

Über winkeltreue Dreiecksprojektion

Autor(en): **Parker, Robert L.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische mineralogische und petrographische Mitteilungen
= Bulletin suisse de minéralogie et pétrographie**

Band (Jahr): **16 (1936)**

Heft 1

PDF erstellt am: **17.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-16100>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Über winkeltreue Dreiecksprojektion

Von *Robert L. Parker* in Zürich

Als kristallographische Dreiecksprojektion kann jede gnomonische Projektion bezeichnet werden, die derart orientiert ist, dass die Flächen (100), (010), (001) (im folgenden kurz als die drei Hauptpinakoide bezeichnet) in endlicher Entfernung des Projektionszentrums liegen und die Eckpunkte eines „Grunddreiecks“ liefern. In dasselbe fallen die Pole aller Flächen eines Quadranten des Kristalls. Hierin liegt der besondere Vorzug dieser Projektionsart gegenüber normalorientierten gnomonischen Projektionen begründet: es können die Flächen (hkl) (oder $(\bar{h}kl)$ u. s. w.) gesamthaft zur Darstellung gebracht werden, ohne dass auf die übersichtlichen und leicht zu zeichnenden, geradlinigen Zonenverbände der gnomonischen Projektion verzichtet werden muss.

Jede solche Dreiecksprojektion ist winkeltreu, insofern sie streng nach den Gesetzen der gnomonischen Projektion konstruiert wird; doch können hinsichtlich der weiteren Eigenschaften verschiedene Fälle unterschieden werden:

a) Wird die Projektion auf einer Ebene ausgeführt, die senkrecht zu einer rationalen Kantenrichtung [uvw] steht, so liegen in 90°-Abstand, projektiv also im Unendlichen, alle Flächenpole der betreffenden Zone. Es folgt daraus, dass sich die Zonenlinien in Parallelscharen auflösen lassen, von denen jede einzelne alle diejenigen Zonen umfasst, die demselben unendlich fernen „Prismenpunkt“ zustreben. Innerhalb jeder Parallelschar werden die Abstandsverhältnisse der Zonengeraden durch die bekannten, einfachen Beziehungen zu den Indizes bestimmt.

b) Fungiert als Projektionsebene eine rationale Fläche (hkl), so werden im allgemeinen keine Pole anderer rationaler Flächen in 90°-Abstand des Zentrums liegen. Darum werden sich jetzt die Zonengeraden nicht wie im letzten Falle in Parallelscharen unterteilen lassen. Demgegenüber befinden sich aber stets die Ausstichpunkte der in der Projektionsebene liegenden Zonenrichtungen im unend-

lichen, so dass das Projektionszentrum der Schnittpunkt aller betreffenden Zonenlinien darstellt.

c) Wählt man als Projektionsebene eine beliebige, irrationale Flächenlage, so werden im allgemeinen weder die einen noch die anderen der obenerwähnten Merkmale in Erscheinung treten. Durch geeignete Wahl der Ebene können dafür unter Umständen andere Vorzüge in das Projektionsbild gebracht werden, die bei den Fällen a) und b) nicht realisierbar sind (siehe unten).

Währenddem für gnomonische Projektionen ohne Dreieckscharakter sich in allen Kristallsystemen bis und mit dem monoklinen Ebenen spezialisierter Lage finden lassen, für welche die Verhältnisse a) und b) gleichzeitig zutreffen und die somit als ausgezeichnete Projektionsebenen anzusprechen sind, trifft das für die Dreiecksprojektion nur im kubischen System zu, weshalb dieser Fall zuerst betrachtet werden soll.

Da bei kubischen Kristallen Flächennormalenbündel und Zonenbündel zusammenfallen, liefert jede beliebige Fläche (hkl) eine Dreiecksprojektion, in der die Verhältnisse a) und b) gleichzeitig realisiert sind. Dabei muss aber eine Fläche, nämlich $O = (111)$, als besonders bevorzugt angesehen werden, da sie das Grunddreieck als gleichseitiges Dreieck zur Abbildung bringt, dessen Mittelpunkt mit dem Zentrum der Projektion übereinstimmt. Derart orientierte gnomonische Projektionen sind in der Praxis viel angewendet worden und V. GOLDSCHMIDT gab in seinem „Kursus der Kristallometrie“ (Berlin 1934) eine für sie gültige Winkeltabelle. Als eigentliche Dreiecksprojektion (d. h. unter Beschränkung der Figur auf das Grunddreieck und ihren Inhalt) ist diese Darstellungsweise von P. NIGGLI eingeführt worden (Lehrbuch der Mineralogie, 1. Band, II. Auflage, Berlin 1924). Er machte darauf aufmerksam, dass die Eintragung der Flächenpole nach ihren Indizes besonders einfach ist, indem die Dreieckskoordinaten für (hkl) sofort durch die als Prozente der Indizessumme ausgedrückten Einzelindizes gegeben sind. Eine von ihm gegebene, ausführliche Zahlentafel (loc. cit., S. 124) lässt jede Rechnung ausschalten. Es ist gelegentlich übersehen worden, dass derartig projizierte Flächenkomplexe winkeltreu sind und jeden beliebigen Flächenabstand zu ermitteln gestatten (Winkelpunktkonstruktion!).

Da bei den niedrigersymmetrischen Kristallsystemen alle Vorteile der kubischen Projektion nicht gleichzeitig beibehalten werden können, muss entschieden werden, welche Eigenschaften als besonders wertvoll anzusehen sind. Insofern solche Fragen bis jetzt erörtert wurden (P. NIGGLI, loc. cit.), wurden die Verhältnisse a) in

den Vordergrund gestellt und auch bei nichtkubischen Kristallen die Projektion auf eine Ebene senkrecht zu $[111]$ vorgeschlagen, wobei auch Formeln zur Berechnung der im allgemeinen nun ungleichseitig ausgebildeten Grunddreiecke gegeben wurden. Im praktischen Gebrauch erweisen sich solche Projektionen als nicht sonderlich zweckmässig. Die von Mineral zu Mineral wechselnde Projektionsebene und die damit verbundene, wechselnde Grösse und Form der Grunddreiecke erschwert die Übersicht, auch ist die Punkteintragung (die theoretisch einfach bleibt) entfernt nicht so bequem zu handhaben

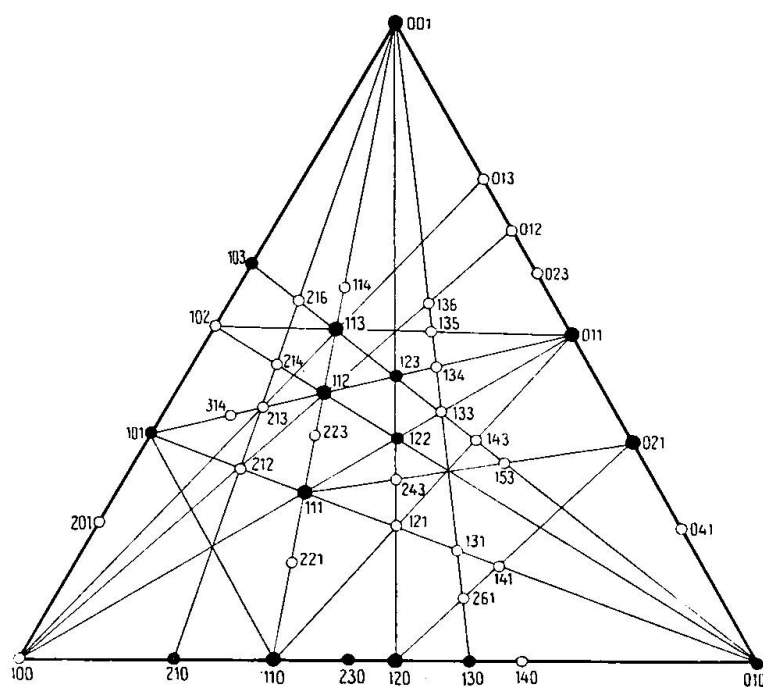


Fig. 1. Winkeltreue Dreiecksprojektion von Topas

als im gleichseitigen Dreieck. Diese Gründe mögen mit dazu beigetragen haben, dass für morphologische Vergleichszwecke (siehe P. NIOGLI, Lehrbuch der Mineralogie, 2. Band, Berlin 1927) eine schematische Dreiecksprojektion für die nichtkubischen Mineralien bevorzugt wurde, wobei unter Verzicht auf die Kristallmetrik die Flächen und Zonen solcher Kristallarten nach der kubischen Berechnungsformel in das gleichseitige Dreieck eingetragen wurden und so zwar vollkommen übersichtlich, aber ohne Winkeltreue zur Darstellung gelangten.

Es kann nun die Frage gestellt werden, ob auch eine winkeltreue Darstellung im gleichseitigen Dreieck für die nichtkubischen Mineralien erreicht werden kann. Die Überlegung zeigt, dass diese Forderung für alle Kristalle mit rechtwinkligem oder

hexagonalem Achsenkreuz realisierbar ist, und zwar dann, wenn solche Individuen mittels strenger Konstruktion auf die für sie irrationale Fläche $O = (111)$ (kubisch) gnomonisch projiziert werden. In Figur 1 ist eine derartige Projektion für den allgemeinen Fall eines rhombischen Kristalls (Topas) wiedergegeben. Die Hauptpinakoide nehmen auch hier die Eckpunkte des Dreiecks ein, und die nichtkubische Metrik äussert sich in einem Wegrücken der Einheitsfläche vom Zentrum und einer entsprechenden Verlegung aller anderen Flächen von ihren kubischen Positionen. Das Diagramm darf

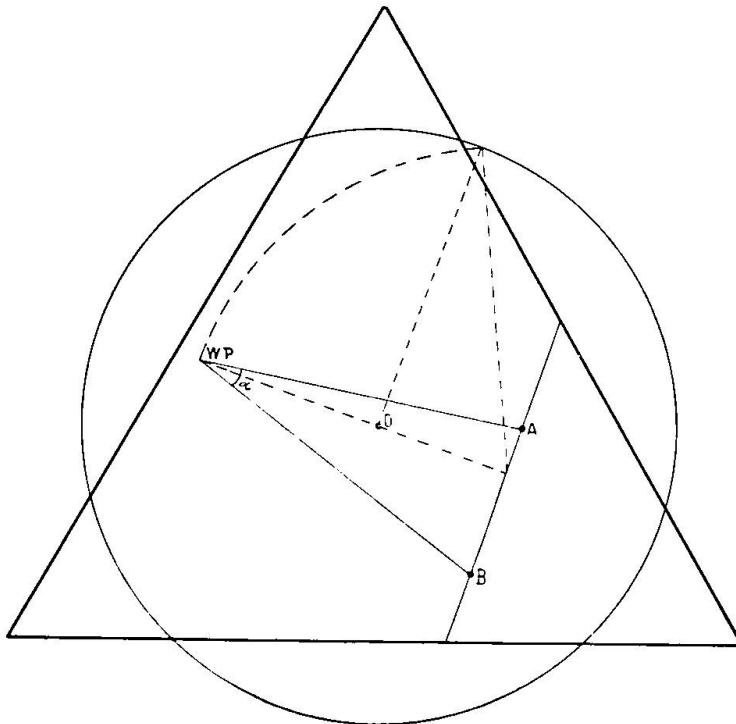


Fig. 2. Winkelmessung im gleichseitigen Dreieck

als übersichtlich bezeichnet werden, trotzdem Parallelscharen von Zonen nicht mehr auftreten. Die sehr wichtigen Zonenlinien der (hkl) mit den Hauptpinakoiden präsentieren sich natürlich auch hier in ähnlicher Weise wie im kubischen Diagramm. Zur Eintragung der Pole steht die kubische „Prozentformel“ nicht mehr zur Verfügung, doch bieten die unten mitgeteilten Ausdrücke für die „Elemente“ dieser speziellen Ausführung der gnomonischen Projektion einen in allen Fällen bequem zu handhabenden Ersatz. Mittels der üblichen Winkelpunkt konstruktion, die in Figur 2 wiedergegeben ist, oder auch durch den Gebrauch eines in geeignetem Masstabe konstruierten gnomonischen Netzes können alle Winkelverhältnisse der Flächen gemessen werden. Fast wichtiger als diese quantitative Ausnützung

der winkeltreuen Wiedergabe erscheint ihre qualitative oder anschauliche Verwertung; denn das Diagramm vermittelt nicht nur eine Übersicht der allgemeinen Lage von Flächen und Zonen, sondern erlaubt gleichzeitig die Beurteilung ihrer metrischen Eigentümlichkeiten. So ist ersichtlich, dass bei Topas das Vorwiegen von Flächen mit $k \gtrsim h$ nicht etwa eine asymmetrische Anhäufung von Flächen bedeutet, sondern einer recht gleichmässigen Flächenverteilung bei stark einseitiger Lage der Einheitsfläche entspricht. Im übrigen erweist sich die Metrik als eine stark pseudokubische, indem die Lagen der Rhomben-

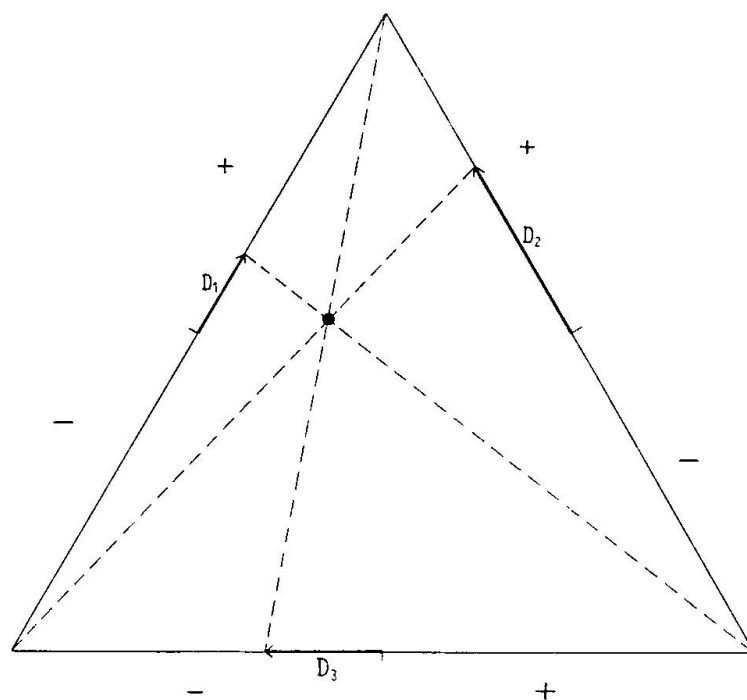


Fig. 3. Elemente der winkeltreuen Dreiecksprojektion

dodekaederflächen des kubischen Systems (Mittelpunkte der Dreiecksseiten) fast genau mit wichtigen, einfach indizierten Flächen besetzt sind, und auch das Zentrum der Projektion fällt nahezu mit dem Pol einer einfachen Fläche (122) zusammen.

Bei hexagonalen Kristallen sind die Eckpunkte des Dreiecks durch (0001) oben, (10 $\bar{1}$ 0) links und ($\bar{1}$ 2 $\bar{1}$ 0) rechts besetzt. Je ein weiteres Prisma I. und II. Stellung befindet sich auf der Basislinie. Es ist selbstverständlich, dass die Darstellung sich nicht auf die Flächen im Dreieck zu beschränken braucht, sondern auch die näherliegenden Pole der benachbarten Quadranten miterfassen kann. Die unten mitgeteilten Formeln behalten für solche Fälle ihre Gültigkeit bei. Das zeigt, wie auch monokline und triklone Formenkomplexe, bei denen einzelne Quadranten das Gebiet des gleichseitigen Dreiecks überschreiten können, zur Darstellung zu bringen sind. Die

resultierenden, ungleichseitigen Dreiecke besitzen nicht die Übersichtlichkeit der normalen Figuren, doch sind sie wenigstens ohne jede längere Rechnung ausführbar. Auf alle Fälle behält auch in diesen Systemen das gleichseitige Dreieck eine Bedeutung bei, indem es das rechtwinklige Koordinatensystem veranschaulicht, auf welches die zweikreisige Kristallmessung und die darauf fussende Berechnungsweise der Kristalle sich beziehen.

Für die Eintragung der einzelnen Flächenpole lässt sich zunächst ein gnomonisches Netz von geeignetem Radius (siehe unten) verwenden, doch kann auch sehr zweckmässig ohne ein solches Hilfsmittel gearbeitet werden. Die Lage der Flächen wird dann mit Hilfe der in Figur 3 veranschaulichten Koordinaten D_1 , D_2 , D_3 fixiert. Dieselben stellen die Abstände dar zwischen den Mittelpunkten der Dreiecksseiten und den Fusspunkten der durch die Hauptpinakoide und die betreffende, zu fixierende Fläche gezogenen Zonenlinien, wobei auch auf das Vorzeichen der Werte im Sinne von Figur 3 zu achten ist. Es besteht folgender, einfacher Zusammenhang zwischen D_1 , D_2 , D_3 und den Winkeln ξ_0 , η_0 , φ , welche in V. GOLDSCHMIDTS Kristallographischen Winkeltabellen (Heidelberg 1897) für jede Form explicite angegeben sind.

$$I \quad \left\{ \begin{array}{l} D_1 = \frac{L}{2} \operatorname{tg} (45 - \xi_0) \\ D_2 = \frac{L}{2} \operatorname{tg} (45 - \eta_0) \\ D_3 = \frac{L}{2} \operatorname{tg} (45 - \varphi) \end{array} \right.$$

In diesen Ausdrücken bedeutet L die Länge der Dreiecksseite. Für einen Grundkreisradius der Projektion $R = 1$ beträgt $L = 2,45$ und andererseits ist $R = 4,08$ für $L = 10$ oder $R = 8,16$ für $L = 20$. Die Verwendung der letzteren Masse ist besonders bequem, weil einerseits $\frac{L}{2} = 10$, was einfach einer Kommaverschiebung entspricht, andererseits weil vorgedrucktes „Dreieckspapier“ von dieser Grösse im Handel leicht erhältlich ist. Diese Ausdrücke sind in allen Systemen zur Festlegung der Flächen gültig.

In den rechtwinkligen Systemen stehen die D -Koordinaten auch mit den „GOLDSCHMIDT-Indizes“ der Flächen in einfachem Zusammenhang. Es sind

$$II \quad \left\{ \begin{array}{l} D_1 = \frac{L}{2} \left(\frac{1 - pp_0}{1 + pp_0} \right) \\ D_2 = \frac{L}{2} \left(\frac{1 - qq_0}{1 + qq_0} \right) \end{array} \right.$$

Da in der Praxis die D-Werte nur auf eine Dezimalstelle berechnet zu werden brauchen, kann mit Hilfe eines Rechenschiebers die Auswertung dieser Ausdrücke laufend vorgenommen werden. Bei der Projektion grösserer Flächenkomplexe machen sich die Zonenbeziehungen immer stark geltend, so dass sich die numerische Lagenfixierung für viele Flächen ganz erübrigt.

Besonders wertvolle Dienste leistet diese Projektionsart bei der Diskussion von Transformationen im rhombischen System. Die Flächenkonfiguration im Dreieck ist nämlich unabhängig von der bevorzugten Aufstellung und der Wahl der Einheitsfläche. So erhält man z. B. für Staurolith in den Aufstellungen von DES CLOIZEAUX und GOLDSCHMIDT (wobei letztere $(100) = (100)$, $(010) = (001)$, $(001) = (010)$, $(111) = (232)$ der älteren Aufstellung hat) Diagramme, die durch einfache Umkehr des Papiers zur Deckung gebracht werden können.

Mineralogische Sammlung der Eidg. Technischen Hochschule.

Eingegangen: 27. Mai 1936.