

$$y = \frac{X}{K} \ ?$$

E' pacifico che l'espressione quantitativa del concetto di probabilità sia indipendente dalla natura particolare dell'evento cui esso è attribuito; in particolare, così dicasi del valore massimo di y (certezza) e del minimo (mancanza assoluta di probabilità). In modo più preciso si può dire che la suddetta espressione sia indipendente dal valore assoluto particolare di K, ma che varia secondo la relazione in cui X si trova con K. Tale relazione si esprime sotto forma di rapporto, il quale traduce appunto tutti i caratteri suddetti; resta pertanto determinata la relazione:

$$y = f\left(\frac{X}{K}\right)$$

la cui forma analitica particolare è completamente ignota. Arbitrariamente si pone

$$y = \frac{X}{K},$$

forma analitica proveniente da un problema d'interpolazione, basato sopra i due valori 0 e 1 di y, legati dalla relazione:

$$y = a\,x + b$$

dove $$a = \frac{1}{K}; \quad b = 0$$

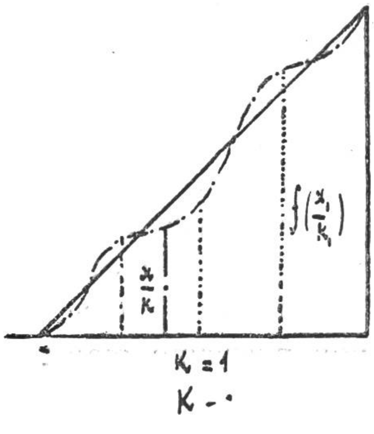
Io credo che quanto ho detto sia l'interpretazione più consona alla traduzione del concetto qualitativo in concetto quantitativo della probabilità e delle sue applicazioni. Infatti con l'introduzione della definizione di speranza matematica, intesa ccme il prodotto dell'espressione quantitativa dell'evento e della probabilità di esso, qualora la probabilità abbia il suo valore massimo, otterremmo un prodotto diverso dall'espressione quantitativa del fenomeno, se dovessimo dare, al fattore probabilità, un valore diverso da uno. Il che sarebbe un arbitrio e un assurdo perchè la certezza di un evento non può per nulla modificare il concetto puro di esso anche se in forma particolare è tradotto con un numero. E però mi sembra che il limite superiore della probabilità provenga più logicamente dal concetto di speranza matematica e non dalla definizione matematica di probabilità, sebbene forse, storicamente, sia accaduto il con trario. Ad ogni modo resta sempre da dimostrare perchè non sia possibile sostituire alla (1) un'altra forma analitica a due parametri, poichè, in generale, 0 e l'unità sono gli unici valori conosciuti di y, di cui non si hanno altri caratteri, nè ancora si hanno altre notizie sulle sue funzioni derivate (y^i). Nella definizione solita è postulato che

$$y^1 = \frac{1}{K} \text{ (costante)}$$

il che è evidentemente arbitrario poichè, sia pure il caso, anche un'acuta analisi del concetto qualitativo e del suo variare, quando non sia basato sopra un unico soggetto o sopra temi particolari, ma sia il prodotto di un'esperienza collettiva e sopra numerose osservazioni di uno stesso fenomeno, non può condurre nessun lume sui caratteri di variabilità del concetto sopradetto. E' però confermata l'arbitrarietà della forma analitica (1) e la possibilità di sostituirla con altra, qualora si abbiano ulteriori conoscenze sulla y, escludendo in tal modo una definizione che mal si adatta a qualsiasi caso pratico in cui il campo di possibilità abbia caratteri tali da informare più diffusamente il concetto qualitativo. Per queste ragioni sorge spontaneo il criterio per il quale si debba basare la costruzione della forma analitica di y sui dati dell'esperienza, sia adducendo ad una espressione interpolante di diversi valori noti della funzione o delle derivate, sia prendendo per base un'equazione differenziale, come del resto, in un primo tempo, si procede per la formulazione empirica di una legge o di una uniformità. Viene così tradotto, alimentato dall'esperienza, il concetto suaccennato del Bohlmann, concetto che, a priori, non può essere delineato che nella forma generica data dall'autore. Per intanto ogni qualvolta il campo di possibilità non sia uniformemente probabile conviene approfittare dell' indeterminatezza dell'espressione analitica di y per tradurre i suoi caratteri di variabilità, in dipendenza delle parti del campo stesso. Il quale procedimento può esser seguito colla ricerca dei coefficenti (pesi) di cui ho parlato più sopra. Con la considerazione di essi si arriva, come abbiamo visto dopo aver delineato il concetto di p_1 e di p_2 ad una funzione $f\left(\frac{X}{K}\right)$ particolare ad ogni caso e per la quale, analogamente alla definizione solita e ponendo $\left.\frac{K}{K_1}\right\} = 1$ si dovrà ottenere:

$$\int_0^K \frac{X}{K}\, d\, x = \int_0^{K_1} f\left(\frac{X_1}{K_1}\right) d\, x_1 = \frac{1}{2}$$

Graficamente, per il campo di possibilità elissoidale, facendo coincidere il limite inferiore del campo favorevole con il punto più vicino ad uno dei fuochi e fissando il verso di rotazione dell'angolo al centro dell'elisse, variabile da cui dipende l'ampiezza del campo stesso, si avrà:



* * *

Ora procurerò di fissare, secondo il pensiero espresso fino a questo punto, che cosa si possa intendere, quantitativamente, per tendenza avvenire d'un fenomeno, ottenuta dall'esperienza fatta in un periodo di tempo anteriore; in particolare per tendenza dell'indice d'un gruppo numeroso di prezzi.

Il concetto di probabilità a posteriori è un concetto empirico formulato in base ad una successione di risultati osservati; esso sostituisce la risultante di numerose ed almeno poco conosciute condizioni che legano, nello spazio e nel tempo, il fenomeno in esame ad altri fenomeni con i quali il primo è in relazione di causalità e di interdipendenza. Osservo, incidentalmente, che, traducendo tali condizioni in equazioni, si ammette sempre la conoscenza delle costanti che vi possono essere nella loro particolare forma analitica, costanti le quali alla loro volta in realtà non sono che funzioni di altre variabili, non prese in esame perchè si circoscrive il risultato del problema a determinate condizioni postulate a priori. E però la considerazione di tutti i rapporti che vincolano un fenomeno con i rimanenti, conduce ad estendere il concetto di caso a tutta la realtà, oggetto di osservazione; cioè conduce ad includere, nei risultati del caso anche i fenomeni per cui si sappiano le condizioni da cui sono determinati insieme con un numero finito e cognito di fenomeni collaterali, o causali o per lo meno ritenuti come tali. Per queste ragioni resta confermato il principio, comune a tutte le scienze sperimentali, per il quale le leggi, le uniformità conosciute, e probabilmente anche quelle che si delineeranno in avvenire, sono sempre di carattere particolare e non di carattere generale, come dipendenti da condizioni postulate a priori. Tuttavia ogni qualvolta una o più delle prime condizioni conosciute a priori hanno tal peso, nella determinazione del fenomeno, da desumere intuitivamente un concetto della probabilità del suo mutare, non possiamo mantenere completamente l'affermazione che il fenomeno dipenda dal caso concepito secondo quanto ho detto, seguendo il Castelnuovo, nel principio di queste note.

Di conseguenza quanto sto per dire, sarà in generale applicabile a tutti i fenomeni per i quali a priori non si abbiano conoscenze particolari tali da escludere in tutto o in parte la loro provenienza dal caso. Perciò piuttosto del movimento di prezzo, assumo come base di esempio, l'indice di un gruppo numeroso di prezzi ed estendo, le considerazioni di tendenza, ad un avvenire prossimo e non remoto perchè anche in questo caso si conosce a priori l'intima colleganza tra il movimento dei prezzi e il volume della circolazione monetaria, determinabile talora a priori (Esistenza di leggi giurid. isolamento dei mercati, ecc.)
Sia $a_{-(n-1)}$, $a_{-(n-2)}$,......, a_{-2}, a_{-1}, a_0, n espressioni quantitative di un fenomeno, che dipenda dal caso, osservate negli istanti: $t_{-(n-1)}$, $t_{-(n-2)}$, ..., t_{-2}, t_{-1}, t_0. Evidentemenre se $a_{-(n-i)} = a_{-(n-i,+1)}$ possiamo dire che le condizioni che determinano a_i sono rimaste inalterate nel periodo $(t_0 - t_{-(n-1)})$, oppure che, le possibili variazioni avvenute, si sono compensate a vicenda.

Dato un valore sufficentemente alto di n diciamo comunemente, che è assai probabile, non certa, la costanza del valore a_i anche in un prossimo avvenire. Tale concetto sarebbe subito modificato se, contrariamente alla supposizione fatta, vi fossero state alcune variazioni in più o in meno nell'andamento del fenomeno, rivelate dalle $\triangle^1$ positive e negative; più precisamente tali variazioni avrebbero maggior peso se verificate in prossimità di t_0 piuttosto che in prossimità di $t_{-(n-1)}$. E però collegando, i due casi, possiamo addurre che le possibili contingenze e in particolare i fenomeni e relazioni di essi con quello in istudio, hanno maggior probabilità di verificarsi in futuro quanto più è vicino l'istante in cui hanno manifestato il loro risultato. Circa l'espressione quantitativa delle variazioni prodotte dalle suddette contingenze si possono delineare due casi:

O il fenomeno è suscettibile di aver, nel tempo, due limiti finiti di massimo e di minimo ed allora, man mano che ci avviciniamo ad essi, dovremo minorare corrispondentemente il valore della variazione in più o in meno. Oppure non si hanno limiti o si hanno all' infinito, nel qual caso, le variazioni provocate da quelle cause non possono che restare inalterate nel valore già manifestato. Infine si può pensare ad un terzo caso e cioè all'esistenza di un solo limite finito.

Tali sono per sommi capi le fonti del concetto empirico di probabilità; dò una definizione più precisa di esse, di quanto non abbia fatto precedentemente:

Si stabilisca il seguente quadro:

(1) Y	(2) $\triangle^1_i$	(3) Coeff. di prob. delle variazioni
$a_{-(n-1)}$		
	$\triangle^1_{[-(n-2)]-[-(n-1)]}$	$p_{-(n-2)}$
$a_{-(n-2)}$		
	$\triangle^1_{[-(n-3)]-[-(n-2)]}$	$p_{-(n-1)}$
$a_{-(n-3)}$		
⋮	⋮	⋮
a_{-2}		
	$\triangle^1_{(-1)-(-2)}$	p_{-1}
a_{-1}		
	$\triangle^1_{0-(-1)}$	p_0
a_0		

Si avrà perciò

$$1 < p_i > 0 \quad ; \quad p_{-i} > p_{-(i+1)}$$

E le successive speranze matematiche, su cui si fonda la tendenza, nel caso di mancanza di limiti o di limiti all'infinito, sono costituite dal prodotto degli elementi della colonna (2), rispettivamente con gli elementi della colonna (3).

Nel caso di esistenza di limiti, inferiore (L_0) e superiore (L_1), posto $\frac{L_0 + L_1}{2} = A$, e postulando una dispersione normale, le $\triangle^1_i$ debbono essere moltiplicate per il coefficente

$$\frac{\dfrac{a_{-i} + a_{-(i+1)} - L^1_0}{2}}{A - L^1_0} = \frac{a_{-i} + a_{-(i+1)} - 2\,L^1_0}{L_0 + L_1 - 4\,L^1_0}$$

$$\left.\begin{matrix} L_1 \\ L_0 \end{matrix}\right\} \text{ a seconda che } \frac{a_{-i} + a_{-(i+1)}}{2} \gtrless A$$

Nel caso di un sol limite, in modo analogo, si avrà (considerato il solo valore assoluto):

$$\frac{a_{-i} + a_{-(i+1)} - 2\,L}{2\,(M - L)}$$

dove con M indichiamo la media delle y.

Ammettendo la continuità delle suddette grandezze si avrà : $p = f(t)$ e poichè non vi è una variazione per quanto lontana che a priori non abbia peso, sia pure con un piccolissimo coefficente di probabilità, nella determinazione del concetto di tendenza, sarà :

$$0 > \frac{d\,p}{d\,t_i} < \frac{d\,p}{d\,t_{-i+di}} \quad \text{e cioè} \quad \frac{d^2\,p}{d\,t^2} > 0$$

Nell'ipotesi di esistenza di limiti finiti, ponendo $a_i = \psi\,(t)$

$$K = \frac{2\,\psi\,(t) - 2\,L^1_0}{L_0 + L_1 - 4\,L^1_0} \quad \text{e} \quad h = \psi\,(t) - L^1_0;\ \frac{d^2\,K}{d\,h^2} < 0$$

Tra le possibili forme analitiche che verificano le suddette condizioni poniamo, per la condizione di probabilità, la seguente :

$$(2) \qquad p = f\,(t) = s a^{-t}$$

perchè

$$\begin{aligned} f^1\,(t) &= s\,a^{-t} \log.\ a < 0 \\ f^{11}\,(t) &= - s\,a^{-t} \log.^2\ a > 0 \end{aligned} \qquad a > 1$$

Occorre determinare le costanti (s) ed (a) della (2).

Invero per $t = 0$, $p = s$, coefficente massimo di probabilità il quale può essere assunto come tendente all'unità (e praticamente eguale ad uno) alle seguenti condizioni :

Sia M la media degli (l) ultimi valori della colonna (1) oppure F (t) una funzione interpolante di grado tale che nella scala delle funzioni lineari adottate, a cominciare da un grado minimo (zero: media aritmetica), salendo a gradi maggiori, la funzione dia, in confronto dell'antecedente e della seguente un minimo per l'espressione

$$\sum_{i=n-1}^{i=0} M \left[F(t_{-i}) - a_{-i}\right]$$

tenuto soltanto conto dei valori assoluti della differenza in parentesi ([a])

Potremo accettare $s = 1$

se $\dfrac{M}{F(t_0)} = a_0$ e $\sum_{i=n-l}^{i=0} [F(t_{-i}) - a_{-i}] = 0$ oppure $0 = \sqrt{M(\lambda_i^2)} = g$ $\quad [F(t_{-i})\, a_{-i}] = \lambda_i$

A seconda del grado con cui sono verificate tali condizioni, s tenderà verso l'unità, per cui potremmo porre:

$$\sum_{i=n-1}^{i=0} M - \sum [F(t_{-i}) - a_{-i}]$$

$$s = \frac{\dfrac{F(t_0)}{M}}{a_0} \text{ e } \qquad \text{oppure } s = \frac{\dfrac{F(t_0)}{M}}{a_0} \text{ e } - \sqrt{\frac{1}{l} \sum \lambda_i^2}$$

se $\dfrac{F(t_0)}{M} < a_0$; intervenendo il numeratore con il denominatore del primo fattore se

$$a_0 < \frac{F(t_0)}{M}$$

A sua volta la costante (a) deve essere tanto più alta, quanto è minore il coefficente di probabilità che assumino per le singole variazioni e cioè, tanto più piccola quanto più le variazioni denotano scarti accidentali del fenomeno verificato in confronto della legge con cui si deve svolgere nel tempo. Empiricamente tale legge viene desunta, in statistica,

---

([a]) Cfr. Journal de la Société de Statistique de Paris - Nov. 1897 — V. Pareto: Quelques exemples d'application des méthodes d'interpolation à la statistique.

a mezzo di una funzione interpolante per la quale l'andamento del fenomeno viene scisso in una parte che possiamo dire normale ed in un'altra che diciamo accidentale. Il grado della funzione adottata è definito in base al grado del periodo di variazione. E' conforme quindi a codesta conoscenza il ritenere che la costante (a) sia funzione dello scarto assoluto medio di ogni periodo o dello scarto quadratico medio.

Più brevemente, per la considerazione che l'andamento avvenire del fenomeno si uniforma più facilmente alle variazioni di lungo periodo, che non alle variazioni di periodo di minor grado, adottiamo, come base del calcolo di (a), lo scarto quadratico medio verificato nel periodo precedente di osservazione. Scarto quadratico medio ottenuto, nel confronto del diagramma iniziale, con la curva rappresentante la funzione di interpolazione ammessa per rappresentare le variazioni di lungo periodo. Tale funzione φ (t) è in generale diversa da F (t) la quale poteva riferirsi non già a tutto il periodo di osservazione, ma all'ultima parte, più prossima, di corto periodo e caratterizzata da un minimo di scarti accidentali propri ad esso $[t_0 - t_{-(n-l)}]$ lunghezza dell'ultimo periodo.

Si avrà:

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i=n-1} [a_{-i} - \varphi(t_{-i})]^2}$$

ed il valore della costante che, per quanto abbiamo posto più sopra, deve essere $a > 1$ è determinato dalla relazione:

$$a = e^{\mu}$$

che risponde ai requisiti che abbiamo precedentemente delineati.

Concludendo; l'espressione della funzione di probabilità, valevole per tutte le variazioni date nella colonna (2), è la seguente:

$$p = f(t) = \frac{M}{a_0} e^{-\frac{F(t_0)}{M}\left\{t\mu + \sum_{i=n-1}^{i=0}[F(t_{-i}) - a_{-i}]\right\}}$$ oppure $$p = \frac{F(t_0)}{a_0}^{-(t\mu + g)}$$

Ho introdotto la costante (e) che in realtà è arbitraria. Al posto suo può essere sostituita qualsiasi altra costante a condizione che sia maggiore dell'unità. Non ho tenuto conto per essa dei valori posti ad esponente dell' ultima forma perchè non sempre verificano la condizione or ora posta. D'altra parte tutto ciò che in tesi generale, e per quanto abbiamo postulato, costituisce base del concetto di probabilità del verificarsi avvenire delle variazioni notate, è entrato in linea di conto nella definizione matematica che ha procurato di dare per f (t). Tuttavia al posto di (e) si metta una funzione dell' indice di oscillazione, sebbene in ultima analisi essa sia una grandezza avente basi comuni con le grandezze desunte per stabilire la formula soprascritta. Tale indice di oscillazione è uguale alla media aritmetica dei valori assoluti, degli scarti dei dati grezzi dalla loro media aritmetica. Esso può assumere tutti i valori che vanno dallo zero (costanza del fenomeno) all'infinito, teoricamente, ad un numero altissimo, praticamente. Nel caso del primo limite la f (t) ed i valori della colonna (2) sono pure eguali alto zero.

Per quanto vedremo nella definizione di tendenza queste conclusioni si uniformano ad essa. Così non accade per i valori dell'indice che vanno dallo zero all'unità inclusa, perchè, se esso viene assunto al posto di (e), non si uniforma alla condizione stabilita superiormente e che in questo caso ha tutto il suo valore. Concludo scrivendo che, se si vuol adottare una funzione dell' indice di oscillazione, valevole per tutti i casi, si ricade in una espressione esponenziale dove la costante base è ancora da determinare, mentre l'esponente negativo è dato dall' indice. L' unica soluzione possibile, scindendo i due casi di

$$0 \leqslant I_0 \leqslant 1 \quad ; \quad I_0 > 1$$

è data dall'assunzione dell'indice stesso al posto di (e), valevole solo nel secondo caso.

Per l'eventuale determinazione analitica della funzione esprimente K, tenuto conto del carattere generale che per essa abbiamo definito, si può dar luogo alla ricerca di una funzione interpolante dei diversi valori assunti dall'espressione con cui K è stata definita, per il variare di ψ (t_i).

Ricercati così i successivi valori della colonna (3), possiamo determinare la successione delle speranze matematiche, positive e negative, a seconda del segno delle singole differenze prime. Il totale delle prime (astrazion fatta dal segno) indica il campo di possibilità della tendenza del fenomeno, o, per essere più precisi, il campo di possibilità sperimentale, analogo al totale delle prove fatte nella ricerca della frequenza, quando la probabilità a priori non sia conosciuta. E' da osservare che i fenomeni che hanno provocato le variazioni notate possono entrare in linea di conto più di una volta e però informare il concetto di tendenza con un coefficente maggiore di quello sul quale sono basati i postulati che, desunti dall'esperienza, abbiamo posto a fondamento dei calcoli fatti. Così, a mo' di esempio, se le differenze sono costanti in valore assoluto e segno, non possiamo dire che la futura differenza sia eguale alla somma delle differenze precedenti ma, in caso, uguale ad esse e in via generale alla media aritmetica loro, con un coefficente di probabilità medio dei coefficenti di probabilità delle variazioni osservate.

E però otterremo

$$T_R = \frac{\frac{1}{d} \Sigma \Delta^1_j \, p \, j}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=o}^{i=n-1} \Delta^1_j \, p \, i} = \frac{\Sigma \Delta^1_j \, p \, j}{\frac{d}{n-1} \sum_{i=o}^{i=n-1} \Delta^1_j \, p \, i} \; ; \quad T_r = \frac{\Sigma \Delta^1_y \, p \, y}{\frac{(n-1-d)}{n-1} \sum_{i=o}^{i=n-1} \Delta^1_i \, p \, i} \qquad \text{dove } \begin{array}{l} j : + \Delta^1 \\ y : - \Delta^1 \end{array}$$

Dove con T_R indichiamo la tendenza al rialzo e con T_r la tendenza al ribasso. Il prevalere dell'una sull'altra indicherà la tendenza definitiva, scindibile nel valore assoluto di essa e nel suo coefficente di probabilità di avverarsi. E cioè, nel caso di tendenza al rialzo,

$$\frac{\sum_{j=o}^{j=d} \Delta^1_j \, p \, j}{\sum_{j=o}^{j=d} p \, j},$$ con coefficente di probabilità eguale a :

$$\frac{\sum_{j=o}^{j=d} \Delta^1_j \, p \, j}{\sum_{j=o}^{j=d} \Delta^1_j}$$

Dalle cose dette appare chiaro che i concetti ai quali sono giunto sono analoghi al concetto di frequenza da assumersi a base di qualsiasi problema con un coefficente di sicurezza, tanto più alto quanto è maggiore il numero dei dati da cui è desunto. D'altra parte mi sono proposto di tradurre, in linguaggio matematico. il concetto qualitativo che ordinariamente abbiamo di tendenza di un fenomeno, valendomi delle basi empiriche che sono di uso anche nella pratica. Tutte le eventuali critiche che si possono opporre cadono perciò nell'ordine delle osservazioni poste per la definizione di probabilità dal Castelnuovo (Cfr. op. cit. pag. 5 - N. 3); ad esse rimando il lettore. L'utilità della traduzione matematica rientra nel vantaggio comune che si ottiene ogni qualvolta, ad un concetto qualitativo si possa sostituire un numero, una grandezza: si raggiunge maggior precisione di linguaggio e di pensiero e si ha la facoltà di applicare la logica matematica estensibile ad un campo più largo e complesso che non sia il dominio della logica comune.

Applichiamo ora con un es. quanto è stato descritto, e studiamo un fenomeno che, pur offrendo un limite minimo (lo zero), per il periodo di tempo in cui si manifesta e per la lontananza da quel limite, può essere assunto come indipendente da esso.

Studiamo il movimento, in quest'ultimo periodo di tempo, dell'indice dei prezzi all'ingrosso, stabilito dal Lorentz per il mercato svizzero. Procuriamo di stabilirne la tendenza avvenire partendo dal momento in cui l'andamento ha mostrato una decisiva tendenza al ribasso in accordo con il ribasso del mercato internazionale. In altre parole si è delineata una uniformità di andamento. Le funzioni interpolanti, per brevità di computo, sono state desunte graficamente per mezzo di curve ad un sol minimo. Il periodo di osservazione va dal gennaio 1921 al dicembre 1923; gli indici sono mensili. La data di inizio è prossima al punto di massimo generale per tutto il periodo: luglio 1914 - dicembre 1923; il massimo coincide con l'ottobre-novembre 1920.

Siano i seguenti dati.

Indici mensili	φ (t)	Scarti in		Quadrati scarti	
		più	meno	più	meno
240.7	243.7	—	3.-	—	9.—
233.2	222.-	11.2		125.44	
221.7	211.7	10.-		100.—	
211.3	201.5	9.8		96.—	
185.7	194.9		9.2		84.64
183.3	190.3		7.-		49.—
178.8	186.4		7.6		57.76
177.-	183.4		6.4		40.96
180.6	180.6	—	—	—	—
184.5	178.3	6.2		38.44	
182.7	174.1	8.6		73.96	
178.2	174.-	4.2		17.64	
176.9	172.1	4.8		23.04	
172.3	171.1	1.2		1.44	
172.4	169.4	3.-		9.—	
164.5	168.9		4.4		19.36
162.1	168.1		6.-		36 —
162.8	* 167.-		4.2		17.64
163.9	167.5		3.6		12.96
164.9	167.3		2.4		5.76
165.7	167.7		2.-		4.—
164.5	167.7		3.2		10.24
170.6	169.-	1.6		2.56	
171.9	169.3	2.6		6.76	
174.7	171.1	3.6		12.96	
175.4	172.2	3.2		10.24	

F (t)	Scarti in	Quadrati

185.9	175.9	10,-		100.—						
186.5	1 6.9	9.6		92.16		186.5	—	—	—	—
181.-	178.2	2.8		7.84		181.-	—	—	—	—
179.8	179.8	—	—	—	—	178.4	1.4		1.96	
175.3	181.6		6.3		39.69	176.3		1.-		1.—
173.4	183.9		10.5		110.25	* 176.-		2.6		6.76
181.1	185.5		4.4		19.36	177.5	2.6		6.76	
181.6	187.5		5.9		34.81	181.-	-.6		-.36	
182.5	189.7		7 2		51.84	183.5	—	1.-		1.—
$\frac{1}{36}\sum_1^{36} a_i = \frac{6528._4}{36} = 181._{34}$	$\frac{1}{36}\sum_1^{3} \varphi(t_i) = \frac{6521._9}{36} = 181._{47}$	$\sum_1^{17}: 99_8$	$-\sum_1^{17}: 93_3$	$\sum_1^{17}: 772._{24}$	$= \sum_1^{17}: 603._{27}$	$\frac{1}{8}\sum_1^{8} F(t_i) = 180._{025}$	$\sum_1^{3}: 4_{60}$	$-\sum_1^{3}: 4._{60}$	$\sum_1^{3}: 9._{08}$	$\Vert \sum_1^{3}: 8._{76}$

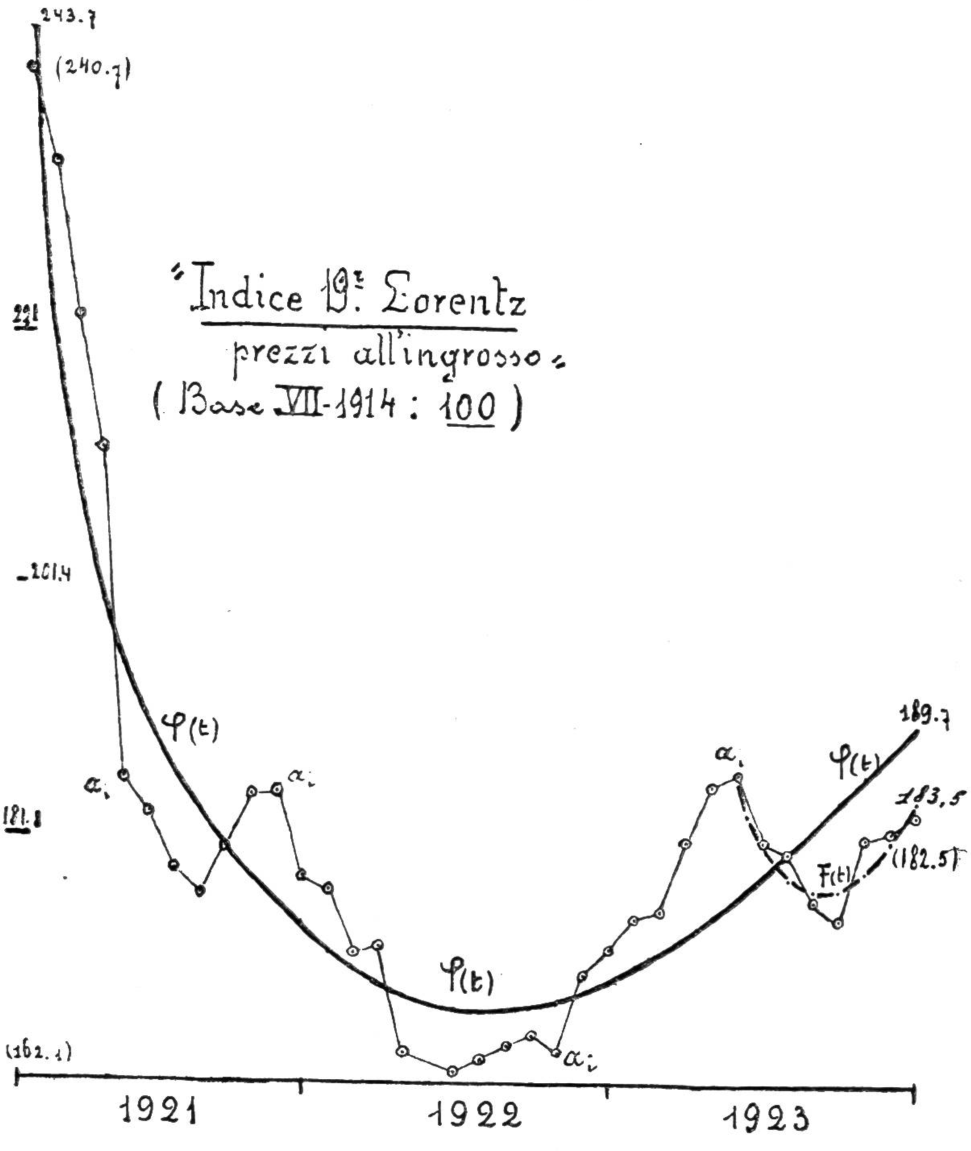
$$\underbrace{\sum_1^{17}: 99_8 - \sum_1^{17}: 93_3}_{6\,5} \qquad \underbrace{\sum_1^{17}: 772._{24} = \sum_1^{17}: 603._{27}}_{1375._{51}} \qquad \underbrace{\sum_1^{3}: 4_{60} - \sum_1^{3}: 4._{60}}_{0} \qquad \underbrace{\sum_1^{3}: 9._{08} \Vert \sum_1^{3}: 8._{76}}_{17._{84}}$$

$$M_{(sc.)} = \frac{6.5}{36} = 0.180 \qquad \mu = \sqrt{\frac{1375._{51}}{36}} = 6._{17} \qquad g = \sqrt{\frac{17_{84}}{8}} = 1._{49}$$

$$\frac{a_o}{F(t_o)} = \frac{182.5}{183.5} = 0.994 \,; \qquad p = 0.994.\ e^{-(t\ 6.17 + 1.49)}$$

La media dei dati grezzi è di poco diversa dalla media dei dati perequati e lo scarto medio dà un buon indice di adattamento della funzione interpolatoria adottata al diagramma primitivo. Lo stesso dicasi della funzione adottata per l'ultimo periodo di tempo. Diamo ora il quadro delle variazioni e del loro coefficente di probabilità; calcoliamo inoltre le successive speranze matematiche.

Variazioni		Coefficente di probab. (arrot.)	Successione delle speranze matematiche	
in più	in meno		in più	in meno
—	—	—	—	—
	7.5	2.10^{-92}		$1,5 . 10^{-91}$
	11.5	9.10^{-90}		$1,- . 10^{-88}$
	10.4	4.10^{-87}		$4,1 . 10^{-86}$
	25.6	2.10^{-84}		$5,1 . 10^{-83}$
	2.4	$9\ 10^{-82}$		$2,2 . 10^{-81}$
	4.5	4.10^{-79}		$1,8 . 10^{-78}$
	1.8	2.10^{-76}		$3,6 . 10^{-76}$
3.6		1.10^{-73}	$3,6 . 10^{-73}$	
3.9		5.10^{-71}	$1,- . 10^{-70}$	
	1.8	2.10^{-68}		$3,6 . 10^{-68}$
	4.5	1.10^{-65}		$4,5 . 10^{-65}$
	1.3	5.10^{-63}		$6,5 . 10^{-63}$
	4.6	3.10^{-60}		$1,4 . 10^{-59}$
-.1		1.10^{-57}	$1,- . 10^{-58}$	
	17.9	6.10^{-55}		$1,1 . 10^{-53}$
	2.4	3.10^{-52}		$7,2 . 10^{-52}$
-.7		1.10^{-49}	$7,- . 10^{-50}$	
1.1		6.10^{-47}	$6,6 . 10^{-47}$	
1.-		3.10^{-44}	$3,- . 10^{-44}$	
-.8		1.10^{-41}	$8,- . 10^{-42}$	
	1.2	7.10^{-39}		$8,4 . 10^{-39}$
6.1		3.10^{-36}	$1,8 . 10^{-35}$	
1.3		2.10^{-33}	$2,6 . 10^{-33}$	
2.8		7.10^{-31}	$1,9 . 10^{-30}$	
-.7		4.10^{-28}	$2,8 . 10^{-28}$	
5.6		2.10^{-25}	$1,1 . 10^{-24}$	
4.9		8.10^{-23}	$4,3 . 10^{-22}$	
-.6		4.10^{-20}	$2,4 . 10^{-20}$	
	5.5	4.10^{-17}		$2,2 . 10^{-16}$
	1.2	9.10^{-15}		$1,- . 10^{-14}$
	4.5	4.10^{12}		$1,8 . 10^{-11}$
	1.9	2.10^{-9}		$3,8 . 10^{-9}$
7.7		$1\ 10^{-9}$	$7,7 . 10^{-6}$	
-.5		5.10^{-4}	$2,5 . 10^{-4}$	
-.9		2.10^{-1}	$1,8 . 10^{-1}$	



La somma delle speranze matematiche positive è un numero la cui cifra significativa più alta è di ordine superiore dell'ordine della cifra significativa più alta del numero rappresentante la somma delle speranze matematiche negative. Di conseguenza prevale la prima sulla seconda somma: l'indice dei prezzi, si conclude, tende al rialzo.

Applicando le formule date si otterrà il valore della variazione e il suo coefficente di probabilità.

Osserviamo che qualora ci avvicinassimo nel suddetto rapporto, ad una frazione avente al numeratore o al denominatore un numero tendente allo zero, ci troviamo nel caso di indeterminatezza; poichè, al limite, $\frac{0}{0}$ è eguale al rapporto delle derivate delle funzioni numeratore e denominatore (nel nostro caso delle funzioni rappresentanti la successione delle speranze matematiche positive e negative) occorre vedere se tale rapporto resti ancora indeterminato, oppure tenda ad un limite, secondo il quale si deciderà il carattere della tendenza. Se il rapporto primitivo o quello delle derivate è eguale all'unità, non vi sarà nè tendenza al rialzo nè al ribasso, ma probabile costanza del fenomeno in istudio. Lo stesso risultato si otterà se le variazioni sono nulle e, di conseguenza, anche le speranze matematiche eguali allo zero. Si interpreta così il rapporto $\frac{0}{0}$ eguale all'unità; escludiamo in tal modo il caso di indeterminatezza.

Non so se le note precedenti possano interessare i lettori del bollettino dell' " Associazione Ticinese di Scienze Naturali „; ad ogni modo, se crede opportuno, può pubblicare il presente scritto nel prossimo numero.

Con i migliori saluti e ringraziamenti

Dev.mo ARRIGO BORDIN

Bellinzona, marzo 1924.