Zeitschrift: Schweizerische mineralogische und petrographische Mitteilungen = Bulletin suisse de minéralogie et pétrographie

Band: 55 (1975)

Heft: 3

Artikel: Vektorielle Formulierung der Fresnelschen Konstruktion und Berechnung der Auslöschungsschiefe für beliebige Kristallflächen in bezug auf beliebige Bezugsrichtungen

Autor: Burri, Conrad

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43076

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Schweiz. mineral. petrogr. Mitt. 55, 371–395, 1975

Vektorielle Formulierung der Fresnelschen Konstruktion und Berechnung der Auslöschungsschiefe für beliebige Kristallflächen in bezug auf beliebige Bezugsrichtungen

Von *Conrad Burri* *)

Mit 8 Figuren

Zusammenfassung

Es werden zwei Varianten der FRESNELschen Konstruktion gegeben, welche deren vektorielle Formulierung erleichtern, und es wird gezeigt, wie sich die Auslöschungsschiefen für beliebige Kristallflächen, gegenüber beliebigen Bezugsrichtungen, durch einen einfachen Vektorausdruck berechnen lassen, unabhängig vom Kristallsystem und von der Symmetrie der Indikatrix.

Summary

Two modifications of FRESNEL's construction are suggested in order to adapt it to vectorial treatment, and a simple method is given allowing the computation of the extinction angles for any given crystal face, for any reference direction, irrespective of the crystal system or the symmetry of the indicatrix.

Inhalt

I. Das Theorem von FRESNEL und seine Formulierung 372
II. Die FRESNELsche Konstruktion und ihre Varianten 375
1. Die klassische Form der Konstruktion 375
2. Varianten der FRESNELschen Konstruktion 375
3. Umkehr der FRESNELschen Konstruktion 377
III. Die rechnerische Auswertung der FRESNELschen Konstruktion 378
1. Bisherige Versuche 378
2. Die vektorielle Formulierung des Problems und seine Lösung 379
3. Einführung eines Bezugssystems 381
4. Optisch-zweiachsige Kristalle 384
5. Beispiele 385
6. Optisch-einachsige Kristalle 390
7. Beispiele 391
IV. Zitierte Literatur 395

*) Institut für Kristallographie und Petrographie, ETH-Zentrum, CH-8092 Zürich

I. DAS THEOREM VON FRESNEL UND SEINE FORMULIERUNG

Der Satz von FRESNEL, vielleicht der wichtigste Satz der Kristalloptik, findet sich zum ersten Male in seiner berühmten Abhandlung «Second Mémoire sur la Double Réfraction» ausgesprochen, welche zu Recht als einer der grundlegenden Beiträge zur Kristalloptik angesehen wird.

In ihr wird unter anderm zum ersten Male experimentell und theoretisch gezeigt, dass es für zweiachsige Kristalle, im Gegensatz zu den einachsigen, keine Wellen gibt, die, unabhängig von Fortpflanzungs- und Schwingungsrichtung, eine konstante Lichtbrechung aufweisen, sowie, dass sich deren optisches Verhalten mit Hilfe einer dreiachsigen Bezugsfläche erschöpfend darstellen lässt[1]). Die Formulierung des Satzes lautet im Original:

«*En considérant toujours comme véritable plan de polarisation celui qui est perpendiculaire aux vibrations lumineuses, je vais démontrer que les plans de polarisation des ondes ordinaires et extraordinaires divisent en deux parties égales les angles dièdres formés par les deux plans menés suivant la normale à l'onde et les deux normales aux plans des sections circulaires de la surface d'élasticité.*»

Auf den durch FRESNEL gegebenen Beweis, welcher sich der durch ihn eingeführten Elastizitätsfläche bedient, soll hier nicht eingegangen werden. An seiner Stelle wird im folgenden ein solcher gegeben, welcher von der heute gebräuchlicheren Indikatrix (Indexellipsoid) Gebrauch macht. Dagegen dürfte es jedoch angebracht sein, kurz auf einige Punkte der FRESNELschen Formulierung einzugehen, welche entweder nur aus der damals herrschenden Situation verständlich sind oder welche mit der heute üblichen Terminologie im Widerspruch stehen.

Der Hinweis auf den «véritable plan de polarisation» ist durch die damals sehr aktuelle Streitfrage bedingt, ob die Lichtschwingungen normal zur MALUSschen Polarisationsebene (FRESNELscher Lichtvektor) oder aber parallel dazu erfolgten (NEUMANNscher Lichtvektor). Da man heute annimmt, dass die physiologisch empfundene Lichtwirkung durch die dielektrische Verschiebung bedingt ist, deren Vektor normal zur Polarisationsebene der Welle steht, hat die elektromagnetische Lichttheorie den Entscheid mittlerweile zugunsten von FRESNEL gebracht. Dass für zweiachsige Kristalle von «ondes ordinaires» bzw. «extraordinaires» gesprochen wird, mag auf den ersten Blick besonders befremden, da es ja gerade FRESNEL war, welcher in der gleichen Abhandlung bewiesen hatte, dass es für zweiachsige Kristalle keine «ordentlichen» Wellen im

---

[1]) Die Abhandlung wurde von FRESNEL in den Jahren 1821 und 1822 in drei Teilen der Pariser Académie des Sciences vorgelegt und am 19. August 1822 auf Antrag einer aus AMPÈRE, ARAGO und FOURIER bestehenden Kommission zur Veröffentlichung in deren Denkschriften angenommen. Sie findet sich wieder abgedruckt in den «Œuvres complètes d'AUGUSTIN FRESNEL», Bd. 2, S. 479–596. Die hier interessierende Stelle befindet sich auf S. 581.

Sinne der heutigen Auffassung geben könne. Der Grund für diesen scheinbaren Widerspruch liegt jedoch darin, dass die Begriffe damals einen andern Sinn hatten als heute. Unter «ordentlicher» Welle eines zweiachsigen Kristalls wurde damals diejenige Welle verstanden, deren Polarisationsebene im spitzen räumlichen Winkel der beiden Ebenen liegt, welche durch die Wellennormale und die beiden optischen Achsen bestimmt werden, und als «ausserordentliche» Welle diejenige mit der Polarisationsebene im stumpfen Winkel derselben. Da heute allgemein an Stelle der Polarisationsebenen die dazu normal stehenden Schwingungsebenen betrachtet werden, würden diese somit für «ordentliche» Welle im stumpfen, für die «ausserordentliche» jedoch im spitzen Winkel der durch die Wellenormale und die optischen Achsen aufgespannten Ebenen liegen. Heute sind jedoch bekanntlich die Begriffe «ordentliche» bzw. «ausserordentliche» Welle nur noch in bezug auf einachsige Kristalle gebräuchlich.

Während der hier interessierende Satz in der zitierten Abhandlung von FRESNEL keineswegs in irgendeiner Weise hervorgehoben wird oder sonst eine besondere Stellung einnimmt, wird ihm heute eine wesentlich grössere Bedeutung beigemessen, indem er gerne etwa als «FRESNELsches Gesetz» oder als «Fundamentalsatz der Kristalloptik» bezeichnet wird, und dies durchaus zu Recht. Da sich die optisch isotropen Kristalle optisch gleich verhalten wie die übrigen isotropen Medien, entspricht die sogenannte «Kristalloptik» de facto der Optik der nichtkubischen, anisotropen Kristalle. Deren charakteristische Eigenschaft ist jedoch die Doppelbrechung, wie sie der FRESNELsche Satz beschreibt. Die Aufwertung zu seiner heutigen Bedeutung verdankt dieser aber vor allem auch der Wichtigkeit, welche er in der polarisationsmikroskopischen Untersuchungsmethodik erlangte, wie sie in der Folge, angeregt durch die FRESNELschen Erkenntnisse, durch Forscher wie DES CLOIZEAUX, FOUQUÉ, MICHEL-LÉVY, FEDOROW, BECKE u.a. entwickelt wurde. Da sich hierbei die Auslöschungsschiefe als eines der wichtigsten diagnostisch verwendbaren Kennzeichen niedrigsymmetrischer Kristallarten erwies, wurde ihre Bestimmung bzw. Berechnung für bestimmte Flächen oder Zonen grundlegend für die mikroskopische Bestimmung gesteinsbildender Mineralien, besonders von Gliedern von Mischkristallreihen.

Eine der heutigen Terminologie angepasste Formulierung des FRESNELschen Satzes kann wie folgt gegeben werden:

«*Die Schwingungsebenen der beiden sich in einer bestimmten Normalenrichtung N in einem zweiachsigen Kristall fortpflanzenden Wellen entsprechen den Halbierungsebenen der räumlichen Winkel, welche die durch N und die beiden optischen Achsen A und B bestimmten Ebenen bilden.*»

Der Beweis lässt sich mit Hilfe der Indikatrix wie folgt führen. Die beiden auf den durch N und A bzw. B aufgespannten Ebenen errichteten Lote $r_{1,2}$ stehen normal zu jeder in diesen enthaltenen Geraden, somit auch zu N und A bzw. B selbst. Sie gehören daher sowohl der Ebene $\perp$ N, wie auch den zu

A bzw. B normalen Kreisschnitten der Indikatrix an. Als Kreisschnittradien entspricht ihre Länge n_β und sie sind zugleich auch zwei Radienvektoren gleicher Länge des zu N normalen Ellipsenschnittes der Indikatrix. Aus Symmetriegründen müssen daher dessen Hauptachsen die durch $r_{1,2}$ eingeschlossenen Winkel halbieren. Die Hauptachsen der Schnittellipse sind jedoch zugleich die Spuren der Schwingungsebenen und als solche die zu N normal stehenden Schwingungsrichtungen der betrachteten Kristallfläche. Da jedoch die Schwingungsebenen die Winkel der auf den durch N und A bzw. B bestimmten Ebenen errichteten Lote $r_{1,2}$ halbieren, ist dies auch für die von diesen Ebenen selbst eingeschlossenen Winkel der Fall, was es zu beweisen galt.

Da die beiden Lote $r_{1,2}$ sowohl der Ebene $\perp$ N, wie auch den beiden Kreisschnittebenen der Indikatrix angehören, können sie auch als deren Schnittgeraden definiert werden. Daraus folgt eine weitere Möglichkeit zur Formulierung des Satzes von FRESNEL:

«*Die Schwingungsrichtungen der beiden sich in einem zweiachsigen Kristall in einer bestimmten Normalenrichtung N fortpflanzenden Wellen entsprechen den Winkelhalbierenden der Schnittgeraden der Ebene* $\perp$ *N mit den beiden Kreisschnittebenen der Indikatrix.*»

In der mikroskopischen Praxis wird die experimentelle Bestimmung der Schwingungsrichtungen einer Kristallfläche bzw. eines Präparates in Form einer planparallelen Kristallplatte, z.B. eines Dünnschliffes oder Spaltblättchens, oder die Messung der Auslöschungsschiefe desselben, im parallen Licht bei normaler Inzidenz vorgenommen, d.h. Wellennormalenrichtung und Plattennormale fallen zusammen. Dabei muss allerdings festgehalten werden, dass absolut parallele Wellenbündel, d.h. aperturloses Licht, nicht erhältlich ist und nur einem experimentell nicht streng realisierbaren Idealzustand entspricht. Man wird daher bei derartigen Untersuchungen immer versuchen, durch entsprechende Handhabung der Aperturblende die Bedingungen optimal zu gestalten.

Für den Fall der normalen Inzidenz kann der Satz von FRESNEL somit auch wie folgt formuliert werden:

«*Die Schwingungsrichtungen einer Fläche eines zweiachsigen Kristalls halbieren die Winkel der Projektionen der optischen Achsen in Richtung der Flächennormalen.*»

Aus den erfolgten Darlegungen ergibt sich sofort eine weitere Formulierung des Satzes von FRESNEL, welche in den Lehrbüchern gewöhnlich ebenfalls als «Fundamentalsatz der Kristalloptik» bezeichnet wird und welche sich ebenfalls der Indikatrix als Referenzfläche bedient:

«*Die Schwingungsrichtungen der beiden Wellen, welche sich in einem Kristall in einer bestimmten Normalenrichtung N fortpflanzen, entsprechen den Hauptachsen der Schnittellipse, in welcher die zu N normale Diametralebene die Indikatrix schneidet.*»

Da die Radien der Indikatrix definitionsgemäss den numerischen Werten der Brechungsindizes derjenigen Wellen entsprechen, welche parallel dazu schwingen, so sind die Längen der Halbachsen der Schnittellipse gleich den numerischen Werten der Brechungsindizes für die beiden Wellen. Ihre analytische Berechnung aus den Halbachsen der Indikatrix (Hauptbrechungsindizes) und der Lage der Wellenormalenrichtung ist daher ohne weiteres möglich, stellt jedoch eine Aufgabe dar, welche den Rahmen der vorliegenden Betrachtungen überschreitet. Für ihre Behandlung sei unter anderm auf ROSENBUSCH-WÜLFING (1921–1924, S. 109–111) oder KOMMERELL (1949, S. 258–260) verwiesen.

II. DIE FRESNELSCHE KONSTRUKTION UND IHRE VARIANTEN

1. Die klassische Form der Konstruktion

Die praktische Auswertung des Satzes von FRESNEL zur Bestimmung der Schwingungsrichtungen $S_{1,2}$ einer gegebenen Kristallfläche F von bekannter optischer Orientierung in bezug auf die optischen Achsen des Kristalls erfolgt üblicherweise durch die sogenannte FRESNELsche Konstruktion in stereographischer Projektion. Ihre klassische Form lässt sich wie folgt formulieren: Man legt (Fig. 1a) entsprechend den beiden durch die Wellenormale N, welche bei normaler Inzidenz mit der Flächennormalen F zusammenfällt, und die beiden optischen Achsen A und B bestimmten sogenannten «Konstruktionsebenen» $K_{1,2}$, zwei Grosskreise durch die Pole $N = F$ und A bzw. B und bestimmt ihre Schnittpunkte P und Q mit dem zu F polaren Grosskreis. Durch Halbieren der Abstände von P und Q und Ziehen von zwei weiteren Grosskreisen durch die Halbierungspunkte $S_{1,2}$ und F erhält man die gesuchten Schwingungsebenen $H_{1,2}$. Die Halbierungspunkte $S_{1,2}$ selbst sind die Schwingungsrichtungen der beiden Wellen. Dabei entspricht diejenige, welche im gleichen räumlichen Winkel von K_1 und K_2 liegt wie $[n_\gamma]$, $[n_\gamma']$ und diejenige im gleichen Winkel wie $[n_\alpha]$, $[n_\alpha']$. Ist E eine weitere Kristallfläche (Spaltfläche, Verwachsungsfläche eines Zwillings zum Beispiel), auf deren Spur mit F die Auslöschungsschiefe bezogen werden soll, so entspricht der Schnittpunkt ihres Grosskreises mit demjenigen von F der Bezugsrichtung R, und der gesuchte Auslöschungswinkel $\sigma_{1,2} = (R, S_{1,2})$ lässt sich ablesen. Da die beiden Auslöschungswinkel komplementär sind, braucht nur der eine davon angegeben zu werden, es muss jedoch vermerkt werden, ob er sich auf $[n_\gamma']$ oder $[n_\alpha']$ bezieht. (Vergleiche auch das Beispiel Fig. 5.)

2. Varianten der Fresnelschen Konstruktion

Für die eben erläuterte klassische Form der FRESNELschen Konstruktion ergeben sich Varianten, welche zur Lösung weiterer Probleme von Vorteil sind und welche auch, rein konstruktiv, eher eine Vereinfachung bedeuten.

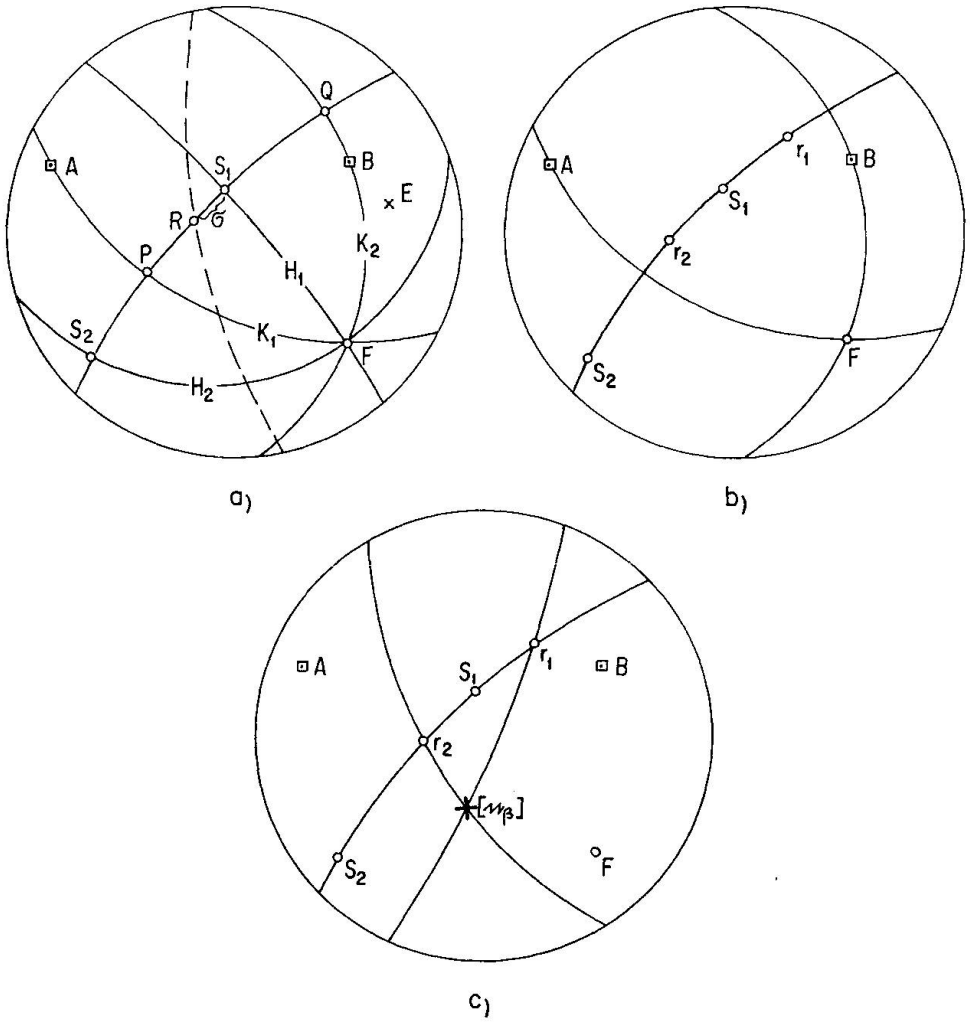

Fig. 1. Die FRESNELsche Konstruktion und ihre Varianten.

a) Klassische Form: Die Schwingungsebenen $H_{1,2}$ der beiden Wellen, welche sich in der Wellennormalenrichtung N normal zu Fläche F fortpflanzen, sind die Halbierungsebenen der räumlichen Winkel, welche die zwei durch die Wellennormale und die beiden optischen Achsen A bzw. B bestimmten «Konstruktionsebenen» $K_{1,2}$ einschliessen. Die Schwingungsrichtungen $S_{1,2}$ sind die Schnittpunkte P und Q von $H_{1,2}$ mit der Ebene F. Die Bezugsrichtung R, entsprechend der Spur der Spaltbarkeit nach einer Fläche E auf F, wird als Schnittpunkt der zu F und E polaren Grosskreise erhalten. Der Auslöschungswinkel σ erscheint auf dem zu F polaren Grosskreis als Winkel (S, R).

b) Variante I: Man errichtet auf $K_{1,2}$ die Lote $r_{1,2}$. Ihre Winkelhalbierenden entsprechen ebenfalls den Schwingungsrichtungen $S_{1,2}$.

c) Variante II: Die Lote $r_{1,2}$ werden als Schnittpunkte der zu den optischen Achsen A bzw. B polaren Grosskreise (Kreisschnitte der Indikatrix) mit dem zu F polaren erhalten. Die Schwingungsrichtungen ergeben sich wiederum als deren Winkelhalbierende. Die zu A bzw. B polaren Grosskreise schneiden sich ihrerseits in der optischen Normalen $[n_\beta]$.

a) Eine erste Variante besteht darin, dass man, an Stelle der Konstruktion der Schwingungsebenen $H_{1,2}$ als Halbierungsebenen der durch F und die optischen Achsen bestimmten Konstruktionsebenen $K_{1,2}$, auf den letzteren die Normalen $r_{1,2}$ errichtet, wie sie schon anlässlich des weiter oben gegebenen Beweises des FRESNELschen Satzes benützt wurden. Man bringt zu diesem Zwecke

in der Projektion F und A bzw. B je auf einen Grosskreis und bestimmt deren Pole, welche den Normalen $r_{1,2}$ entsprechen. Sie liegen in der Fläche F und ihre Projektionen fallen daher auf den zu F polaren Grosskreis (Fig. 1b). Ihre Winkelhalbierenden sind identisch mit denjenigen von $K_{1,2}$ und entsprechen daher den Schwingungsrichtungen $S_{1,2}$. Hinsichtlich ihres Charakters, d.h. ob $[n_\gamma']$ oder $[n_\alpha']$, sowie hinsichtlich der Bestimmung des Auslöschungswinkels in bezug auf eine gegebene Bezugsrichtung, gilt das für die klassische Form der Konstruktion Gesagte.

b) Eine weitere konstruktive Variante ergibt sich aus dem Umstand, dass die beiden Lote $r_{1,2}$ sowohl normal zu der Flächenormale zu F wie zu den optischen Achsen stehen, dass sie somit, wie schon weiter oben erwähnt, den Schnittgeraden von F mit den Kreisschnittebenen der Indikatrix entsprechen. Ihre Lage im Stereogramm wird daher auf einfache Weise als Schnittpunkt der zu A bzw. B polaren Grosskreise mit dem zu F polaren erhalten (Fig. 1c). Die beiden zu A bzw. B polaren Grosskreise schneiden sich ihrerseits im Pol von $[n_\beta]$, in Übereinstimmung damit, dass die optische Normale Schnittgerade der beiden Kreisschnittebenen der Indikatrix ist. Hinsichtlich der Konstruktion der Schwingungsrichtungen $S_{1,2}$, ihres Charakters sowie der Bestimmung der Auslöschungsschiefe gilt auch hier das bereits weiter oben Gesagte.

3. Umkehr der Fresnelschen Konstruktion

Die Fresnelsche Konstruktion lässt sich auch im umgekehrten Sinne anwenden, d.h. sie ermöglicht es, bei bekannter Position einer optischen Achse und der Lage der Achsenebene bzw. der optischen Normale $[n_\beta] = \mathfrak{b}_0$, sowie einer auf eine bekannte Bezugsrichtung R bezogenen Auslöschungsschiefe, die Position der zweiten optischen Achse zu bestimmen. Die Auslöschungsschiefe muss hierbei nach Betrag und Vorzeichen bekannt sein. Man bestimmt hierzu in der stereographischen Projektion auf Grund der Auslöschungsschiefe die Lage einer der beiden Schwingungsrichtungen $S_{1,2}$ auf dem zu F polaren Grosskreis, welcher der interessierenden Kristallfläche bzw. Präparatenebene entspricht. Die Auslöschungsschiefe σ wird konventionell positiv oder negativ gerechnet, je nachdem für einen in F situierten Beobachter S durch eine Drehung im positiven oder negativen Sinne in die Bezugsrichtung R übergeführt wird. Der Winkel PS auf dem zu F polaren Grosskreis (Fig. 1a) wird verdoppelt, womit Punkt Q erhalten wird. Die gesuchte Position der zweiten Achse B erhält man als Schnittpunkt des durch Q und F verlaufenden Grosskreises mit der Achsenebene. Diese Konstruktion wurde u.a. durch Fedorow, anlässlich des erstmaligen Entwurfs des Stereogrammes der optischen Orientierung der Plagioklase, angewandt für den Fall, dass nur eine optische Achse einmessbar war. Sie spielt auch eine Rolle bei der bekannten Beckeschen Methode zur Bestimmung des optischen Achsenwinkels aus der Hyperbelkrümmung.

An Stelle der klassischen Form der FRESNELschen Konstruktion kann auch Variante b) (Fig. 1c) Verwendung finden. Da sich diese besonders zur rechnerischen Auswertung eignet, sei das Vorgehen kurz skizziert. Man findet zuerst wiederum, auf Grund der Kenntnis der Bezugsrichtung R und der nach Betrag und Vorzeichen bekannten Auslöschung σ, eine der Schwingungsrichtungen $S_{1,2}$. Als Schnittpunkt der zu F und zu der als bekannt angenommenen optischen Achse A polaren Grosskreise erhält man r_1, die Normale der durch F und A bestimmten Ebene. Durch Verdoppelung des Winkels (S, r_1) erhält man r_2, die Normale der durch F und B bestimmten Ebene. Die zweite, gesuchte, optische Achse B ergibt sich als Schnittpunkt des zu r_2 polaren, durch F und Q verlaufenden Grosskreises mit der Achsenebene.

III. DIE RECHNERISCHE AUSWERTUNG DER FRESNELSCHEN KONSTRUKTION

1. Bisherige Versuche

Wie eben gezeigt wurde, gestattet die FRESNELsche Konstruktion in ihren diversen Varianten bei bekannter optischer Orientierung, d.h. Achsenlage, die graphische Bestimmung der Schwingungsrichtungen bzw. der Auslöschungsschiefen für beliebige Kristallflächen in bezug auf beliebige Bezugsrichtungen. Damit ist eines der wichtigsten Probleme der auf die polarisationsmikroskopische Mineral- und Gesteinsuntersuchung angewandten Kristalloptik gelöst. In vielen Fällen dürfte jedoch eine rechnerische Auswertung des im allgemeinen graphisch durchgeführten Verfahrens erwünscht sein. Diesem Problem wurden denn auch schon seit langem zahlreiche Untersuchungen gewidmet. Es kann sich an dieser Stelle nicht darum handeln, diese in ihrer Gesamtheit zu würdigen und kritisch zu sichten, so interessant dies auch wäre. Es sei jedoch an die Arbeiten von MICHEL-LÉVY (1877, 1888) erinnert, welcher als erster das Problem in seiner vollen Bedeutung für die polarisationsmikroskopische Methodik erkannte und auch eine der ersten Lösungen lieferte. Im übrigen sei auf die zusammenfassenden Darstellungen von JOHANNSEN (1918, S. 403–412) und ROSENBUSCH-WÜLFING (1921–1924, S. 487–497) verwiesen. Auffallend ist, dass die meisten Autoren vorwiegend spezielle Probleme behandeln und so gewissermassen eine kasuistische Betrachtung einer allgemeinen Lösung vorzogen. Dass eine solche, zum mindesten solange man sich ausschliesslich sphärisch-trigonometrischer Methoden bediente, grosse Schwierigkeiten bietet und zu Ausdrükken von erheblicher Kompliziertheit führt, zeigen u.a. die interessanten Versuche von BEREK (1912). Der von ihm beschrittene Weg zu einer trigonometrischen Formulierung der FRESNELschen Konstruktion führte zwar auch nicht zu einer praktisch brauchbaren allgemeinen Methode zur Berechnung von Auslöschungsschiefen. Er lieferte jedoch, gewissermassen als Nebenergeb-

nis, die Grundlagen zu der theoretisch sehr bemerkenswerten, wenn auch praktisch nicht sehr ergiebigen, weil stark durch die jeweiligen Versuchsbedingungen beeinflussten «Methode der charakteristischen Funktion der Auslöschung» (BEREK, 1924, 1953), welche eine Bestimmung von 2 V aus der Messung eines einzigen Auslöschungswinkels gestattet.

Die Situation war demnach bis jetzt dadurch gekennzeichnet, dass das Problem der Berechnung von Auslöschungsschiefen prinzipiell zwar als gelöst bezeichnet werden darf, dass aber eine allgemein anwendbare, alle vorkommenden Fälle gleichermassen umfassende Methode noch ausstand und dass eine solche auf Grund der geleisteten Vorarbeit als reichlich kompliziert erwartet werden musste. Man konnte sich dabei fragen, ob dies nicht, mindestens teilweise, dadurch bedingt war, dass man sich bis dahin zur Lösung der Aufgabe durchwegs der sphärisch-trigonometrischen Methodik bedient hatte, wie sie allerdings als gegeben erscheinen musste, solange man ausschliesslich von der stereographischen Projektion ausging.

Wenn an dieser Stelle, im Anschluss an frühere Mitteilungen (BURRI, 1950b, 1975b), erneut auf diesen Problemkreis eingegangen wird, so vor allem deshalb, weil gezeigt werden kann, dass es durch einen Wechsel der Methodik tatsächlich gelingt, zu einer überraschend einfachen, allgemein gültigen Lösung zu gelangen. *Unter Benützung einfacher Vektormethoden an Stelle der sphärisch-trigonometrischen erweist es sich nämlich als möglich, einen einfachen und geometrisch anschaulich interpretierbaren Ausdruck abzuleiten, welcher erlaubt, die Auslöschungsschiefe für beliebige Kristallflächen in bezug auf beliebige Bezugsrichtungen zu berechnen, und zwar unabhängig vom Kristallsystem und von der Symmetrie der Indikatrix.*

2. Die vektorielle Formulierung des Problems und seine Lösung

Unter dem Begriff «Auslöschungsschiefe» einer Kristallfläche F versteht man definitionsgemäss den Winkel zwischen einer ihrer beiden Schwingungsrichtungen $S_{1,2}$ und einer ihr ebenfalls angehörenden «Bezugsrichtung» morphologischer Art, R. Diese kann sein: Kante, Spaltriss oder Zwillingsgrenze, d.h. Spur (Schnittgerade) einer zweiten Kristallfläche E mit der betrachteten Fläche F.

Charakterisiert man die beiden Flächen durch ihre Normalvektoren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{E}$, so ist (Fig. 2a) die beiden gemeinsame Bezugsrichtung R gegeben durch das vektorielle Produkt

$$\mathfrak{R} = [\mathfrak{F} \times \mathfrak{E}], \tag{1}$$

wobei die Reihenfolge der drei Vektoren so zu wählen ist, dass sie ein Rechtssystem bilden.

Von den beiden Schwingungsrichtungen $S_{1,2}$ braucht nur eine betrachtet zu

werden, da sie normal zueinander stehen und sich daher die Lage der einen aus derjenigen der andern ergibt. Es muss jedoch immer vermerkt werden, ob die betreffende Schwingungsrichtung der rascheren oder der langsameren Welle entspricht, d.h. ob sie die Lichtbrechung n_α' oder n_γ' aufweist.

Bezeichnet man den Vektor der betreffenden Schwingungsrichtung S mit $\mathfrak{S}$, so ergibt sich der Auslöschungswinkel σ aus dem skalaren Produkt $(\mathfrak{R}\cdot\mathfrak{S})$ unter Berücksichtigung von (1) zu:

$$\cos\sigma = \frac{(\mathfrak{R}\cdot\mathfrak{S})}{|\mathfrak{R}|\cdot|\mathfrak{S}|} = \frac{([\mathfrak{F}\times\mathfrak{E}]\cdot\mathfrak{S})}{|\mathfrak{F}\times\mathfrak{E}|\cdot|\mathfrak{S}|} \tag{2}$$

Nun ist aber $([\mathfrak{F}\times\mathfrak{E}]\cdot\mathfrak{S}) = [\mathfrak{F}\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{S}]$, das sogenannte gemischte oder Spatprodukt der drei Vektoren $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{S}$, dessen absoluter Wert dem Volumen V des von diesen aufgespannten Spates entspricht. Dieses kann anderseits auch als Produkt von Grundfläche $G = |\mathfrak{F}\times\mathfrak{E}| = |\mathfrak{F}|\cdot|\mathfrak{E}|\sin\epsilon$, wobei $\epsilon = \sphericalangle(\mathfrak{F},\mathfrak{E})$, und Höhe $h = |\mathfrak{S}|\cos\sigma$ ausgedrückt werden. Geht man zu den Einheitsvektoren über und bezeichnet man das Volumen des von diesen aufgespannten Spates mit V_0 und dessen durch $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{E}_0$ bestimmte Grundfläche mit G_0, so resultiert die einfache und für die Methode grundlegende Beziehung:

$$\cos\sigma = \frac{V_0}{G_0} = \frac{V_0}{\sin\epsilon} = h_0 \tag{3}$$

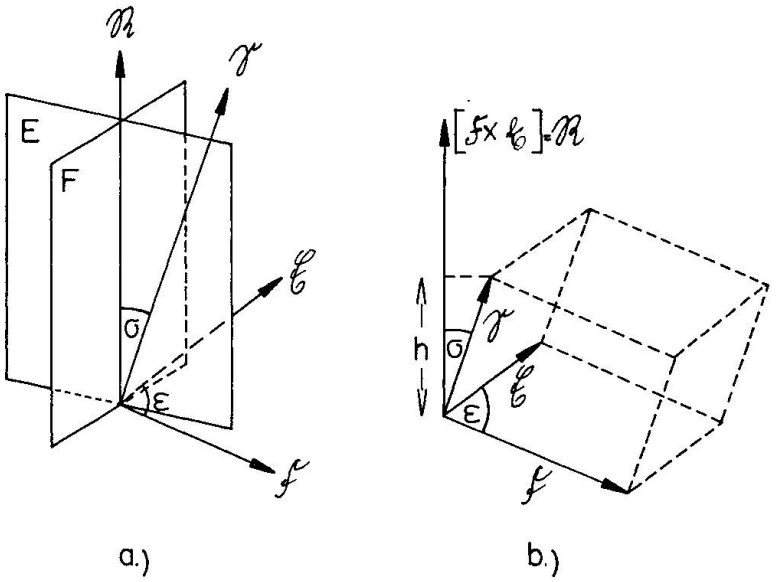

Fig. 2.

a) Definition des Auslöschungswinkels σ einer Kristallfläche F als Winkel zwischen einer ihrer Schwingungsrichtungen S und einer Bezugsrichtung R, welche Spur einer zweiten Kristallfläche E auf F ist.

b) Der durch die drei Vektoren $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{S}$ aufgespannte Spat, dessen Schiefe in bezug auf die Normale zur Grundfläche dem Auslöschungswinkel entspricht.

d.h. der cos des gesuchten Auslöschungswinkels σ ist gleich der Höhe h_0 des von $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{S}_0$ aufgespannten Spates mit der durch $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{E}_0$ bestimmten Seite als Grundfläche (Fig. 2b). Der Auslöschungswinkel selbst ist gleich der Schiefe des Spates gegenüber der auf der Grundfläche errichteten Normale $[\mathfrak{F}_0 \times \mathfrak{E}_0] = \mathfrak{R}$. Bei der Berechnung des Volumproduktes ist darauf zu achten, dass die Reihenfolge der drei Vektoren derart gewählt wird, dass sie ein Rechtssystem bilden, wobei σ spitz resultiert, da ansonst V negativ herauskommt. Der Winkel ϵ berechnet sich aus dem skalaren Produkt $(\mathfrak{F}_0 \cdot \mathfrak{E}_0)$. Es erweist sich somit als möglich, den Auslöschungswinkel σ für eine beliebige Kristallfläche, in bezug auf eine beliebige Bezugsrichtung ganz allgemein durch eine geometrisch einfach interpretierbare Vektorbeziehung auszudrücken, und zwar ganz unabhängig vom Kristallsystem und von der Symmetrie der Indikatrix, da diesbezüglich keine irgendwie gearteten Voraussetzungen gemacht wurden.

3. Einführung eines Bezugssystems

Zur rechnerischen Auswertung der gefundenen Beziehung muss jedoch die räumliche Lage der Schwingungsrichtung S und der Bezugsrichtung R bekannt sein. Hierfür, wie auch zur Formulierung der Normalvektoren von F und E muss ein Bezugssystem eingeführt werden. Dieses ist derart zu wählen, dass sich die Berechnungen möglichst einfach gestalten. Es wird daher mit Vorteil orthogonal gewählt, wobei jedoch darauf zu achten ist, dass es sich auch für das monokline und trikline System eignet. Folgendes System genügt diesen Anforderungen:

$Z = [001]$ bzw. $[0001]$, d.h. die kristallographische c-Achse,
$Y = \perp (010)$ bzw. $\perp (\bar{1}2\bar{1}0)$,
$X = \perp$ Ebene YZ.

Dieses System hat den weiteren Vorteil, dass es auch in engster Beziehung zum GOLDSCHMIDTschen Polarkoordinatensystem steht. In diesem werden bekanntermassen die Zentraldistanz ρ von c aus und das Azimut φ in der Zone [001] bzw. [0001] von (010) bzw. $(10\bar{1}0)$ aus gezählt. Es ergibt sich somit die praktisch wichtige Konsequenz, dass sich die Komponenten der Normalvektoren der interessierenden Flächenlagen auf einfache Weise aus den (φ, ρ)-Werten berechnen lassen, welche den GOLDSCHMIDTschen Winkeltabellen entnommen werden können. Für den Fall, dass die (φ, ρ)-Werte für eine interessierende Fläche in diesen nicht enthalten sein sollte oder dass es sich um eine nicht berücksichtigte Mineralspezies handelt, können diese auf einfache Weise mit Hilfe der kürzlich gegebenen Ausdrücke (BURRI, 1975a) aus dem Achsenverhältnis berechnet werden, ohne dass es notwendig ist, sich des komplizierten und kaum mehr allgemein bekannten GOLDSCHMIDTschen Algorithmus zu bedienen.

Die Komponenten der Einheitsvektoren für die betrachteten Flächen, d.h. der Ortsvektoren für Punkte der Einheits-Projektionskugel, sind gleich deren Richtungscosinus. Diese sind jedoch auf einfache Weise aus den (φ, ρ)-Werten erhältlich.

In der Beziehung zwischen (φ, ρ)-Werten nach GOLDSCHMIDT und Vektorkomponenten besteht leider eine gewisse Inkonsequenz, welche historisch bedingt ist und mit welcher man sich abzufinden hat. Während man die letzteren auf ein orthogonales Rechtssystem XYZ bezieht, werden die Azimute bei GOLDSCHMIDT jedoch, ausgehend von +Y, im negativen, d.h. Uhrzeigersinn von 0° bis 360° gezählt.

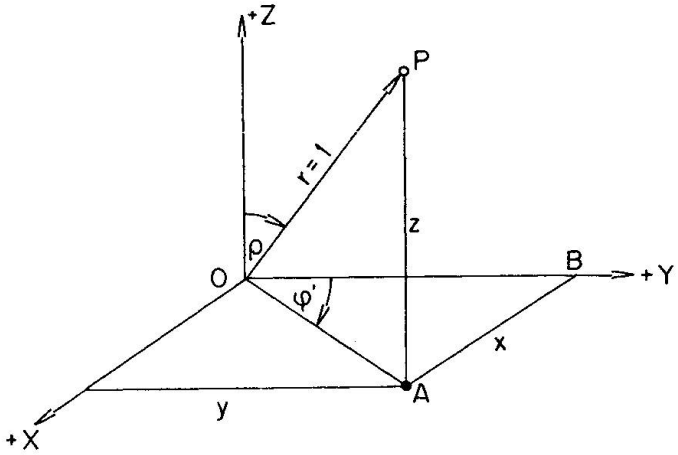

Fig. 3. Beziehungen zwischen den GOLDSCHMIDTschen (φ, ρ)-Werten und den Komponenten des Ortsvektors eines auf der Einheitskugel gelegenen Punktes P.

Die Beziehungen zwischen den (φ, ρ)-Werten und den Komponenten (x, y, z) bzw. dem Richtungscosinus (λ, μ, ν) des Ortsvektors eines Punktes P auf der Einheitskugel ergeben sich auf Grund von Fig. 3. Führt man vorerst den Hilfswinkel φ' zur Bezeichung des Azimutes ein, so erhält man für den I. Quadranten $(+X, +Y)$ der oberen Halbkugel: $OA = \cos(90° - \rho) = \sin\rho$, und weiter:

$$\left.\begin{aligned} x &= AB = OA \sin\varphi' = \sin\varphi' \sin\rho = \lambda \\ y &= OB = OA \cos\varphi' = \cos\varphi' \sin\rho = \mu \\ z &= \cos\rho \qquad\qquad\qquad\qquad = \nu \end{aligned}\right\} \quad (4) \qquad\qquad \left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi' &= \frac{x}{y} = \frac{\lambda}{\mu} \\ \cos\rho &= z = \nu \end{aligned}\right\} \quad (4a)$$

In bezug auf das Azimut φ gilt für die verschiedenen Quadranten:

Quadrant:	Gesucht: φ	Gesucht: φ'	
I $(+X, +Y)$	$\varphi = \varphi'$	$\varphi' = \varphi$	
II $(-X, +Y)$	$\varphi = 2\pi - \varphi'$	$\varphi' = 2\pi - \varphi$	(4b)
III $(-X, -Y)$	$\varphi = \pi + \varphi'$	$\varphi' = \varphi - \pi$	
IV $(+X, -Y)$	$\varphi = \pi - \varphi'$	$\varphi' = \pi - \varphi$	

Das gewählte System XYZ ist auch identisch mit demjenigen, wie es durch FEDOROW, MICHEL-LÉVY und BECKE für die Charakterisierung der optischen Orientierung der Plagioklase eingeführt wurde, wobei die X-, Y- und Z-Achse der ZA der Gesetze Roc Tourné, Albit und Karlsbad entsprechen. Die interessierenden Richtungen, wie optische Achsen, Hauptschwingungsrichtungen usw., werden durch sphärische Koordinaten λ^*, φ^* nach Art der geographischen Länge und Breite definiert, wobei die Äquatorebene = (010) $\perp$ Y angenommen wird. Das System lässt sich jedoch auch in Verbindung mit den EULER-Winkeln zur Definition der optischen Orientierung der Plagioklase verwenden (BURRI, 1972).

Für die Beziehungen der besonders von BECKE vielfach verwendeten sphärischen Koordinaten λ^*, φ^* in Komponenten des Einheitsvektors erhält man gemäss Fig. 4:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{aus Dreieck BPX:} & \cos XP = \sin\lambda^* \cos\varphi^* = \lambda = x \\ & \cos YP = \sin\varphi^* \qquad\quad = \mu = y \\ \text{aus Dreieck ZPB:} & \cos ZP = \cos\lambda^* \cos\varphi^* = \nu = z \end{array}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\lambda}{\nu} = \dfrac{x}{z} = \operatorname{tg}\lambda^* \\ \mu = y = \sin\varphi^* \end{array}\right\} \quad (5a)$$

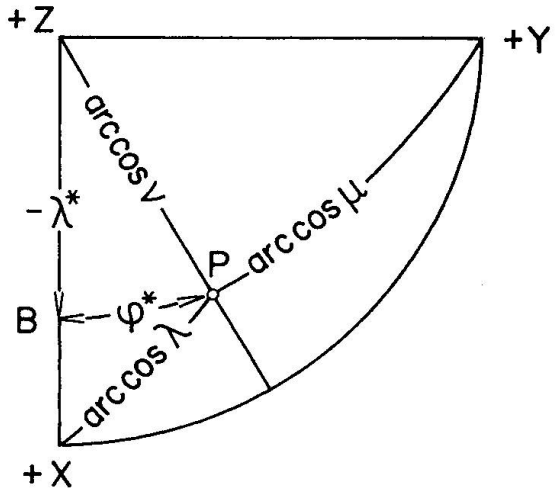

Fig. 4. Beziehungen zwischen den BECKEschen Kugelkoordinaten λ^*, φ^* eines P unktes P auf der Einheitskugel und den Komponenten seines Ortsvektors.

In bezug auf die Vorzeichen gilt:

Quadrant:	I (+X, +Y)	II (−X, +Y)	III (−X, −Y)	IV (+X, −Y)
λ^*	−	+	+	−
φ^*	+	+	−	−
$\lambda = x$	+	−	−	+
$\mu = y$	+	+	−	−
$\nu = z$	+	+	+	+

(5b)

Auf Grund von (4) ist es somit möglich, aus den (φ, ρ)-Werten für beliebige Flächenlagen, unabhängig vom Kristallsystem, die Normalvektoren (Einheitsvektoren), bezogen auf das gewählte System XYZ, zu berechnen. Da sich aus $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{E}_0$ gemäss (1) der Vektor der Bezugsrichtung $\mathfrak{R}$ ergibt, ist der morphologisch definierte Schenkel des Auslöschungswinkels bekannt, und es bleibt nur noch der optisch definierte, d.h. die Schwingungsrichtung $S_{1,2}$ vektoriell zu formulieren, um den Auslöschungswinkel σ auf Grund von (2) bzw. (3) zu erhalten. Hierfür muss zwischen optisch-einachsigen und optisch-zweiachsigen Kristallen unterschieden werden.

4. Optisch-zweiachsige Kristalle

Der Vektor der optischen Schwingungsrichtungen $S_{1,2}$ kann, je nach der in Betracht gezogenen Variante der FRESNELschen Konstruktion, auf verschiedene Weise erhalten werden.

Geht man von der klassischen Form aus, so entsprechen die Vektoren der beiden Schwingungsrichtungen den Winkelhalbierenden der Ortsvektoren von P und Q (Fig. 1a), $\overrightarrow{OP} = \mathfrak{p}$ und $\overrightarrow{OQ} = \mathfrak{q}$, d.h. der Schnittpunkte des zu F polaren Grosskreises mit den durch F und A bzw. F und B verlaufenden K_1 und K_2. Es ist somit:

$$\mathfrak{S}_{1,2} = \mathfrak{p}_0 \pm \mathfrak{q}_0, \tag{6}$$

wobei $\mathfrak{p} = \mathfrak{F} \times [\mathfrak{F} \times \mathfrak{A}]$ und $\mathfrak{q} = \mathfrak{F} \times [\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}]$ ist.

Durch Übergang zu den Einheitsvektoren und Anwendung des Entwicklungssatzes erhält man die für die praktische Berechnung bequemeren Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &= \mathfrak{F}_0 \times [\mathfrak{F}_0 \times \mathfrak{A}_0] = (\mathfrak{F}_0 \cdot \mathfrak{A}_0)\,\mathfrak{F}_0 - (\mathfrak{F}_0 \cdot \mathfrak{F}_0)\,\mathfrak{A}_0 = (\mathfrak{F}_0 \cdot \mathfrak{A}_0)\,\mathfrak{F}_0 - \mathfrak{A}_0, \\ \mathfrak{q} &= \mathfrak{F}_0 \times [\mathfrak{F}_0 \times \mathfrak{B}_0] = (\mathfrak{F}_0 \cdot \mathfrak{B}_0)\,\mathfrak{F}_0 - (\mathfrak{F}_0 \cdot \mathfrak{F}_0)\,\mathfrak{B}_0 = (\mathfrak{F}_0 \cdot \mathfrak{B}_0)\,\mathfrak{F}_0 - \mathfrak{B}_0. \end{aligned} \tag{6a}$$

Nun ist aber in (6) $[\mathfrak{F}_0 \times \mathfrak{A}_0] = \mathfrak{r}_1$ und $[\mathfrak{F}_0 \times \mathfrak{B}_0] = \mathfrak{r}_2$ (Fig. 1b), d.h. die Vektorprodukte entsprechen den Normalen auf die durch die Flächennormale zu F und die beiden optischen Achsen A und B aufgespannten Ebenen, so dass auch gilt:

$$\mathfrak{p}_0 = [\mathfrak{F}_0 \times \mathfrak{r}_{1_0}] \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}_0 = [\mathfrak{F}_0 \times \mathfrak{r}_{2_0}]. \tag{6b}$$

Die Winkel der beiden Ebenen $K_{1,2}$ und diejenigen ihrer Normalen $\mathfrak{r}_{1,2}$ ergänzen sich als Flächen- und Normalenwinkel zu 180° und sind nur gleich und 90° für den Fall, dass K_1 und K_2 normal zueinander stehen. Ihre Winkelhalbierenden fallen zusammen und es gilt daher für die Vektoren der Schwingungsrichtungen $S_{1,2}$ auch der einfache Ausdruck:

$$\mathfrak{S}_{1,2} = \mathfrak{r}_{1_0} \pm \mathfrak{r}_{2_0}, \tag{7}$$

wobei $\mathfrak{r}_1 = [\mathfrak{F}_0 \times \mathfrak{A}_0]$ und $\mathfrak{r}_2 = [\mathfrak{F}_0 \times \mathfrak{B}_0]$ ist. Bei der Bildung der Vektorprodukte ist darauf zu achten, dass die Reihenfolge der Vektoren so gewählt wird, dass sie ein Rechtssystem bilden.

Damit ist der zweite, optisch definierte Schenkel des Auslöschungswinkels σ formuliert und (2) bzw. (3) kann Anwendung finden.

5. Beispiele

a) Albit von Grönland

Kristallographische Daten (C. Dreyer und V. Goldschmidt, 1907):

$$\begin{aligned} P(001) &= F : \varphi = 82{,}0^\circ \qquad \rho = 26{,}85^\circ \\ M(010) &= E : \varphi = 0^\circ \qquad \rho = 90^\circ \end{aligned}$$

Optische Daten (O. Grosspietsch, 1908):

Positionen der optischen Achsen in Kugelkoordinaten nach Becke:

Achse A: $\lambda^* = +64{,}2^\circ \qquad \varphi^* = -49{,}1^\circ$

Achse B: $\lambda^* = -76{,}5^\circ \qquad \varphi^* = -47{,}8^\circ$

Gesucht: Auslöschungsschiefen auf P (001) bezogen auf Spur von M (010) und auf M (010) bezogen auf Spur von P (001)

α) Auslöschungsschiefe auf P (001) (Fig. 5)

Nach (4) erhält man für die Normalvektoren von F = (001) und E = (010):

$$\mathfrak{F}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}447261 \\ 0{,}062858 \\ 0{,}892192 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{E}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nach (5) erhält man für die Vektoren der optischen Achsen:

$$\mathfrak{A}_0 = \begin{pmatrix} -0{,}589475 \\ -0{,}755854 \\ 0{,}284964 \end{pmatrix} \begin{matrix} \varphi = 218{,}0^\circ \\ \rho = 73{,}4^\circ \end{matrix} \qquad \mathfrak{B}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}653161 \\ -0{,}740805 \\ 0{,}156810 \end{pmatrix} \begin{matrix} \varphi = 138{,}6^\circ \\ \rho = 81{,}0^\circ \end{matrix}$$

$$\mathfrak{r}_1 = [\mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{F}_0] = \begin{pmatrix} -0{,}692279 \\ 0{,}653378 \\ 0{,}301011 \end{pmatrix} \qquad \text{normiert: } \mathfrak{r}_{1_0} = \begin{pmatrix} -0{,}693403 \\ 0{,}654439 \\ 0{,}301500 \end{pmatrix} \begin{matrix} \varphi = 313{,}3^\circ \\ \rho = 72{,}5^\circ \end{matrix}$$

$$\mathfrak{r}_2 = [\mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{F}_0] = \begin{pmatrix} -0{,}670797 \\ -0{,}512610 \\ 0{,}372390 \end{pmatrix} \qquad \text{normiert: } \mathfrak{r}_{2_0} = \begin{pmatrix} -0{,}726978 \\ -0{,}555542 \\ 0{,}403579 \end{pmatrix} \begin{matrix} \varphi = 232{,}6^\circ \\ \rho = 66{,}2^\circ \end{matrix}$$

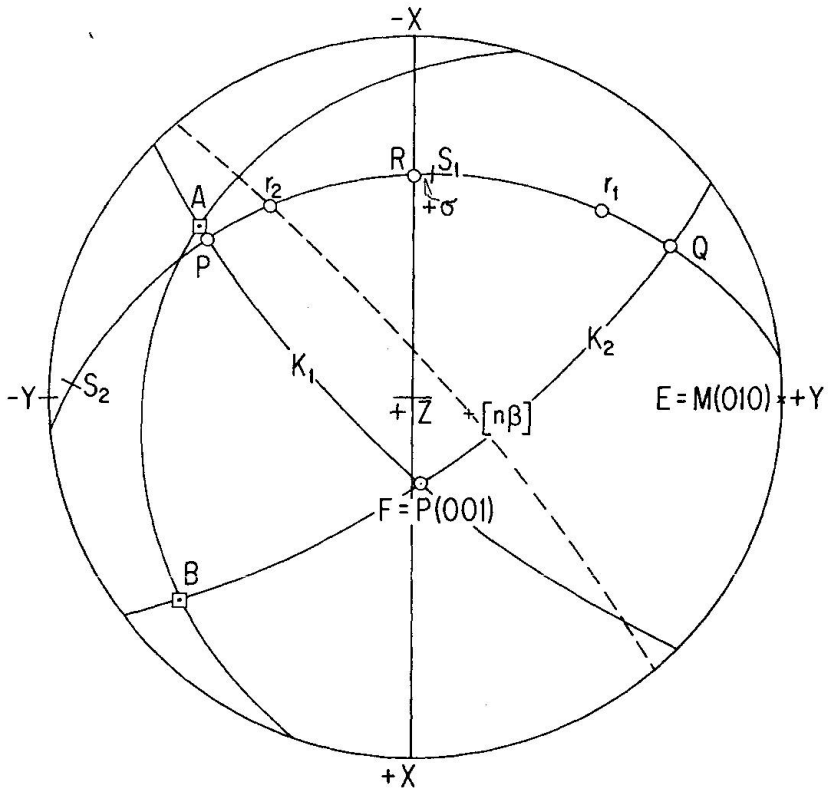

Fig. 5. Albit von Grönland. Stereographische Projektion auf die Ebene ⊥ [001]. Konstruktion der Auslöschungsschiefe auf P (001) bezogen auf die Spur von M (010).

$$\mathfrak{r}_{1_0} + \mathfrak{r}_{2_0} = \begin{pmatrix} -1{,}420381 \\ 0{,}098897 \\ 0{,}705079 \end{pmatrix} = \mathfrak{S}_\alpha \quad \text{normiert: } \mathfrak{S}_0 = \begin{pmatrix} -0{,}893976 \\ 0{,}062245 \\ 0{,}443771 \end{pmatrix} \begin{matrix} \varphi = 274{,}0^\circ \\ \rho = 63{,}7^\circ \end{matrix}$$

$$V_0 = [\mathfrak{E}_0 \mathfrak{S}_0 \mathfrak{F}_0] = 0{,}996080, \qquad (\mathfrak{F}_0 \cdot \mathfrak{E}_0) = 0{,}062858 = \cos\epsilon, \qquad \epsilon = 86{,}4^\circ,$$

$$\sin\epsilon = 0{,}998022 = G_0, \qquad \cos\sigma = \frac{V_0}{G_0} = \frac{0{,}996080}{0{,}998022} = 0{,}998054,$$

woraus: $\sigma = 3{,}57^\circ$ (gemessen durch GROSSPIETSCH: 3,6°).

Der Auslöschungswinkel gilt für $[n_\alpha']$ und ist gemäss der SCHUSTERschen Regel positiv zu nehmen.

β) Auslöschungsschiefe auf M (010)

Gegenüber dem vorigen Beispiel sind die Bezeichnungen der beiden Flächen zu vertauschen. Es ist nun:

$$\mathfrak{F}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{E}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}447261 \\ 0{,}062858 \\ 0{,}892192 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{r}_1 = [\mathfrak{F}_0 \times \mathfrak{A}_0] = \begin{pmatrix} 0{,}284964 \\ 0 \\ 0{,}589475 \end{pmatrix} \qquad \text{normiert: } \mathfrak{r}_{1_0} = \begin{pmatrix} 0{,}435232 \\ 0 \\ 0{,}900318 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \varphi = 90° \\ \rho = 25{,}8° \end{matrix}$$

$$\mathfrak{r}_2 = [\mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{F}_0] = \begin{pmatrix} -0{,}156810 \\ 0 \\ 0{,}653161 \end{pmatrix} \qquad \text{normiert: } \mathfrak{r}_{2_0} = \begin{pmatrix} -0{,}233445 \\ 0 \\ 0{,}972370 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \varphi = 270° \\ \rho = 13{,}5° \end{matrix}$$

$$\mathfrak{r}_{1_0} - \mathfrak{r}_{2_0} = \begin{pmatrix} 0{,}668677 \\ 0 \\ -0{,}072052 \end{pmatrix} = \mathfrak{S}_\alpha \text{ normiert: } \mathfrak{S}_0 = \begin{pmatrix} -0{,}994245 \\ 0 \\ 0{,}107132 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \varphi = 90° \\ \rho = 83{,}8° \end{matrix}$$

$$V_0 = [\mathfrak{E}_0 \mathfrak{F}_0 \mathfrak{S}_0] = 0{,}934973, \qquad (\mathfrak{F}_0 \cdot \mathfrak{E}_0) = 0{,}062858 = \cos\epsilon, \qquad \epsilon = 86{,}4°,$$

$$\sin\epsilon = 0{,}998022 = G_0, \qquad \cos\sigma = \frac{V_0}{G_0} = \frac{0{,}934973}{0{,}998022} = 0{,}936826,$$

woraus $\sigma = 20{,}47°$ (gemessen durch GROSSPIETSCH: 20,3°).

Der Auslöschungswinkel gilt wiederum für $[n_\alpha']$ und ist nach der SCHUSTERschen Regel negativ zu nehmen.

γ) Berechnung der Position der optischen Achse B aus derjenigen von A und der Auslöschungsschiefe auf P (001), $\sigma_P = +3{,}57°$, bei gleichzeitiger Kenntnis der Position der optischen Normale $[n_\beta] = \mathfrak{b}_0$ (Umkehr der FRESNELschen Konstruktion)

Gegeben:

$$\mathfrak{A}_0 = \begin{pmatrix} -0{,}589475 \\ -0{,}755854 \\ 0{,}284964 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{F}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}447261 \\ 0{,}062858 \\ 0{,}892192 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{b}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}094893 \\ 0{,}285535 \\ 0{,}953600 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{E}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi = 18{,}4° \quad \rho = 17{,}5°$$

Gesucht: $\mathfrak{B}_0$

Die Auslöschung auf F = P (001) wird auf die Spur von E = M (010) bezogen. Für die Bezugsrichtung R erhält man somit:

$$\mathfrak{R} = [\mathfrak{F}_0 \times \mathfrak{E}_0] = \begin{pmatrix} -0{,}892192 \\ 0 \\ 0{,}447261 \end{pmatrix} \text{ und, normiert: } \mathfrak{R}_0 = \begin{pmatrix} -0{,}893960 \\ 0 \\ 0{,}448147 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \varphi = 270° \\ \rho = 63{,}4° \end{matrix}$$

Der Vektor der auf $[n_\alpha']$ bezogenen Schwingungsrichtung S_1 ergibt sich gemäss Fig. 6 zu $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{x}$, wobei $\mathfrak{x}$ ein Hilfsvektor ist, welcher sich zu $\mathfrak{x} = \mathfrak{X}_0 \operatorname{tg}\sigma$ berechnet.

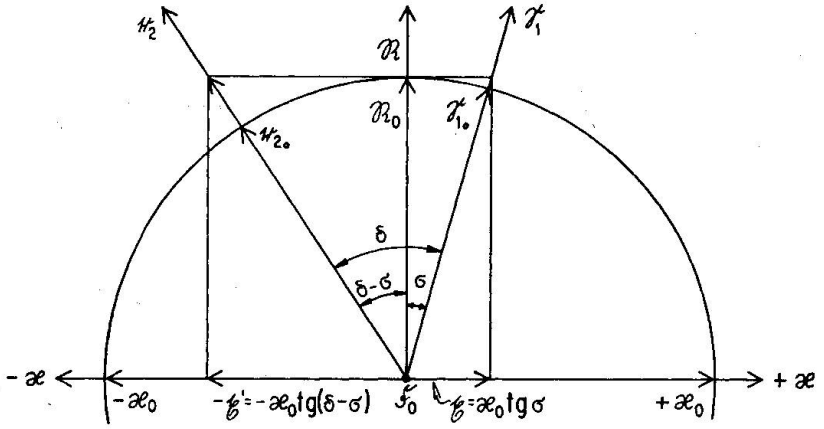

Fig. 6. Zur umgekehrten Anwendung der FRESNELschen Konstruktion. Schnitt durch die Einheitskugel parallel der Fläche F = (001). Im Interesse einer besseren Verständlichkeit der Figur ist der Auslöschungswinkel σ übertrieben gross dargestellt.

X ist eine normal zu R in F liegende Richtung, und es ist:

$$\mathfrak{X}_0 = [\mathfrak{R}_0 \times \mathfrak{F}_0] = \begin{pmatrix} -0{,}028170 \\ 0{,}998023 \\ -0{,}056173 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = 3{,}57^\circ,\ \operatorname{tg}\sigma = 0{,}062389,\ \text{somit}\ \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} -0{,}001757 \\ 0{,}062266 \\ -0{,}003506 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} -0{,}895717 \\ 0{,}062266 \\ 0{,}444641 \end{pmatrix} \qquad \text{normiert: } \mathfrak{S}_{1_0} = \begin{pmatrix} -0{,}893979 \\ 0{,}062145 \\ 0{,}443778 \end{pmatrix} \begin{matrix} \varphi = 286^\circ \\ \rho = 63{,}7^\circ \end{matrix}$$

$\mathfrak{r}_1$ ist die Normale auf die durch A und die Normale zu F aufgespannte Ebene, so dass

$$\mathfrak{r}_1 = [\mathfrak{F}_0 \times \mathfrak{A}_0] = \begin{pmatrix} -0{,}692279 \\ 0{,}653378 \\ 0{,}301011 \end{pmatrix} \qquad \text{normiert: } \mathfrak{r}_{1_0} = \begin{pmatrix} -0{,}693403 \\ 0{,}654439 \\ 0{,}301500 \end{pmatrix} \begin{matrix} \varphi = 313{,}3^\circ \\ \rho = 72{,}5^\circ \end{matrix}$$

Der Winkel $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{r}_1)$ berechnet sich aus dem skalaren Produkt $(\mathfrak{S}_1 \cdot \mathfrak{r}_1) = 0{,}794357$ zu $\delta = 37{,}41^\circ$. Das gesuchte $\mathfrak{r}_2$ muss mit $\mathfrak{S}_1$ denselben Winkel bilden, und wie aus Fig. 6 ersichtlich, mit $\mathfrak{R}$ einen solchen von $\delta - \sigma = 37{,}41^\circ - 3{,}57^\circ = 33{,}84^\circ$. Man erhält daher den Vektor $\mathfrak{r}_2$ als $\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{R}_0 - \mathfrak{x}'$, wobei $\mathfrak{x}' = \mathfrak{X}_0 \operatorname{tg}(\delta - \sigma)$ mit $\operatorname{tg}(\delta - \sigma) = 0{,}670338$.

$$\mathfrak{x}' = \mathfrak{X}_0 \operatorname{tg}(\delta - \sigma) = \begin{pmatrix} 0{,}018883 \\ -0{,}669013 \\ 0{,}037668 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{R}_0 - \mathfrak{x}' = \begin{pmatrix} -0{,}875077 \\ -0{,}669013 \\ 0{,}485815 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{r}_{2_0} = \begin{pmatrix} -0{,}726874 \\ -0{,}555709 \\ 0{,}485815 \end{pmatrix} \begin{matrix} \varphi = 232^\circ \\ \rho = 66{,}2^\circ \end{matrix}$$

Die gesuchte optische Achse B erhält man zu:

$$\mathfrak{B} = [\mathfrak{b}_0 \times \mathfrak{r}_{2_0}] = \begin{pmatrix} 0{,}645181 \\ -0{,}731483 \\ 0{,}154814 \end{pmatrix} \quad \text{normiert: } \mathfrak{B}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}653302 \\ -0{,}740690 \\ 0{,}156763 \end{pmatrix} \begin{matrix} \varphi = 138{,}6^\circ \\ \rho = 81{,}0^\circ \end{matrix}$$

in Übereinstimmung mit den eingangs gemachten Angaben.

b) Orthaugit

Kristallographische Daten (Goldschmidt, Winkeltabellen 281) $(111) = F$: $\varphi = 44{,}1^\circ$ $\rho = 39{,}0^\circ$; $(1\bar{1}0) = E$ $\varphi = 135{,}9^\circ$ $\rho = 90^\circ$

Optische Daten (willkürliche Annahme): $c = [n_\gamma]$, Achsenebene (100), $2V = 90^\circ$

Gesucht: Auslöschungsschiefe σ auf (111) gegen Spur von $(1\bar{1}0)$

$$\mathfrak{F}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}441248 \\ 0{,}455332 \\ 0{,}773287 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{E}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}695913 \\ -0{,}718126 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}707107 \\ 0{,}707107 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}707107 \\ 0{,}707107 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{r}_1 = [\mathfrak{F}_0 \times \mathfrak{A}_0] = \begin{pmatrix} -0{,}224828 \\ -0{,}312010 \\ 0{,}312010 \end{pmatrix} \quad \text{normiert: } \mathfrak{r}_{1_0} = \begin{pmatrix} -0{,}453991 \\ -0{,}630036 \\ 0{,}630036 \end{pmatrix} \begin{matrix} \varphi = 215{,}8^\circ \\ \rho = 51{,}0^\circ \end{matrix}$$

$$\mathfrak{r}_2 = [\mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{F}_0] = \begin{pmatrix} -0{,}868765 \\ 0{,}312010 \\ 0{,}312010 \end{pmatrix} \quad \text{normiert: } \mathfrak{r}_{2_0} = \begin{pmatrix} -0{,}891591 \\ 0{,}320208 \\ 0{,}320208 \end{pmatrix} \begin{matrix} \varphi = 289{,}8^\circ \\ \rho = 71{,}3^\circ \end{matrix}$$

$$\mathfrak{r}_{1_0} + \mathfrak{r}_{2_0} = \begin{pmatrix} -1{,}345582 \\ -0{,}309988 \\ 0{,}950244 \end{pmatrix} = \mathfrak{S}_\gamma \quad \text{normiert: } \mathfrak{S}_0 = \begin{pmatrix} -0{,}802771 \\ -0{,}184841 \\ 0{,}566914 \end{pmatrix} \begin{matrix} \varphi = 257{,}0^\circ \\ \rho = 55{,}5^\circ \end{matrix}$$

$$V_0 = [\mathfrak{E}_0 \mathfrak{F}_0 \mathfrak{S}_0] = 0{,}904542, \qquad (\mathfrak{F}_0 \cdot \mathfrak{E}_0) = -0{,}019916 = \cos\epsilon, \qquad \epsilon = 91{,}1^\circ,$$

$$\sin\epsilon = 0{,}999802 = G_0, \qquad \cos\sigma = \frac{V_0}{G_0} = \frac{0{,}904542}{0{,}999802} = 0{,}904720,$$

woraus $\sigma = 25{,}2^\circ$.

Das Ergebnis zeigt einmal mehr, dass orthorhombische Kristalle, mit Ausnahme der Flächen, welche einer der drei Hauptzonen [100], [010], [001] angehören, schief auslöschen. Schiefe Auslöschung eines Pyroxens im Dünnschliff ist daher kein hinreichendes Kriterium für dessen monokline Symmetrie. Schiefe Auslöschung lässt sich auch an Spaltblättchen nach (110) von Orthaugiten

beobachten, wenn diese nicht genau planparallel sind und zum Beispiel infolge treppenartiger Ausbildung der Spaltfläche die c-Achse nicht genau parallel zum Objektträger liegt, was zufolge der oft nur unvollkommen ausgebildeten prismatischen Spaltbarkeit der Orthaugite leicht möglich ist. Für Schnitte der Zone $[1\bar{1}0]$ ($\varphi = 44{,}1°$] berechnen sich für geringe Abweichungen von der Lage von (110) ($\rho = 90°, \sigma = 0°$) zum Beispiel für $\rho = 85°$, $\sigma = 1{,}53°$ und für $\rho = 80°$, $\sigma = 3{,}14°$, so dass bei der Messung der Auslöschungsschiefe an Spaltblättchen nach dem Prisma, welche etwa als Unterscheidungskriterium für orthorhombische und monokline Pyroxene empfohlen wird, eine gewisse Vorsicht geboten erscheint.

6. Optisch-einachsige Kristalle

Die für optisch-zweiachsige Kristalle angegebene Methode der Berechnung des Auslöschungswinkels lässt sich ohne weiteres auch auf optisch-einachsige anwenden. Auch für diese ist der Auslöschungswinkel σ für eine bestimmte Fläche F mit dem Normalvektor $\mathfrak{F}_0$ gegeben durch den Winkel zwischen einer ihrer Schwingungsrichtungen $S_{1,2}$, charakterisiert durch einen Vektor $\mathfrak{S}_{1,2}$ gegenüber einer Bezugsrichtung R, welcher der Spur einer weiteren Kristallfläche E mit dem Normalvektor $\mathfrak{E}_0$ auf F entspricht. Fig. 2a und 2b haben somit ebenfalls Gültigkeit, wie auch die Beziehungen (1), (2) und (3). Die Vektoren der Schwingungsrichtungen $\mathfrak{S}_{1,2}$ werden auch hier auf Grund der FRESNELschen Konstruktion erhalten, welche jedoch eine gewisse Spezialisierung er-

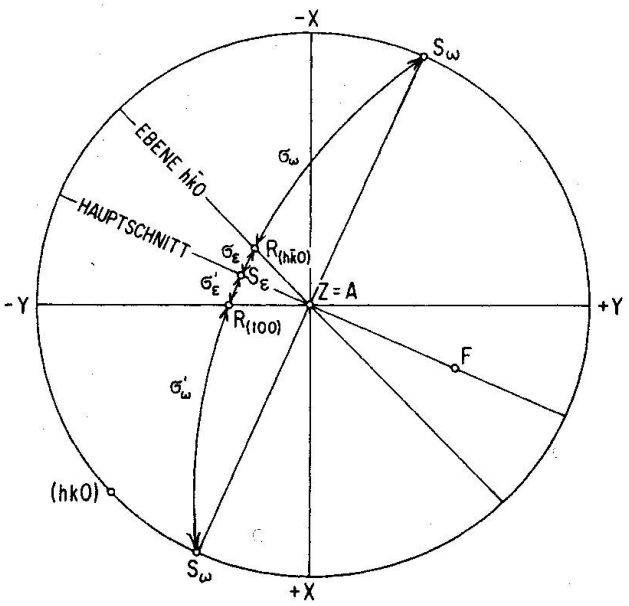

Fig. 7. Anwendung der FRESNELschen Konstruktion auf einen optisch einachsigen Kristall. Projektion auf die Basis, Bestimmung der Auslöschungsschiefe für eine Fläche F (hkl) in bezug auf die Spuren der Prismenflächen ($h\bar{k}0$) und (100).

fährt. Einachsige Kristalle lassen sich als Grenzfall zweiachsiger mit dem optischen Achsenwinkel $2V = 0$ auffassen. Wie die beiden optischen Achsen fallen auch die beiden Konstruktionsebenen $K_{1,2}$ in eine einzige zusammen. Diese verläuft durch die Flächennormale zu F und die optische Achse und entspricht somit einem Hauptschnitt der Indikatrix (Fig. 7). Von den beiden Schwingungsebenen $H_{1,2}$ liegt die eine in diesem Hauptschnitt, die zweite steht normal dazu. Die erstere entspricht der ausserordentlichen Welle mit dem Brechungsindex ϵ, die zweite der ordentlichen mit dem Brechungsindex ω. Für die Vektoren der beiden Schwingungsrichtungen erhält man:

$$\mathfrak{S}_\omega = [\mathfrak{F} \times \mathfrak{A}] \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}_\epsilon = [\mathfrak{F} \times \mathfrak{S}_\omega], \tag{8}$$

wobei $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Vektor der optischen Achse ist.

Im zweiten Ausdruck von (8) kann $\mathfrak{S}_\omega$ mit Hilfe des ersten eliminiert werden:

$$\mathfrak{S}_\epsilon = \mathfrak{F} \times [\mathfrak{F} \times \mathfrak{A}], \tag{8a}$$

wobei wiederum darauf zu achten ist, dass die Reihenfolge der Vektoren einem Rechtssystem entspricht. Durch Anwendung des Entwicklungssatzes erhält man:

$$\mathfrak{S}_\epsilon = (\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{A})\,\mathfrak{F} - (\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{F})\,\mathfrak{A} = (\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{A})\,\mathfrak{F} - |\mathfrak{F}|^2\,\mathfrak{A} \tag{9}$$

oder, wenn man zu den Einheitsvektoren übergeht,

$$\mathfrak{S}_\epsilon = (\mathfrak{F}_0 \cdot \mathfrak{A}_0)\,\mathfrak{F}_0 - \mathfrak{A}_0. \tag{9a}$$

7. Beispiele

Skapolith (131) = F, $\varphi = 18{,}4°$, $\rho = 54{,}3°$ (Goldschmidt, Winkeltabellen, 319).

Gesucht: Auslöschungsschiefen auf F gegen Spuren der Spaltbarkeiten nach den Prismen I. und II. Stellung.

Im speziellen Falle hängt es von der Schnittlage ab, ob die Spuren der beiden gleichwertigen Flächenlagen (110) und $(1\bar{1}0)$ bzw. (100) und (010) beide mit gleicher Deutlichkeit sichtbar sind oder nicht. Am deutlichsten tritt die Spaltbarkeit hervor, wenn die Spaltfläche normal zur Schliffebene steht. Je mehr sie von dieser Lage abweicht, um so undeutlicher wird sie, um bei sehr flacher Lage entweder gänzlich zu verschwinden oder zum mindesten ihre Eignung als Bezugsrichtung zu verlieren. Im folgenden wird auf diesen Umstand keine Rücksicht genommen und die Auslöschungsschiefen berechnet, wie wenn ihre experimentelle Nachprüfung in jedem Falle möglich wäre.

a) Berechnung des Vektors der o. Schwingungsrichtung

Aus $\varphi = 18{,}4°$ und $\rho = 54{,}3°$ erhält man gemäss (4) $\mathfrak{F}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}256333 \\ 0{,}770567 \\ 0{,}583541 \end{pmatrix}$

Nach (8) ist $\mathfrak{S}_\omega = [\mathfrak{F}_0 \times \mathfrak{A}_0] = \begin{pmatrix} 0{,}770567 \\ -0{,}256333 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{normiert: } \mathfrak{S}_{\omega_0} = \begin{pmatrix} 0{,}948876 \\ -0{,}315648 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \varphi = 108{,}4° \\ \rho = \ \ 90° \end{matrix}$$

b) Berechnung des Vektors der a.o. Schwingungsrichtung

Ebenfalls nach (8) ist

$$\mathfrak{S}_\epsilon = [\mathfrak{S}_\omega \times \mathfrak{F}_0] = \begin{pmatrix} -0{,}149581 \\ -0{,}449657 \\ 0{,}659480 \end{pmatrix} \qquad \text{normiert: } \mathfrak{S}_{\epsilon_0} = \begin{pmatrix} -0{,}184194 \\ -0{,}553708 \\ 0{,}812084 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \varphi = 198{,}4° \\ \rho = \ \ 35{,}7° \end{matrix}$$

oder gemäss (9a), ohne Kenntnis von $\mathfrak{S}_\omega$:

$$\mathfrak{S}_\epsilon = \mathfrak{A}_0 - (\mathfrak{A}_0 \cdot \mathfrak{F}_0)\mathfrak{F}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0{,}583541 \cdot \mathfrak{F}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}149581 \\ 0{,}449657 \\ 0{,}340520 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}149581 \\ -0{,}449657 \\ 0{,}659480 \end{pmatrix}$$

und, normiert: $\mathfrak{S}_{\epsilon_0} = \begin{pmatrix} -0{,}184194 \\ -0{,}553708 \\ 0{,}812084 \end{pmatrix}$ in Übereinstimmung mit oben.

c) Auslöschungsschiefe in bezug auf die Spaltbarkeit nach dem Prisma
I. Stellung

$$\begin{matrix} (110) = E_1 \\ \varphi = 45° \\ \rho = 90° \end{matrix} \qquad \mathfrak{E}_{1_0} = \begin{pmatrix} 0{,}707107 \\ 0{,}707107 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (1\bar{1}0) = E_2 \\ \varphi = 135° \\ \rho = \ \ 90° \end{matrix} \qquad \mathfrak{E}_{2_0} = \begin{pmatrix} 0{,}707107 \\ -0{,}707107 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die a.o. Welle erhält man:

$$V_0 = [\mathfrak{E}_{1_0} \mathfrak{F}_0 \mathfrak{S}_{\epsilon_0}] = 0{,}447760, \qquad (\mathfrak{E}_{1_0} \cdot \mathfrak{F}_0) = 0{,}726128 = \cos\epsilon, \qquad \epsilon = 43{,}4°,$$

$$\sin\epsilon = 0{,}687559 = G_0, \qquad \cos\sigma_{(110)} = \frac{V_0}{G_0} = 0{,}651231, \qquad \text{woraus } \sigma_{(110)} = 49{,}4°.$$

$$V_0 = [\mathfrak{E}_{2_0} \mathfrak{F}_0 \mathfrak{S}_{\epsilon_0}] = 0{,}894154 \qquad (\mathfrak{E}_{2_0} \cdot \mathfrak{F}_0) = -0{,}363618 = \cos\epsilon, \qquad \epsilon = 111{,}3°,$$

$$\sin\epsilon = 0{,}931548 = G_0, \qquad \cos\sigma_{(1\bar{1}0)} = \frac{V_0}{G_0} = 0{,}959858, \qquad \text{woraus } \sigma_{(1\bar{1}0)} = 16{,}3°.$$

Für die Auslöschung in bezug auf die ordentliche Welle erhält man in analoger Weise $\sigma_\omega = 40{,}6°$ bzw. $73{,}7°$.

Es ergibt sich somit, dass für die betrachtete Fläche allgemeiner Lage (131) von Skapolith die Auslöschung in bezug auf die Spuren der beiden Flächen des Prismas I. Stellung schief und nicht symmetrisch ist. Die in vielen elementaren Anleitungen zum Gebrauch des Polarisationsmikroskopes enthaltene Aussage, dass «einachsige Kristalle entweder gerade oder symmetrisch auslöschen», bedarf somit (wie dem Kenner der Materie natürlich schon längst bekannt ist) einer Ergänzung, dahingehend, dass Schnitte allgemeiner Lage (hkl) schief und nicht symmetrisch auslöschen. Das Verhalten einachsiger Kristalle hinsichtlich ihrer Auslöschung kann auch so formuliert werden, dass gerade oder symmetrische Auslöschung nur für Schnittlagen bzw. Flächen auftritt, auf welchen eine kristallographische SE normal steht oder für welche sich eine solche einstellen würde, wenn ein Symmetriezentrum hinzugefügt wird.

d) Auslöschungsschiefe in bezug auf die Spaltbarkeit nach dem Prisma II. Stellung

$$(100) = E_3 \quad \varphi = 90° \quad \rho = 90° \qquad \mathfrak{E}_{3_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (010) = E_4 \quad \varphi = 0° \quad \rho = 90° \qquad \mathfrak{E}_{4_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die a. o. Welle erhält man:

$$V_0 = [\mathfrak{F}_0 \mathfrak{S}_{\epsilon_0} \mathfrak{E}_{3_0}] = 0{,}948876, \qquad (\mathfrak{E}_{3_0} \cdot \mathfrak{F}_0) = 0{,}256333 = \cos\epsilon, \qquad \epsilon = 75{,}2°,$$

$$\sin\epsilon = 0{,}966589 = G_0, \qquad \cos\sigma_{(100)} = \frac{V_0}{G_0} = 0{,}981676, \qquad \text{woraus } \sigma_{(100)} = 11{,}0°,$$

$$V_0 = [\mathfrak{F}_0 \mathfrak{E}_{4_0} \mathfrak{S}_{\epsilon_0}] = 0{,}315649, \qquad (\mathfrak{E}_{4_0} \cdot \mathfrak{F}_0) = 0{,}770567 = \cos\epsilon, \qquad \epsilon = 39{,}6°,$$

$$\sin\epsilon = 0{,}637359 = G_0, \qquad \cos\sigma_{(010)} = \frac{V_0}{G_0} = 0{,}495245, \qquad \text{woraus } \sigma_{(010)} = 60{,}3°.$$

In bezug auf die ordentliche Welle erhält man analogerweise $\sigma_\omega = 79{,}0°$ bzw. $29{,}7°$. Auch in bezug auf die Spaltbarkeit nach dem Prisma II. Stellung ist somit die Auslöschung schief und nicht symmetrisch.

Zwischen den vier Auslöschungswinkeln in bezug auf zwei Bezugsrichtungen, welche ihrerseits die Winkel ψ_1 und ψ_2 einschliessen, ergeben sich, weil die Winkelsumme in einem Viereck 360° beträgt, eine Reihe von Beziehungen, welche, da sich ψ leicht berechnen lässt, willkommene Kontrollmöglichkeiten für berechnete oder gemessene Auslöschungswinkel bieten (Fig. 8). Sie gelten natürlich in gleicher Weise für optisch-zweiachsige Kristalle wie für die hier betrachteten optisch-einachsigen.

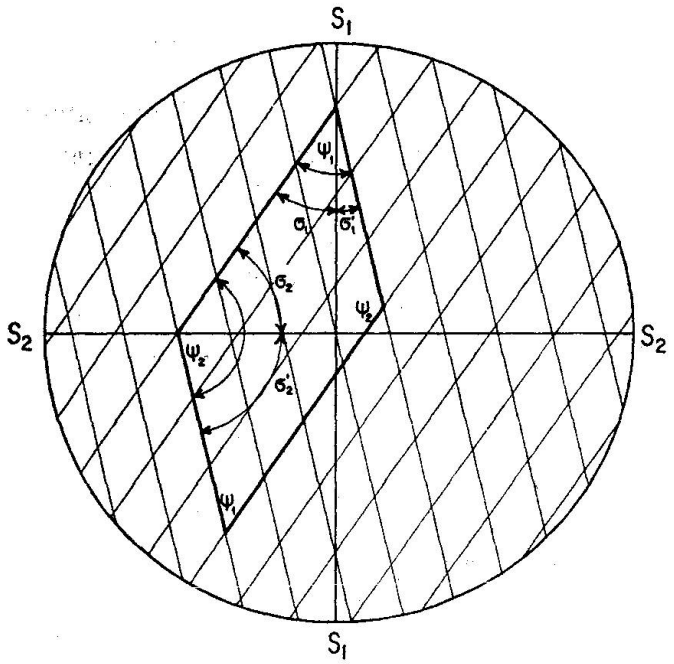

Fig. 8. Winkelbeziehungen zwischen den Schwingungsrichtungen $S_{1,2}$ einer Kristallfläche und den Spuren zweier Spaltbarkeiten.

Wie aus Fig. 8 hervorgeht, ist z.B. $\sigma_1 + \sigma_1' = \psi_1$ und $\sigma_2 + \sigma_2' = \psi_2$, woraus folgt, dass die Summe der vier Auslöschungswinkel $= \psi_1 + \psi_2 = 180°$ sein muss. Der spitze Winkel ψ_1, den die Spuren der beiden Spaltbarkeiten auf der betrachteten Fläche F einschliessen, ergibt sich zu:

$$\cos\psi_1 = \frac{[\mathfrak{F}_0 \times \mathfrak{E}_{1_0}] \cdot [\mathfrak{F}_0 \times \mathfrak{E}_{2_0}]}{|\mathfrak{F}_0 \times \mathfrak{E}_{1_0}| \cdot |\mathfrak{F}_0 \times \mathfrak{E}_{2_0}|}. \tag{10}$$

Erledigt man das auftretende skalare Produkt zweier Vektorprodukte nach der sogenannten Identität von Lagrange, so erhält man für das behandelte Beispiel von Skapolith (Auslöschung in bezug auf Prisma I):

$$\cos\psi_1 = \frac{\begin{vmatrix} (\mathfrak{F}_0 \cdot \mathfrak{F}_0) & (\mathfrak{F}_0 \cdot \mathfrak{E}_{2_0}) \\ (\mathfrak{F}_0 \cdot \mathfrak{E}_{1_0}) & (\mathfrak{E}_{1_0} \cdot \mathfrak{E}_{2_0}) \end{vmatrix}}{|\mathfrak{F}_0 \times \mathfrak{E}_{1_0}| \cdot |\mathfrak{F}_0 \times \mathfrak{E}_{2_0}|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -0{,}363618 \\ 0{,}726128 & 0 \end{vmatrix}}{0{,}687559 \cdot 0{,}931548} = 0{,}412233,$$

woraus $\psi_1 = 65{,}7°$.

Die w. o. angeführten Beziehungen sind erfüllt, denn es gilt z. B.

für die a. o. Welle $\sigma_{(110)} + \sigma_{(1\bar{1}0)} = 49{,}4° + 16{,}3° = 65{,}7° = \psi_1$

für die o. Welle $\sigma_{(110)} + \sigma_{(1\bar{1}0)} = 40{,}6° + 73{,}7° = 114{,}3° = \psi_2 = 180° - \psi_1$ usw.

IV. ZITIERTE LITERATUR

(SMPM = Schweizerische Mineralogische und Petrographische Mitteilungen)

BEREK, M. (1912): Trigonometrische Beziehungen zwischen den Orientierungen der optischen Achsen, den optischen Symmetrieachsen, sowie den Polarisationsrichtungen auf beliebigen Flächen zweiachsiger, inaktiver Kristalle. N. Jahrb. f. Min. etc. Beil. Bd. 35, 221–240.

— (1924): Mikroskopische Mineralbestimmung mit Hilfe der Universaldrehtischmethoden. Berlin.

— (1953): Anleitung zu optischen Untersuchungen mit dem Polarisationsmikroskop. 2. Aufl., herausgegeben von C. H. CLAUSEN, A. DRIESSEN u. S. RÖSCH. Stuttgart.

BURRI, C (1950a): Das Polarisationsmikroskop. Basel.

— (1950b): Anwendung der Vektorrechnung auf einige häufig auftretende kristalloptische Probleme. SMPM 30, 258–303.

— (1972): Zur Definition und Berechnung der optischen Orientierung von Plagioklasen. SMPM 52, 498–514.

— (1975a): Berechnung der GOLDSCHMIDTschen (φ, ρ)-Werte für beliebige Flächen und Zonen aus dem kristallographischen Achsenverhältnis. SMPM 55, 167–190.

— (1975b): Il calcolo dell'angolo di estinzione su di una superficie cristallografica qualsiasi. Atti Accad. Naz. Lincei, Rendic. 58, 1° sem. 629–633.

DREYER, C. u. GOLDSCHMIDT, V. (1907): Über Albit von Grönland. Medd. om Grønland 34, 1–60.

FRESNEL, A. (1868): Œuvres complètes d'AUGUSTIN FRESNEL. Herausgegeben von H. DE SÉNARMONT, E. VERDET u. L. FRESNEL. Bd. II, Paris.

GOLDSCHMIDT, V. (1897): Krystallographische Winkeltabellen. Berlin.

GROSSPIETSCH, O. (1908): Krystallform und optische Orientierung des Albites von Morro Velho und Grönland. Tschermak's Mitt. N. F. 27, 353–376.

JOHANNSEN, A. (1918): Manual of Petrographic Methods. New York.

KOMMERELL, K. (1949): Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes. Leipzig.

MICHEL-LÉVY, A. (1877): De l'emploi du microscope polarisant à lumière parallèle pour l'étude des plaques minces de roches éruptives. Ann. de. Mines (7) 12, 392–471. (Ausführliches Referat v. H. BÜCKING in: Z. Kristallogr. 3 [1879], 217–231.)

— (1888): Extinction en lumière parallèle entre les nicols croisés. In: A. MICHEL-LÉVY u. A. LACROIX, Les Minéraux des Roches, 5–40, Paris.

ROSENBUSCH, H., WÜLFING, E. A. (1921–1924): Mikroskopische Physiographie der Mineralien und Gesteine. Bd. I. 1. Untersuchungsmethoden. 5. Aufl., Stuttgart.

Manuskript eingegangen am 25. August 1975.