

**Zeitschrift:** Bollettino della Società ticinese di scienze naturali  
**Herausgeber:** Società ticinese di scienze naturali  
**Band:** 15 (1920)

**Artikel:** Linea dei punti brillanti di sfere concentriche  
**Autor:** Ferri, Giovanni  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1002881>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.05.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

PROF. GIOVANNI FERRI

## Linea dei Punti brillanti di sfere concentriche

*Letto alla Sezione di Matematica del Congresso della Società Elvetica di Scienze naturali, in Lugano, l'8 settembre 1919.*

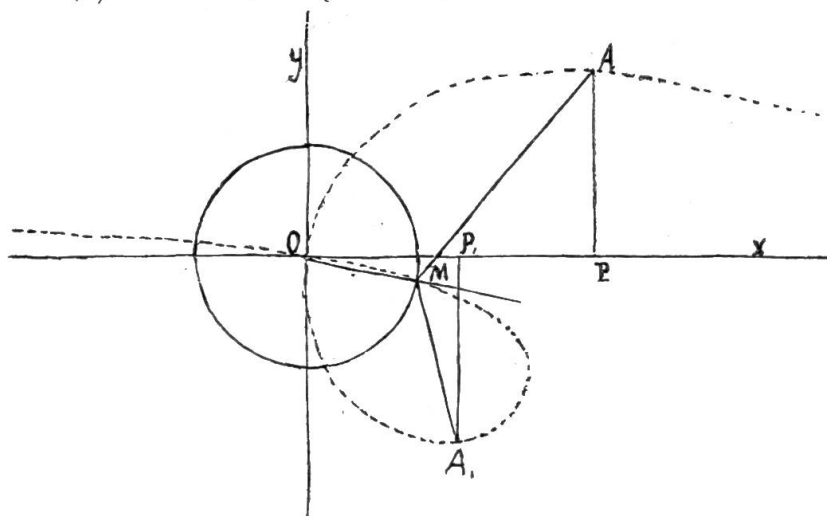
Sia il centro delle sfere  $O$ , il punto luminoso  $A$ , il punto di vista  $A_1$ ; il punto brillante  $M$  di una sfera; esso sarà nel piano  $AA_1O$ .

Coordinate ortogonali coll'origine in  $O$  e l'asse  $Ox$  per il punto di mezzo della  $AA_1$ . Le coordinate dei punti:

$M; x, y$  .—  $A; p, q$  .—  $A_1; p_1, q_1$  .—  $p > p_1$

Le equazioni delle rette

- (1) per  $AM$ ;  $y - q = a(x - p)$
- (2) »  $A_1M$ ;  $y + q_1 = a_1(x - p_1)$
- (3) »  $OM$ ;  $y = n x$



In generale per due rette

$$y = a x + b$$

$$y = a_1 x + b_1$$

Le bisettrici dei loro angoli sono

$$\frac{y - a x - b}{\sqrt{1 + a^2}} = \pm \frac{y - a_1 x - b_1}{\sqrt{1 + a_1^2}}$$

ossia

$$y = \frac{a\sqrt{1+a_1^2} - a_1\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a_1^2} - \sqrt{1+a^2}}x + \frac{b\sqrt{1+a_1^2} - b_1\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a_1^2} - \sqrt{1+a^2}}$$

Nel nostro caso, la normale  $OM$  dovendo bisecare l'angolo delle due rette  $AMA_1$  dovrà stare l'uguaglianza dei coefficienti di direzione; cioè

$$\frac{a\sqrt{1+a_1^2} - a_1\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a_1^2} - \sqrt{1+a^2}} = n$$

che equivale alla

$$(a + a_1)(1 - n^2) - 2(1 - aa_1)n = 0$$

Ponendo i valori dei coefficienti (1), (2), (3)

$$a = \frac{y-q}{x-p} \quad ; \quad a_1 = \frac{y+q}{x-p_1} \quad ; \quad n = \frac{y}{x}$$

si giunge alla equazione del luogo dei punti brillanti delle sfere concentriche,

$$(p+p_1)(x^2+y^2)y - (p-p_1)(x^2-y^2)q - 2(q^2+pp_1)xy = 0$$

*Disposizione della linea.* Essa passa per  $A$  e per  $A_1$  poichè l'equazione è soddisfatta per  $x=p$  ed  $y=q$  poi anche per  $x=p_1$  ed  $y=-q$

La linea passa nel centro  $O$  poichè posto  $x=0$  l'equazione riducesi alla

$$[(p+p_1)y + (p-p_1)q]y^2 = 0$$

soddisfatta per  $y=0$ .

Poi anche dalla  $(p+p_1)y + (p-p_1)q = 0$  quindi un secondo valore:

$$y_1 = \frac{p_1 - p}{p + p_1} q$$

indicante che la linea interseca l'asse  $Oy$  anche nella sua parte negativa; essendo  $p_1 < p$ .

Nel centro  $O$  si intersecano due rami della linea (punto multiplo) perchè differenziandone due volte successivamente l'equazione, e posto  $x=0$  ed  $y=0$  si giunge ad un trinomio completo del 2° grado rispetto alla derivata di  $y$  che conduce a due valori diversi di questa derivata e quindi a due diverse tangenti alla curva nel punto  $O$ .

Il polinomio è di terzo grado rispetto ad  $y$  e per un dato  $x$ , positivo o negativo, ammette tre valori di  $y$ ; dei quali uno sempre reale e positivo perchè l'ultimo termine del polinomio ordinato per  $y$  rimane negativo, contenendo  $x^2$ .

*Assintoto.* — Se dividesi il polinomio per  $x^2$  e si pone poi  $x = \infty$ , rimane  $(p+p_1)y - (p-p_1)q = 0$  ossia

$$y = \frac{p-p_1}{p+p_1} q$$

retta assintota parallela  $Ox$ , dalla parte positiva.

Il polinomio è di secondo grado rispetto ad  $x$  e per un dato valore d'  $y$  ammette due valori d'  $x$ : però reali soltanto fino a quando i coefficienti d'  $x^2$  e d'  $x$  soddisfano alla nota condizione  $B^2 - 4AC \geq 0$ , che nel nostro caso corrisponde a  $(q^2+pp_1)^2 \geq (p+p_1)^2 y^2 - (p-p_1)^2 q^2$  ossia alla

$$y_m \leq \frac{\pm \sqrt{(p^2+q^2)(p_1^2+q^2)}}{p+p_1} = \frac{\pm OA \times OA_1}{p+p_1}$$

Quando  $AA_1$  fossero equidistanti da  $O$ , cioè  $p = p_1$  l'equazione si riduce:

$$[p(x^2+y^2) - (p^2+q^2)x]y = 0$$

Soddisfatta da  $y = 0$ , cioè la linea riducesi all'asse  $Ox$ . Poi anche dalla

$$x^2 + y^2 - \frac{p^2+q^2}{p} x = 0$$

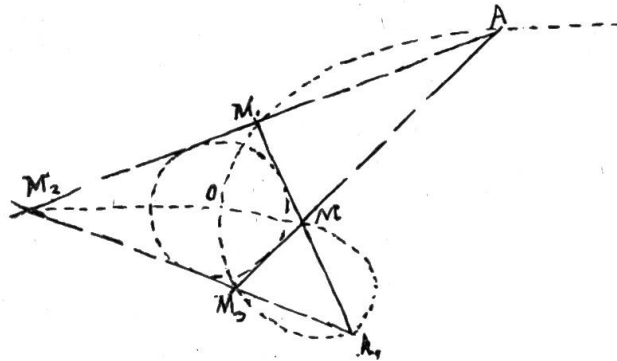
cioè la circonferenza col centro sulla  $Ox$ , e che passa nel centro  $O$ .

Quando  $A$  è a distanza infinita (raggi luminosi paralleli)  $p = \infty$  e la equazione del luogo dei punti brillanti si riduce alla

$$(y-q)x^2 - 2p_1xy + (q+y)y^2 = 0$$

che ha come assintoto  $y = q$  parallela  $Ox$ .

*Costruzione grafica della linea.* — Mediante le tangenti per  $A$  e per  $A_1$  alle circonferenze concentriche in  $O$ . Per ogni

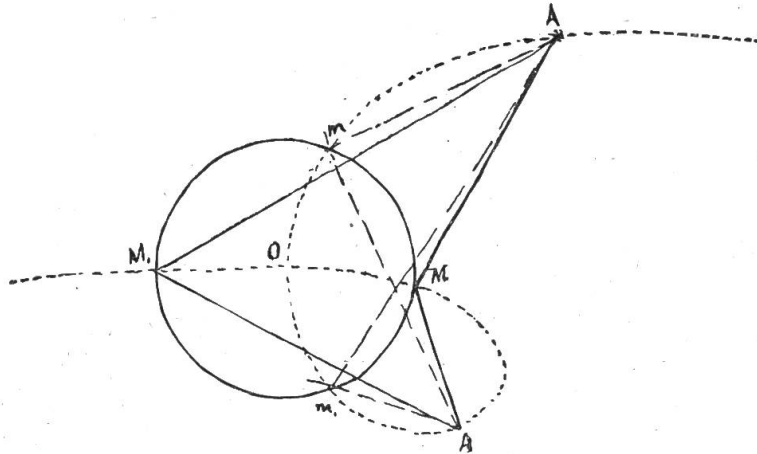


circonferenza si hanno due coppie di tangenti per i punti A ed A<sub>1</sub> e quattro punti di intersecazione M M<sub>1</sub> M<sub>2</sub> M<sub>3</sub> che sono punti del luogo dei punti brillanti.

*Punti brillanti di una sfera data.* — Si otterranno colla intersecazione della linea dei punti brillanti colla circonferenza della sfera nel piano dei tre punti O A A<sub>1</sub> cioè risolvendo le equazioni simultanee

$$\begin{aligned} (p+p_1)(x^2+y^2)y - (p-p_1)(x^2-y^2)q - 2(q^2+pp_1)xy &= 0 \\ x^2+y^2 &= r^2 \end{aligned}$$

Si giunge a delle funzioni di 4° grado sia per x che per y, quindi a quattro coppie di coordinate, che potranno essere tutte, oppur due sole, coppie reali determinanti quattro



punti oppure soltanto due, sulla sfera a seconda del raggio di questa.

Si noti però che soltanto due dei punti (M M<sub>1</sub>) corrispondono a punti di riflessione dei raggi fisici, l'uno sulla parte convessa M l'altro sulla concava M<sub>1</sub> della sfera.

Gli altri due punti m m<sub>1</sub> rispondono soltanto alla condizione geometrica della bisezione degli angoli supplementari delle rette per A ed A<sub>1</sub> fatta dalle normali rispettive per il centro O.