

Zeitschrift: Schweizerische mineralogische und petrographische Mitteilungen =
Bulletin suisse de minéralogie et pétrographie

Band: 53 (1973)

Heft: 1

Artikel: Eine Methode zur genauen Einmessung der optischen Achsen bei U-
Tischuntersuchungen

Autor: Burri, Conrad

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-41367>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 30.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Eine Methode zur genauen Einmessung der optischen Achsen bei U-Tischuntersuchungen

Von *Conrad Burri* (Zürich)*)

Mit 9 Figuren und 6 Tabellen im Text

Zusammenfassung

Die Doppelbrechung optisch-zweiachsiger Kristalle wird für in der Achsenebene liegende Wellennormalenrichtungen in Abhängigkeit des Richtungswinkels gegenüber $[n_\gamma]$ für eine Reihe von $2V$ berechnet und graphisch dargestellt. Die Kurven für die verschiedenen $2V$ verlaufen identisch, sind jedoch in Richtung der Ordinate gegeneinander verschoben. Sie weisen für $x = \pi/4$ einen Wendepunkt auf. Ihre Schnittpunkte mit der Abszisse (Doppelbrechung = 0) entsprechen den Positionen der optischen Achsen. Für $2V > 62^\circ$ fallen die Schnittpunkte mit der Abszisse für Kurve und Wendetangente innerhalb der Messgenauigkeit zusammen. Da die Wendetangente als Gerade durch zwei Punkte eindeutig bestimmt ist, genügen daher zwei Gangunterschiedsmessungen in Nachbarschaft der optischen Achse zu deren genauen Lokalisierung und damit zur Bestimmung von $2V$. Die Methode ist auch für Achsenwinkel $2V < 62^\circ$ anwendbar wenn eine entsprechende Korrektur angebracht wird, wofür ein Diagramm gegeben wird. Die gesamten Betrachtungen haben Gültigkeit im Rahmen der Mallardschen Annäherung.

English Summary

The birefringence for wavenormal directions within the axial plane of optically biaxial crystals is calculated for various values of the axial angle $2V$ in function of the direction angle to $[n_\gamma]$ and is represented graphically. The resulting curves for the various axial angles are identical in shape but differ in their ordinates. They show a point of inflexion for the value $x = \pi/4$. Their point of intersection with the abszyssa (corresponding to double refraction zero) indicate the positions of the optic axes. For $2V > 62^\circ$ the points at which curve and inflexion tangent intersect the abszyssa are, within the limits of experimental error, coincident. The tangent, being a straight line, is fully determined by two points. Therefore the measurement of two path differences near the optic axis is sufficient for its precise location and the determination of $2V$. The method can be used also for $2V < 62^\circ$ if an appropriate correction be made, for which a diagram is given. The method here proposed holds good within the limits of the Mallard approximation.

*) Adresse des Autors: Prof. Dr. C. Burri, Institut für Kristallographie und Petrographie ETH, Sonneggstrasse 5, CH-8006 Zürich.

Inhalt

I. Einleitung und Problemstellung	2
II. Eine neue Methode zur Einmessung der optischen Achsen.....	4
1. Zur Theorie der Methode.....	4
2. Zur Praxis der Methode.....	13
a) Verfahren bei $2V > 62^\circ$	13
Beispiel	18
b) Verfahren bei $2V < 62^\circ$	20
Beispiel	21
3. Anhang	23
a) Bemerkungen zur Messung der Gangunterschiede	23
b) Die Mallardschen Formeln.....	24
III. Zitierte Literatur	26

I. EINLEITUNG UND PROBLEMSTELLUNG

Der wahre Winkel der optischen Achsen $2V$ bildet seit Einführung der U-Tischmethoden eines der wichtigsten Kennzeichen zur Charakterisierung optisch-zweiachsiger Kristallarten. Im Gegensatz zu den konoskopischen Methoden, welche in ihrer Anwendbarkeit an bestimmte Schnittlagen gebunden sind, erlauben die U-Tischmethoden die Bestimmung von $2V$ in sozusagen allen Fällen, sofern sie überhaupt anwendbar sind. Die Bestimmung erfolgt entweder direkt, wozu mindestens eine optische Achse der Einmessung zugänglich sein muss, oder indirekt aus der Messung von Auslöschungsschiefen oder Gangunterschieden. Auf der Messung von Auslöschungsschiefen beruht die theoretisch äusserst ingenieure «Methode der charakteristischen Auslöschung» (BEREK 1924), später in «Charakteristische Funktion der Auslöschung» umbenannt (RINNE-BEREK 1953). Sie ergibt sich aus einer erschöpfenden trigonometrischen Auswertung der Fresnelschen Konstruktion. Sie liefert jedoch in der Praxis nur unter günstigen Bedingungen brauchbare Resultate. Unerlässlich ist die völlige Homogenität des betreffenden Kristalls, sowie eine zweckmässige Wahl der Versuchsbedingungen. Die Methode wird daher, auch in ihrer Modifikation durch DODGE (1934) nur selten angewandt.

Sehr gute Resultate, und zwar im allgemeinen solche, welche den durch die direkte Methode erhaltenen überlegen sind, erreicht man durch die Anwendung der Mallardschen Formeln, was allerdings verlangt, dass zwei Hauptschwingungsrichtungen einmessbar sind. Ist nur eine solche zugänglich, so muss das Nikitinsche Verfahren unter Benützung des Gangunterschiedes in einer Hilfsrichtung innerhalb einer optischen Symmetrieebene angewandt werden, oder, weitaus besser, die ebenfalls von BEREK angegebene «Methode des

charakteristischen Gangunterschiedverhältnisses» (BEREK 1924), später in «Charakteristische Funktion der Doppelbrechung» umbenannt (RINNE-BEREK 1953). Sie stellt die ergiebigste und wohl auch genaueste Methode zur Ermittlung von $2V$ bei Dünnschliffuntersuchungen dar.

Bei Routineuntersuchungen wird überwiegend die direkte Methode angewandt, zumal sie sich direkt mit der Einmessung der optischen Symmetrieebenen verbinden lässt, welche ihrerseits die grundlegende Ausgangsoperation für alle U-Tischuntersuchungen darstellt. Sie verlangt auch kein zusätzliches Instrumentarium, wie z. B. Kompensator oder besondere Beleuchtungseinrichtung. Leider wohnt ihr jedoch die jedem U-Tischpraktiker hinlänglich bekannte Schwierigkeit inne, dass sich die Position der optischen Achse innerhalb der normal zu A_4 (BEREK, Kontrollachse von REINHARD) stehenden Achsenenebene sehr oft nicht mit der an sich wünschenswerten Genauigkeit einstellen lässt. Auch bei sorgfältiger Regelung der Beleuchtung und Kontrolle der Aperturverhältnisse mit Hilfe der Bertrandlinse, ist die Stellung der maximalen Dunkelheit, welche dem Durchgang der optischen Achse entspricht, oft so schlecht definiert, dass für deren Position eine Unsicherheit von 1° – 2° bestehen bleibt. Da sich dieser Fehler im ungünstigsten Fall für die Angabe von $2V$ verdoppeln kann, ist ohne weiteres klar, dass es von grösstem Interesse ist, ihn möglichst klein zu halten. Gewisse Kunstgriffe gestatten zwar oft, die Lage der optischen Achse etwas zu präzisieren. Für den Fall, dass der Grund für die Schwierigkeit der Festlegung der Achsenposition nur durch das Auftreten einer Achsendispersion bedingt ist, hilft die Verwendung homogenen Lichtes bzw. eines entsprechenden Filters. In andern Fällen wird etwa angeraten, beim Arbeiten im weissen Licht das Rot I einzuschalten und den Mikroskopisch zu drehen. Weil das menschliche Auge auf leichte Abweichungen des Rot I gegen blau oder belb besser anspricht als auf geringe Abweichungen von der maximalen Dunkelheit, mag es auf diese Weise, unter günstigen Umständen, gelingen, die Achsenposition genauer zu erhalten. Trotz dieser Hilfsmittel bleibt das Problem jedoch bestehen. Unter Umständen lässt sich eine genauere Einstellung der Achse auch durch die Verwendung konvergenten Lichtes erreichen (sog. «Drehkonoskop»). Hierzu benötigt man allerdings Spezialobjektive höherer Apertur, sowie einen Spezialkondensor bzw. eine Vorrichtung, welche erlaubt ein dem zur Beobachtung benützten Objektiv analoges System als Kondensor zu verwenden.

Da es sich bei der Festlegung der Achsenrichtung im Prinzip darum handelt, eine Richtung vom Gangunterschied Null aufzufinden, liegt es nahe, diese aus Messungen von Gangunterschieden in ihrer unmittelbaren Umgebung zu interpolieren. Hierzu bedarf es jedoch als notwendige Voraussetzung, ganz allgemein, einer Kenntnis der Doppelbrechung für Wellennormalenrichtungen innerhalb der optischen Achsenenebene in Abhängigkeit von ihrer speziellen Lage. Dieses Problem soll daher in einem ersten, theoretischen Abschnitt

näher untersucht werden. Die praktische Anwendung der gewonnenen Erkenntnisse hinsichtlich der Auffindung der Position der optischen Achsen soll daran anschliessend behandelt werden.

II. EINE NEUE METHODE ZUR EINMESSUNG DER OPTISCHEN ACHSEN

1. Zur Theorie der Methode

Es handelt sich vorerst darum, die Doppelbrechung für in der Achsenebene liegende Wellennormalenrichtungen in Abhängigkeit von deren speziellen Lage zu berechnen. Für die normal zur Achsenebene schwingende Welle ist der Brechungsindex bekannt, er ist konstant und gleich n_β . Für die parallel zur Achsenebene schwingende Welle ist er jedoch variabel und muss berechnet werden um die Doppelbrechung zu erhalten. Hierzu kann man von einem Ansatz Gebrauch machen, wie er schon von BEREK anlässlich der Herleitung seiner «Methode des charakteristischen Gangunterschiedsverhältnisses» (BEREK 1924) benutzt wurde. Aus Symmetriegründen genügt die Betrachtung eines einzigen Quadranten.

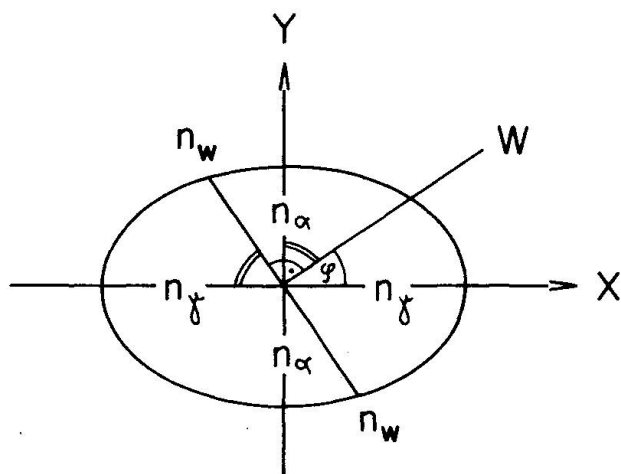


Fig. 1. Indikatrixschnitt parallel zur optischen Achsenebene.

Die Gleichung des Indikatrixhauptschnittes mit den Halbachsen n_α und n_γ , d. h. der optischen Achsenebene, lautet in kartesischen Koordinaten (Fig. 1):

$$\frac{x^2}{n_\gamma^2} + \frac{y^2}{n_\alpha^2} - 1 = 0. \quad (1)$$

Gemäss der Problemstellung ist die betrachtete Wellennormalenrichtung W durch einen Richtungswinkel in bezug auf eine feste Bezugsrichtung festzulegen, welcher als Parameter betrachtet werden kann. Ist n_w ein beliebiger

Ellipsenradius, entsprechend der Schwingungsrichtung $[n_w]$ ¹⁾ einer Welle mit dem Brechungsindex n_w und bildet $[n_w]$ mit der X-Achse $[n_\gamma]$ den Winkel $[n_w, n_\gamma]$, so ist $x = n_w \cos[n_w, n_\gamma]$ und $y = n_w \sin[n_w, n_\gamma]$. Durch Substitution in (1) erhält man die Ellipsengleichung in Parameterform:

$$\frac{n_w^2}{n_\gamma^2} \cos^2 [n_w, n_\gamma] + \frac{n_w^2}{n_\alpha^2} \sin^2 [n_w, n_\gamma] - 1 = 0. \quad (2)$$

Die Fortpflanzungsrichtung der betrachteten Welle (Wellennormale) W vom Brechungsindex n_w steht normal zu ihrer Schwingungsrichtung $[n_w]$ und bildet ihrerseits mit $[n_\gamma]$ den Winkel φ . Da jedoch $\varphi = 90^\circ - [n_w, n_\gamma]$ ist, so wird weiter:

$$\frac{n_w^2}{n_\gamma^2} \sin^2 \varphi + \frac{n_w^2}{n_\alpha^2} \cos^2 \varphi - 1 = 0. \quad (3)$$

Ersetzt man den cos durch den sin, so folgt hieraus nach Umformung:

$$\frac{n_\gamma^2 - n_\alpha^2}{n_\gamma^2} = \frac{n_w^2 - n_\alpha^2}{n_w^2 \sin^2 \varphi}. \quad (4)$$

Da die linke Seite von (4) für eine gegebene Ellipse eine Konstante ist, muss auch die rechte in bezug auf φ bzw. W eine Invariante sein. Es gilt daher, wenn W' eine zweite in der Achsenebene liegende Wellennormale darstellt, welche mit $[n_\gamma]$ einen Winkel φ' bildet:

$$\frac{n_w^2 - n_\alpha^2}{n_w^2 \sin^2 \varphi} = \frac{n_w'^2 - n_\alpha^2}{n_w'^2 \sin^2 \varphi'}, \quad \text{woraus weiter folgt: } \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'} = \frac{n_w'}{n_w} \sqrt{\frac{n_w^2 - n_\alpha^2}{n_w'^2 - n_\alpha^2}}. \quad (5)$$

Aus der rechten Seite von (5) lässt sich, in Analogie zur Mallardschen Annäherung ein Faktor F

$$F = \frac{n_w'}{n_w} \sqrt{\frac{n_w + n_\alpha}{n_w' + n_\alpha}}$$

absondern, dessen Wert für alle petrographisch in Betracht fallenden Mineralarten so wenig von 1 abweicht, dass der dadurch begangene Fehler immer innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der U-Tischmethoden liegt. Es genügt daher im folgenden die vereinfachte Beziehung

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'} = \sqrt{\frac{n_w - n_\alpha}{n_w' - n_\alpha}} \quad (6)$$

zu betrachten. Setzt man darin $\varphi' = \pi/2$ und entsprechend $n_w' = n_\gamma$, so erhält man

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{n_w - n_\alpha}{n_\gamma - n_\alpha}}$$

¹⁾ Hier und im folgenden steht $[n_x]$ immer für die Schwingungsrichtung einer Welle vom Brechungsindex n_x . Das Symbol n_x (ohne Klammer) bleibt für den numerischen Wert des Brechungsindex reserviert.

und nach n_w aufgelöst, für den gesuchten Brechungsindex der Welle, welche sich in Richtung W mit Schwingungsrichtung parallel zur Achsenebene fortpflanzt:

$$n_w = n_\alpha + (n_\gamma - n_\alpha) \sin^2 \varphi. \quad (7)$$

Da der Brechungsindex der andern, sich in Richtung W fortpflanzenden Welle, mit Schwingungsrichtung normal zur Achsenebene, unabhängig von φ , den konstanten Wert n_β aufweist, ist die Doppelbrechung in Richtung W somit:

$$\begin{aligned} |n_w - n_\beta| &= (n_\alpha - n_\beta) + (n_\gamma - n_\alpha) \sin^2 \varphi, \\ |n_w - n_\beta| &= -(n_\beta - n_\alpha) + (n_\gamma - n_\alpha) \sin^2 \varphi, \end{aligned} \quad (8)$$

wobei $n_w \begin{smallmatrix} \geq \\ \leq \end{smallmatrix} n_\beta$ ist, je nachdem $\varphi \begin{smallmatrix} \geq \\ \leq \end{smallmatrix} V_\gamma$.

Führt man für die drei Hauptdoppelbrechungen besondere Symbole nach folgendem Schema ein:

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha &= (n_\gamma - n_\beta), \\ \Delta_\beta &= (n_\gamma - n_\alpha), \\ \Delta_\gamma &= (n_\beta - n_\alpha) \end{aligned} \quad (9)$$

und bezeichnet man ganz allgemein die Doppelbrechung Δ für eine Richtung W , welche mit $[n_\gamma]$ den Winkel φ einschliesst mit Δ_φ , so folgt aus (8):

$$\Delta_\varphi = -\Delta_\gamma + \Delta_\beta \sin^2 \varphi \quad (10)$$

bzw. unter Berücksichtigung, dass $\Delta_\beta = \Delta_\alpha + \Delta_\gamma$ ist,

$$\Delta_\varphi = -\Delta_\gamma + (\Delta_\alpha + \Delta_\gamma) \sin^2 \varphi.$$

Für gewisse Zwecke empfiehlt sich folgende Umformung:

$$\begin{aligned} \Delta_\varphi &= \Delta_\gamma (\sin^2 \varphi - 1) + \Delta_\alpha \sin^2 \varphi, \\ \Delta_\varphi &= -\Delta_\gamma (1 - \sin^2 \varphi) + \Delta_\alpha \sin^2 \varphi, \\ \Delta_\varphi &= \Delta_\alpha \sin^2 \varphi - \Delta_\gamma \cos^2 \varphi. \end{aligned} \quad (11)$$

Auf Grund von (11) berechnen sich für eine Reihe von speziellen Wellennormalenrichtungen im Abstand von $\pi/12 = 15^\circ$ die Doppelbrechungen von Tabelle 1. Von Bedeutung ist auch der Fall, dass $\varphi = V_\gamma$, d. h. dass W mit einer optischen Achse zusammenfällt. Da nach den Mallardschen Formeln gilt, dass $\sin^2 V_\gamma = \Delta_\gamma / \Delta_\beta$, sowie dass $\cos^2 V_\gamma = \Delta_\alpha / \Delta_\beta$, so erhält man aus (11):

$$\Delta_\varphi = \Delta_\alpha \frac{\Delta_\gamma}{\Delta_\beta} - \Delta_\gamma \frac{\Delta_\alpha}{\Delta_\beta} = 0.$$

Der Schnittpunkt der Kurve $\Delta = f(\varphi)$ mit der Abszissenachse entspricht somit der optischen Achse und seine Abszisse dem Achsenwinkel V . Dies folgt auch aus (11) durch Nullsetzung:

$$\Delta_\varphi = \Delta_\alpha \sin^2 \varphi - \Delta_\gamma \cos^2 \varphi = 0, \quad \frac{\Delta_\gamma}{\Delta_\alpha} = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

Da nach Mallard jedoch $\Delta_\gamma/\Delta_\alpha = \operatorname{tg}^2 V_\gamma$ ist, wird $\varphi = V_\gamma = (\pi/2 - V_\alpha)$.

Tabelle 1

φ	$\Delta_\varphi = \Delta_\alpha \sin^2 \varphi - \Delta_\gamma \cos^2 \varphi$
$0 = 0^\circ$	$-\Delta_\gamma$
$\pi/12 = 15^\circ$	$\frac{1}{4} [2 (\Delta_\alpha - \Delta_\gamma) - \sqrt{3} (\Delta_\alpha + \Delta_\gamma)]$
$\pi/6 = 30^\circ$	$\frac{1}{4} (\Delta_\alpha - 3 \Delta_\gamma)$
$\pi/4 = 45^\circ$	$\frac{1}{2} (\Delta_\alpha - \Delta_\gamma)$
$\pi/3 = 60^\circ$	$\frac{1}{4} (3 \Delta_\alpha - \Delta_\gamma)$
$5\pi/12 = 75^\circ$	$\frac{1}{4} [2 (\Delta_\alpha - \Delta_\gamma) + \sqrt{3} (\Delta_\alpha + \Delta_\gamma)]$
$\pi/2 = 90^\circ$	$+\Delta_\alpha$

(12)

Das Kurvenbild der Funktion $\Delta = f(\varphi)$ erhält man auf anschauliche Weise indem man die beiden Terme $y_1 = \Delta_\alpha \sin^2 \varphi$ und $y_2 = \Delta_\gamma \cos^2 \varphi$ vorerst gesondert betrachtet. Da für beide die trigonometrische Funktion im Quadrat steht, sind sämtliche Ordinaten positiv und man erhält in beiden Fällen sinoidenartige Kurvenbilder, welche gänzlich auf der positiven Seite der Abszisse liegen.

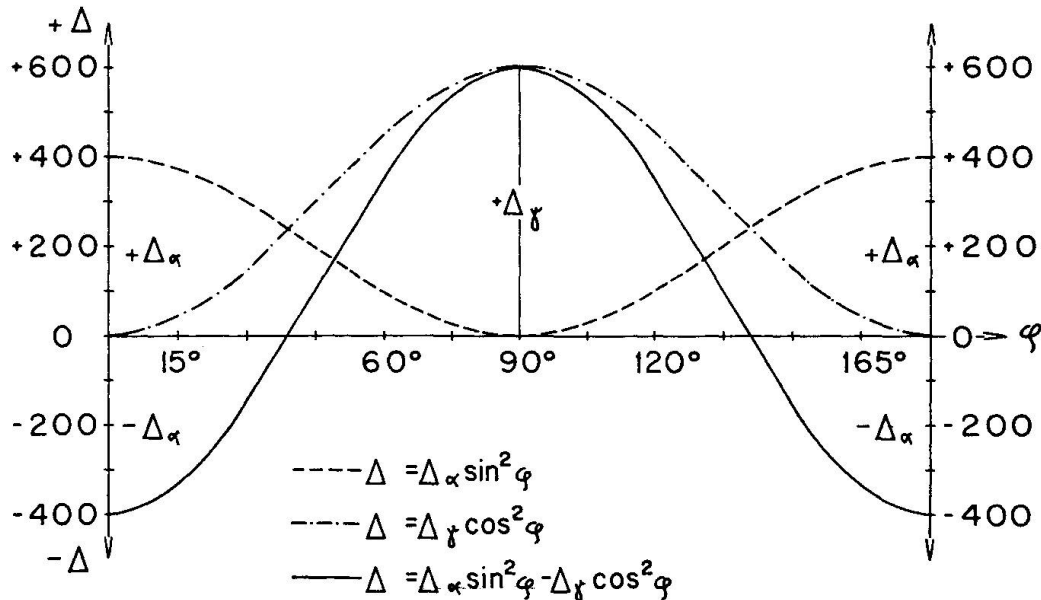


Fig. 2. Variation der Doppelbrechung für in der optischen Achsenebene liegende Wellennormalenrichtungen in Funktion des Richtungswinkels.

Durch Bildung der Differenz $y_1 - y_2$ erhält man, auf ähnliche Weise wie man die Resultante zweier interferierender Wellen für einen gegebenen Gangunterschied konstruiert, das gesuchte Kurvenbild der Funktion $y = \Delta_\alpha \sin^2 \varphi - \Delta_\gamma \cos^2 \varphi$. Fig. 2 gibt diese Konstruktion für die willkürliche Annahme $\Delta_\alpha = 600 \text{ nm}$, $\Delta_\gamma = 400 \text{ nm}$, somit $\Delta_\beta = 1000 \text{ nm}^2$).

Die resultierende Kurve ist in ihrem Verlauf ebenfalls der sin- bzw. cos-Kurve ähnlich. Sie hat wie diese die Periode π und liegt z. T. oberhalb, z. T. unterhalb der Abszisse, wobei die maximalen Amplituden durch die beiden Hauptdoppelbrechungen Δ_α und Δ_γ gegeben sind. Für die gewählten Annahmen ergibt sich folgende Wertetabelle:

φ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
Δ_φ	-400	-333	-150	+100	+350	+533	+600

Für $y = \Delta_\varphi = 0$ wird $\varphi = V_\gamma = 39,2^\circ$. Aus Symmetriegründen genügt, wie schon früher erwähnt, die Betrachtung des Intervalles $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, d. h. eines einzigen Quadranten.

Um eine Übersicht über den Verlauf der Kurven für verschiedene Bedingungen zu erhalten, empfiehlt es sich statt der Hauptdoppelbrechungen den Achsenwinkel $2V$ einzuführen und diesen als unabhängige Variable zu betrachten. Dies wird durch die Mallardschen Formeln ermöglicht, welche bekanntlich den Achsenwinkel durch das Verhältnis zweier Hauptdoppelbrechungen auszudrücken gestatten. Setzt man willkürlich $\Delta_\beta = 1$, so berechnen sich aus $\Delta_\alpha + \Delta_\gamma = 1$ und $\text{tg}^2 V_\gamma = \Delta_\alpha / \Delta_\gamma = \text{cotg}^2 V_\alpha$ für eine Reihe von verschiedenen $2V$ die Werte von Tabelle 2 für die Hauptdoppelbrechungen Δ_α und Δ_γ .

Tabelle 2

(+) 2 V	Δ_α	Δ_γ	(-) 2 V	Δ_α	Δ_γ
0°	1	0	90°	0,5	0,5
30°	0,933	0,067	70°	0,329	0,671
50°	0,821	0,179	50°	0,179	0,821
70°	0,671	0,329	30°	0,067	0,933
90°	0,5	0,5	0°	0	1

V wird hierbei immer spitz genommen, d. h. von 0° bis 45° gezählt und für optisch-positive Kristalle auf $[n_\gamma]$, für optisch-negative auf $[n_\alpha]$ bezogen.

Auf Grund von (12) erhält man aus den Werten von Tabelle 2 für eine Reihe von φ die in Tabelle 3 aufgeführten Doppelbrechungen:

²⁾ In der Kristalloptik war es bisher allgemein üblich, Gangunterschiede in Mikromillimetern, abgekürzt $m\mu$ oder $\mu\mu$ anzugeben, wobei $1 m\mu = 10^{-6} \text{ mm} = 10^{-9} \text{ m}$ entspricht. Neuerdings werden Gangunterschiede jedoch mehrheitlich in Metern ausgedrückt, wobei dem Faktor 10^{-9} das Präfix «nano» entspricht, abgekürzt «n». Einem Gangunterschied von $1 m\mu$ entspricht somit ein solcher von $1 \text{ Nanometer} = 1 \text{ nm}$.

Tabelle 3

$2V$	Δ_0	Δ_{15}	Δ_{30}	Δ_{45}	Δ_{60}	Δ_{75}	Δ_{90}
0°	0	+0,067	+0,250	+0,500	+0,750	+0,933	+1,000
$+30^\circ$	-0,067	0	+0,183	+0,433	+0,683	+0,861	+0,933
$+50^\circ$	-0,179	-0,112	+0,714	+0,321	+0,571	+0,754	+0,821
$+70^\circ$	-0,329	-0,262	-0,079	+0,171	+0,421	+0,604	+0,671
$\pm 90^\circ$	-0,500	-0,432	-0,250	0	+0,250	+0,432	+0,500
-70°	-0,671	-0,604	-0,421	-0,171	+0,079	+0,262	+0,329
-50°	-0,821	-0,754	-0,571	-0,321	-0,071	+0,112	+0,179
-30°	-0,933	-0,861	-0,683	-0,433	-0,183	0	+0,067
0°	-1,000	-0,933	-0,750	-0,500	-0,250	-0,067	0

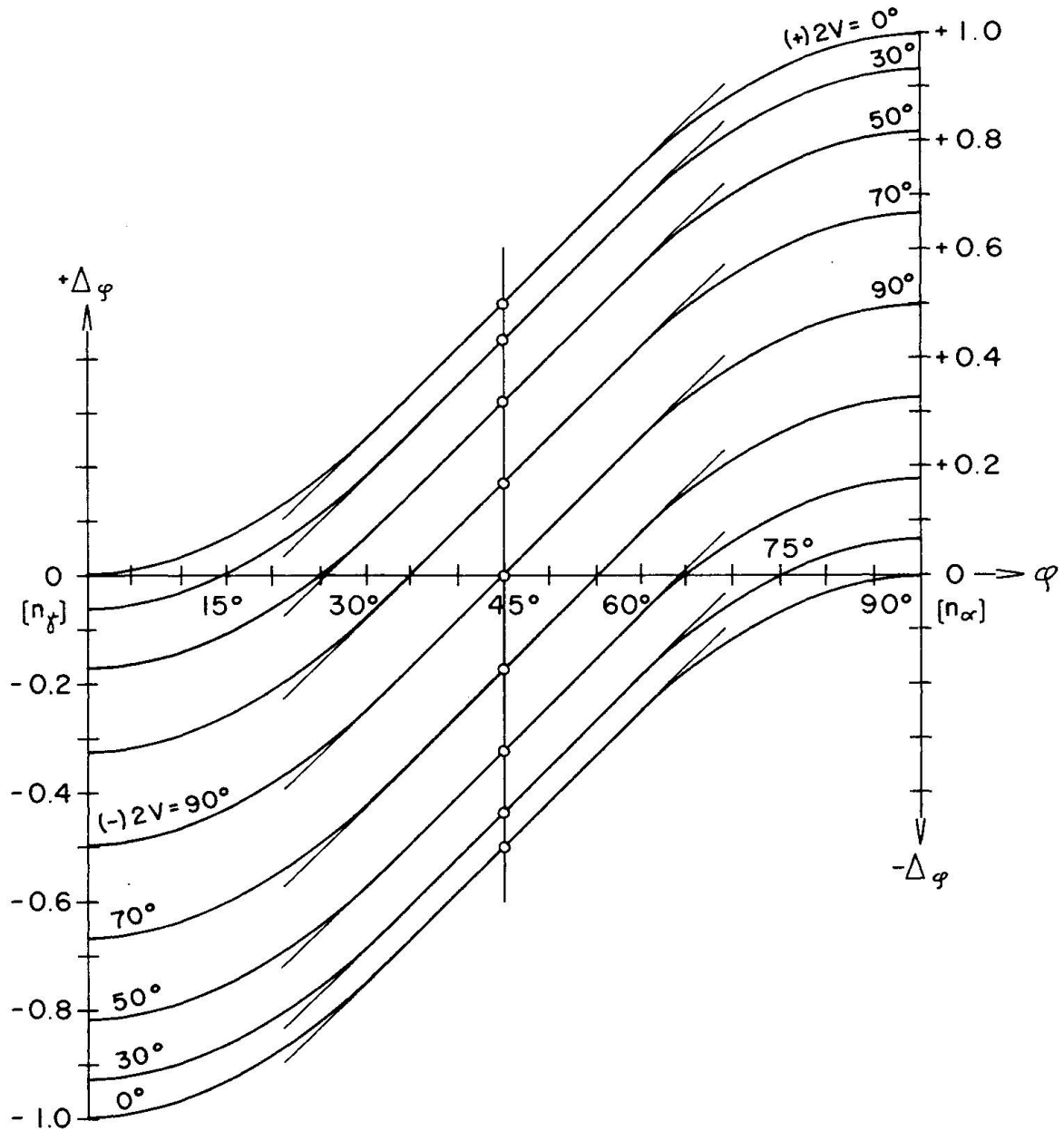


Fig. 3. Variation der Doppelbrechung für in der optischen Achsenebene liegende Wellennormalenrichtungen in Funktion des Richtungswinkels für verschiedene $2V$. Die für $\varphi = 45^\circ$ vorhandenen Wendepunkte mit den zugehörigen Wendetangenten sind eingezeichnet.

Auf Grund von Tabelle 3 lässt sich Fig. 3 zeichnen, in welcher auch die später zu erwähnenden Wendepunkte und Wendetangenten der einzelnen Kurven eingezeichnet sind. Da die Schnittpunkte der Kurven von Fig. 3 mit der Abszisse den Positionen der optischen Achsen entsprechen, ist es notwendig diese zu berechnen, wie dies schon im Anschluss an die Ableitung von (12) geschah.

Bezeichnet man φ für $\Delta = 0$ mit φ_0 , so erhält man $\varphi_0 = V_\gamma$ für optisch-positiv und $\varphi_0 = V_\alpha = (\pi/2 - V_\gamma)$ für optisch negativ. Der Zusammenhang zwischen $2V$ und φ_0 ist aus Tabelle 4 ersichtlich.

Tabelle 4

$2V$	0°	$+10^\circ$	$+30^\circ$	$+50^\circ$	$+70^\circ$	$\pm 90^\circ$	-70°	-50°	-30°	-10°	0°
φ_0	0°	5°	15°	25°	35°	45°	55°	65°	70°	85°	90°

Weitere Eigenschaften der Doppelbrechungskurven ergeben sich aus einer eingehenderen Diskussion. Hierfür ist die Funktion $f(\varphi) = \Delta_\varphi = \Delta_\alpha \sin^2 \varphi - \Delta_\gamma \cos^2 \varphi$ nach φ zu differenzieren.

Man erhält $f'(\varphi) = 2\Delta_\alpha \sin \varphi \cos \varphi - 2\Delta_\gamma \cos \varphi \sin \varphi = \Delta_\alpha \sin 2\varphi + \Delta_\gamma \sin 2\varphi = \Delta_\beta \sin 2\varphi$

$$f'(\varphi) = \Delta_\beta \sin 2\varphi, \quad (13)$$

$$f''(\varphi) = 2\Delta_\beta \cos 2\varphi, \quad (14)$$

$$f'''(\varphi) = -4\Delta_\beta \sin 2\varphi. \quad (15)$$

Setzt man $f'(\varphi) = 0$, so erhält man als Wurzeln $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = \pi/2$. Es müssen somit für diese Abszissen Extrema vorhanden sein. In (14) eingesetzt ergibt sich $f''(\varphi_1) > 0$ und $f''(\varphi_2) < 0$, für $\varphi_1 = 0$ existiert somit ein Minimum, für $\varphi_2 = \pi/2$ jedoch ein Maximum auf. Durch Einsetzen von φ_1 und φ_2 in (11) ergeben sich diese Extrema zu $\Delta_{min} = -\Delta_\gamma$ und $\Delta_{max} = +\Delta_\alpha$.

Aus $f''(\varphi) = 0$ folgt $\varphi = \pi/4$. Diesen Wert in (15) eingesetzt ergibt $f'''(\varphi) = -4\Delta_\beta \neq 0$. Da $f'''(\varphi) \neq 0$ ist, hat die Kurve einen Wendepunkt mit der Abszisse $x_w = \pi/4$. Die zugehörige Ordinate folgt durch Einsetzen dieses Wertes in (11) zu $y_w = \frac{1}{2}(\Delta_\alpha - \Delta_\gamma)$. Die Koordinaten des Wendepunktes sind somit:

$$\begin{aligned} x_w &= \pi/4, \\ y_w &= \frac{1}{2}(\Delta_\alpha - \Delta_\gamma) = \frac{1}{2}(\Delta_\beta - 2\Delta_\gamma) = \frac{1}{2}(2\Delta_\alpha - \Delta_\beta). \end{aligned} \quad (16)$$

Die Abszisse des Wendepunktes ist somit bemerkenswerter Weise unabhängig vom Achsenwinkel. In Fig. 3 sind die Wendepunkte mit den zugehörigen Wendetangenten eingezeichnet.

Die Ordinate des Wendepunktes ist positiv oder negativ, je nachdem $\Delta_\alpha \leq \Delta_\gamma$ ist. Da aus der Mallardschen Formel $\text{tg}^2 V_\gamma = \Delta_\gamma / \Delta_\alpha$ folgt, dass für optisch-positive Kristalle $\Delta_\alpha > \Delta_\gamma$ ist, für optisch-negative jedoch $\Delta_\alpha < \Delta_\gamma$, weil für optisch-neutrale $\text{tg}^2 V_\gamma = \text{tg}^2 V_\alpha = \text{tg}^2 \pi/4 = 1$ ist, so ist somit y_w für

optisch-positive Kristalle positiv und für optisch negative negativ. Für optisch-neutral wird $y_w = 0$, d. h. der Wendepunkt fällt in die Abszissenachse.

Die näheren Beziehungen zwischen y_w und V erhält man wiederum durch Anwendung der Mallardschen Formeln. Auch hier ist es von Vorteil, den Achsenwinkel immer spitz zu nehmen und für optisch-positiv auf $[n_\gamma]$, für optisch-negativ auf $[n_\alpha]$ zu beziehen.

Betrachtet man vorerst den optisch-positiven Fall, so folgt aus der Mallardschen Formel für die tg-Funktion $\Delta_\gamma = \Delta_\alpha \operatorname{tg}^2 V_\gamma$. Andererseits ist gemäss (16) $\Delta_\gamma = \Delta_\alpha - 2y_w$, so dass $\Delta_\alpha - 2y_w = \Delta_\alpha \operatorname{tg}^2 V_\gamma$, woraus weiter folgt:

$$y_w = \frac{\Delta_\alpha}{2}(1 - \operatorname{tg}^2 V_\gamma), \quad (17)$$

$$\operatorname{tg} V_\gamma = \sqrt{1 - \frac{2y_w}{\Delta_\alpha}}. \quad (18)$$

Für den optisch-neutralen Fall erhält man aus (17) für $V_\gamma = \pi/4$ und $y_w = 0$, sowie aus (18) für $y_w = 0$, $\operatorname{tg}^2 V_\gamma = 1$ und $V_\gamma = \pi/4$.

Für den optisch-negativen Fall ergibt sich auf analoge Weise aus $\operatorname{cotg}^2 V_\gamma = \operatorname{tg}^2 V_\alpha = \Delta_\alpha / \Delta_\gamma$, dass $\Delta_\alpha = \Delta_\gamma \operatorname{tg}^2 V_\alpha$ ist, während andererseits aus (16) folgt, dass $\Delta_\alpha = 2y_w + \Delta_\gamma$, so dass $\Delta_\gamma + 2y_w = \Delta_\gamma \operatorname{tg}^2 V_\alpha$ wird, und

$$y_w = \frac{\Delta_\gamma}{2}(\operatorname{tg}^2 V_\alpha - 1), \quad (19)$$

$$\operatorname{tg} V_\alpha = \sqrt{1 + \frac{2y_w}{\Delta_\gamma}}. \quad (20)$$

Für den optisch-neutralen Fall ergibt sich aus (19) für $V_\alpha = \pi/4$ wiederum $y_w = 0$ und aus (20) für $y_w = 0$ folgt $\operatorname{tg} V_\alpha = 1$ bzw. $V_\alpha = \pi/4$.

Die Steigung der Wendetangente μ erhält man aus (13) durch Einsetzen von $x = \pi/4$ zu

$$\mu = \Delta_\beta \sin \frac{\pi}{2} = \Delta_\beta = (\Delta_\alpha + \Delta_\gamma). \quad (21)$$

Die Steigung der Wendetangente ist somit gleich der maximalen Doppelbrechung und daher unabhängig vom Achsenwinkel.

Die Gleichung der Wendetangente lautet:

$$y - y_w = \Delta_\beta (x - x_w), \quad (22)$$

$$y - \frac{1}{2}(\Delta_\alpha - \Delta_\gamma) = (\Delta_\alpha + \Delta_\gamma) \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

oder, nach Auflösung nach y , in Descartescher Form:

$$y = (\Delta_\alpha + \Delta_\gamma) x + \frac{\Delta_\alpha - \Delta_\gamma}{2} - \frac{\Delta_\alpha + \Delta_\gamma}{2} \frac{\pi}{2}, \quad (22a)$$

bzw. umgeformt:
$$y = (\Delta_\alpha + \Delta_\gamma) x - \Delta_\alpha \left(\frac{\pi - 2}{4} \right) - \Delta_\gamma \left(\frac{\pi + 2}{4} \right). \quad (22b)$$

Den Schnittpunkt der Wendetangente mit der X -Achse x_t , welcher für spätere Betrachtungen von Bedeutung ist, erhält man aus (22b) durch Nullsetzung und Auflösen nach x zu:

$$x_t = \frac{\Delta_\alpha \left(\frac{\pi-2}{4} \right) + \Delta_\gamma \left(\frac{\pi+2}{4} \right)}{(\Delta_\alpha + \Delta_\gamma)}. \quad (23)$$

Für den optisch-neutralen Fall ($\Delta_\alpha = \Delta_\gamma$) folgt hieraus $x_t = \pi/4$.

Auch hier ist es für gewisse Zwecke von Vorteil, an Stelle der Hauptdoppelbrechungen wiederum den Achsenwinkel als unabhängige Variable einzuführen. Aus (22) erhält man für $y = 0$

$$\Delta_\beta \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + y_w = 0$$

und unter Berücksichtigung von (17), für optisch-positive Kristalle,

$$\begin{aligned} 2 \Delta_\beta \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \Delta_\alpha (1 - \operatorname{tg}^2 V_\gamma) &= 0, \\ \frac{\Delta_\alpha}{\Delta_\beta} &= - \frac{2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{1 - \operatorname{tg}^2 V_\gamma} = \cos^2 V_\gamma, \\ \cos^2 V_\gamma (1 - \operatorname{tg}^2 V_\gamma) + 2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Drückt man den tg durch den \cos aus, so folgt nach weiterer Umformung für den Schnittpunkt der Wendetangente mit der Abszisse, in Funktion des Achsenwinkels:

$$x_t = \left(\frac{\pi+2}{4} \right) - \cos^2 V_\gamma = 1,2854 - \cos^2 V_\gamma. \quad (24)$$

Für den optisch-neutralen Fall resultiert hieraus wiederum, da $\cos^2 \pi/4 = \frac{1}{2}$ ist, $x_t = \pi/4$.

Für optisch negative Kristalle erhält man auf analoge Weise, unter Berücksichtigung von (19)

$$\begin{aligned} 2 \Delta_\beta \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \Delta_\gamma (\operatorname{tg}^2 V_\alpha - 1) &= 0, \\ \frac{\Delta_\gamma}{\Delta_\beta} &= - \frac{2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{\operatorname{tg}^2 V_\alpha - 1} = \cos^2 V_\alpha. \end{aligned}$$

Den tg wiederum durch den \cos ausgedrückt und weiter umgeformt:

$$x_t = \left(\frac{\pi-2}{4} \right) + \cos^2 V_\alpha = 0,2854 + \cos^2 V_\alpha. \quad (25)$$

Auch aus (25) folgt für optisch-neutral wiederum $x_t = \pi/4$.

Durch Elimination von x_t erhält man aus (24) und (25) $\cos^2 V_\alpha + \cos^2 V_\gamma = 1$ und, weil $V_\alpha + V_\gamma = \pi/2$, weiter $\sin^2 V_\alpha + \cos^2 V_\alpha = 1$ bzw. $\sin^2 V_\gamma + \cos^2 V_\gamma = 1$.

2. Zur Praxis der Methode

a) Verfahren bei $2V > 62^\circ$

Gemäss den eben erfolgten theoretischen Ausführungen entsprechen die optischen Achsen als Wellennormalenrichtungen mit dem Gangunterschied Null den Schnittpunkten der Doppelbrechungskurven mit der Abszissenachse. Da sich diese Kurven experimentell bestimmen lassen, kann ihr Schnittpunkt mit der Abszisse konstruiert werden. Dass, wegen der bekannten Schwierigkeiten, welche einer exakten Dickenbestimmung von Dünnschliffen innewohnen, eine Bestimmung der Doppelbrechungen, welche die Grundlagen für die gemachten theoretischen Überlegungen bildeten, an sich im allgemeinen nicht möglich ist, spielt keine Rolle. Die in den gemessenen Gangunterschieden $R = d\Delta$ enthaltene Präparatendicke d stellt einen konstanten Faktor dar, welcher bei der Bildung von Verhältnissen, wie sie z. B. bei Anwendung der Mallardschen Formeln erfolgt, herausfällt und der natürlich auch für die Konstatierung der Doppelbrechung Null ohne Bedeutung ist. Man kann also für die hier verfolgten Zwecke die Doppelbrechungskurven ohne weiteres durch Gangunterschiedskurven ersetzen, wie sie experimentell durch Gangunterschiedsmessungen für ausgewählte Wellennormalenrichtungen innerhalb der Achsenebene leicht erhalten werden.

Zu ihrer Bestimmung stellt man die optische Achsenebene, welche nicht mehr als 25° – 30° zur Schliffnormale geneigt sein sollte, normal zur Achse A_4 (BEREK, entsprechend der Kontrollachse von REINHARD) und misst für eine Reihe von Wellennormalenrichtungen, welche durch die eingestellten Winkel α_4 definiert sind, vermitteltst eines Kompensators die Gangunterschiede. Um vergleichbare Werte zu erhalten, besonders, wenn man diese auch für andere Methoden, z. B. für die direkte Anwendung der Mallardschen Formeln oder für die Methode der Achsenwinkelbestimmung aus der charakteristischen Funktion der Doppelbrechung nach BERK benützen will, reduziert man alle Messungen auf die (an und für sich unbekannt) Schliffdicke, was durch Multiplikation der Messwerte mit $\cos \alpha_2 \cos \alpha_4$ erfolgt. Von den beiden in der Achsenebene enthaltenen Extremwerten des Gangunterschiedes R_α und R_γ , welche den Bisektrizenrichtungen entsprechen, ist immer mindestens eine einmessbar. In günstigen Fällen können es auch beide sein. Trifft dies zu, so lässt sich $2V$ nach einer der Mallardschen Formeln berechnen und eine weitere Methode erübrigt sich.

Die aus den reduzierten Messwerten konstruierte Kurve der Variation des Gangunterschiedes innerhalb der Achsenebene ist jedoch, abgesehen vom Ein-

fluss des konstanten Faktors der Dicke, nicht genau mit der theoretisch ermittelten identisch, indem ihr Verlauf im Gebiet der Extrema nicht genau symmetrisch ist. Der Grund hierfür liegt im Lichtbrechungsunterschied von Kristall und Segment, welcher infolge der Anisotropie des Präparates prinzipiell nur angenähert berücksichtigt werden kann. Diese Abweichungen bedingen auch, was an sich sehr bedauerlich ist, dass sich die genaue Lage der Extrema nicht aus dem Kurvenverlauf ermitteln lässt und man hierfür auf die Resultate der Einmessung der optischen Symmetrieebenen angewiesen bleibt. Ein Verfahren, welches erlaubt die Position der durch normale Einmessung erhaltenen Bisektrizen mit Hilfe von Gangunterschiedmessungen durch systematisches Probieren zu verbessern, hat BEREK im Anschluss an seine Methode der Charakteristischen Funktion der Doppelbrechung gegeben (BEREK 1925), worauf hiermit verwiesen sei.

Im Gegensatz zur Lage der Extrema, d. h. der Hauptschwingungsrichtungen $[n_\alpha]$ und $[n_\gamma]$ lässt sich jedoch die Position der optischen Achsen mit erheblicher Genauigkeit bestimmen. Es genügt hierfür, den Verlauf der Gangunterschiedkurve in unmittelbarer Nachbarschaft der optischen Achse auf Grund einiger Gangunterschiedmessungen zu zeichnen und ihren Schnittpunkt mit der Abszisse zu bestimmen. Ist dieser ermittelt, so lässt sich der Achsenwinkel in bezug auf die benachbarte Bisektrix ablesen. Hierfür genügen im allgemeinen je zwei Gangunterschiedmessungen zu beiden Seiten des Achsenaustrittspunktes. Man wählt diese etwa $\pm 10^\circ$ und $\pm 20^\circ$ von der Achse entfernt, wobei die betreffenden α_4 -Koordinaten genau zu beachten sind, da die Gangunterschiede in unmittelbarer Nachbarschaft der optischen Achse stark richtungsabhängig sind, ganz im Unterschied zur Nachbarschaft der Bisektrizen. Bei den Gangunterschiedmessungen ist zu beachten, dass das Vorzeichen der Doppelbrechung beim Durchgang der optischen Achse wechselt, dass somit der Mikroskopisch nach Durchgang der optischen Achse um 90° gedreht werden muss, es sei denn, dass man die Messungen auf der einen Seite der optischen Achse in der Subtraktionsstellung, diejenigen auf der andern jedoch in der Additionsstellung durchführt³⁾.

Für diese Methode ergibt sich nun auf Grund der im vorhergehenden Abschnitt gemachten Überlegungen eine wesentliche Vereinfachung, ohne dass dadurch der Messgenauigkeit Abbruch getan würde. Eine Betrachtung von Fig. 3 zeigt nämlich, dass die Doppelbrechungs- bzw. Gangunterschiedskurven in der Nachbarschaft des Wendepunktes auf grössere Erstreckung annähernd geradlinig verlaufen, so dass sie mit der Wendetangente praktisch zusammenfallen. Erfolgt nun der Schnitt mit der Abszisse für einen Kurvenabschnitt, für welchen dies zutrifft, so kann an Stelle der Kurve die Tangente betrachtet werden. Diese ist jedoch als Gerade durch zwei Punkte eindeutig bestimmt,

³⁾ Man vergleiche die diesbezüglichen Ausführungen im Anhang.

so dass nur zwei Gangunterschiedsmessungen zu ihrer Definition genügen und die Lage der optischen Achsen als Schnittpunkt zweier Geraden festgelegt ist. Um diese vereinfachte Variante der Methode jedoch anwenden zu können, muss vorerst untersucht werden, welches die Bedingungen sind, unter welchen der Schnitt der Kurve mit der Abszisse derart erfolgt, dass an ihrer Stelle die Tangente betrachtet werden darf.

Man kann hierfür so vorgehen, dass man einerseits aus (11) durch Nullsetzung die Schnittpunkte x_0 der Kurven in Funktion von $2V$ berechnet und andererseits aus (24) bzw. (25) die Schnittpunkte der Wendetangenten x_t , ebenfalls in Funktion des Achsenwinkels. Durch Vergleich der beiden Werte für gegebene $2V$ erhält man die Differenz $\delta = |x_0 - x_t|$, worauf sich, je nach dem Fehler, welchen man zuzulassen gewillt ist, der Anwendungsbereich abschätzen lässt. Man erhält auf diese Weise für den optisch-positiven Fall die Werte von Tabelle 5.

Tabelle 5

(+) 2 V	0°	+5°	+10°	+20°	+30°	+40°	+50°	+60°	+65°	+70°	+80°	±90°
x_t^0	16,3	16,5	16,8	18,5	20,2	23,1	26,6	30,6	32,9	35,2	40,03	45,0
x_0^0	0	2,5	5	10	15	20	25	30	32,5	35	40	45
$\delta = x_t - x_0$	+16,3	+14,0	+11,8	+8,1	+5,2	+3,1	+1,6	+0,6	+0,4	+0,2	+0,03	0

Für den optisch-negativen Fall erhält man auf analoge Weise die Werte von Tabelle 6.

Tabelle 6

(-) 2 V	∓90°	-80°	-70°	-65°	-60°	-50°	-40°	-30°	-20°	-10°	-5°	0°
x_t^0	45,0	49,97	54,8	57,1	59,4	63,4	66,9	68,8	71,9	73,2	73,5	73,7
x_0^0	45	50	55	57,5	60	65	70	75	80	85	87,5	90
$\delta = x_t - x_0$	0	-0,03	-0,2	-0,4	-0,6	-1,6	-3,1	-5,2	-8,1	-11,8	-14,0	-16,3

Fig. 4 gibt das Bild der Abhängigkeit der Differenz δ von $2V$. Lässt man einen Fehler von $\delta = 0,5^\circ$ zu, was einem solchen von maximal 1° für $2V$ entsprechen würde, so folgt, dass die Methode der Ersetzung der Gangunterschiedskurve durch ihre Wendetangente für Kristallarten mit $62,5^\circ < 2V_\gamma < 117,5^\circ$ bzw. $117,5^\circ > 2V_\alpha > 62,5^\circ$ anwendbar ist. Sie ist somit für die überwiegende Anzahl wichtiger gesteinsbildender Mineralien brauchbar, z. B. Plagioklase, Alkalifeldspäte mit Ausnahme der Sanidine und Anorthoklase mit kleinem $2V$, Olivine, Pyroxene mit Ausnahme der Pigeonite, Hornblenden etc. Man hat somit, um die Achsenpositionen zu erhalten, nur die Gangunterschiede in zwei in der Achsenebene liegenden Richtungen zu messen. Diese sind durch ihre α_4 -Koordinaten definiert und müssen auf verschiedenen Seiten der optischen Achse liegen und mit dieser Winkel von 10° bis 15° einschliessen. Bezeichnet man die in Graden ausgedrückten α_4 -Koordinaten mit x_1 und x_2 und die beiden

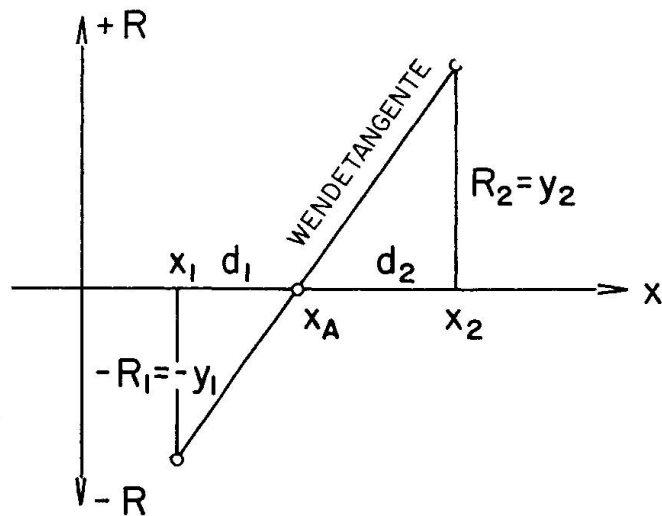


Fig. 5. Bestimmung der Position der optischen Achse aus zwei auf verschiedenen Seiten derselben gelegenen Gangunterschieden.

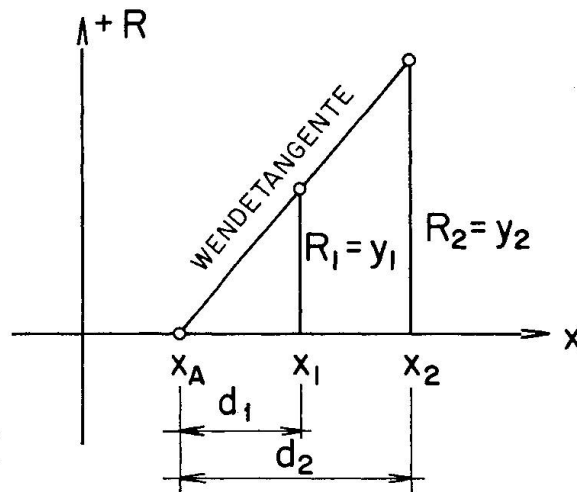


Fig. 6. Bestimmung der Position der optischen Achse aus zwei auf derselben Seite der Achse gelegenen Gangunterschieden.

Obwohl grundsätzlich zwei Gangunterschiede zur eindeutigen Bestimmung der Wendetangente ausreichen, empfiehlt es sich in der Praxis zur Kontrolle mindestens einen dritten zu berücksichtigen. Die gegenüber den entsprechenden α_4 -Koordinaten als Ordinate aufgetragenen Gangunterschiede müssen auf einer Geraden liegen, wie z. B. in Fig. 9. Man kann als dritten Gangunterschied denjenigen in der dem Wendepunkt der Gangunterschiedskurve entsprechende Richtung verwenden. Diese ist leicht auffindbar, da sie den Winkel $[n_\alpha, n_\gamma]$ halbiert.

Die Kontrolle, ob die drei Messpunkte kollinear sind, erfolgt am einfachsten und mit genügender Genauigkeit graphisch, kann aber auch rechnerisch durchgeführt werden. Sind die Koordinaten des dritten Punktes $P_3(x_3, y_3)$, so müssen sie die oben gegebene Gleichung der Geraden durch die Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_1(x_2, y_2)$ erfüllen, d. h. es muss

$$(y_3 - y_1)(x_1 - x_2) - (x_3 - x_1)(y_1 - y_2) = 0$$

sein bzw. in zweckmässiger Umformung:

$$x_3(y_2 - y_1) - y_3(x_2 - x_1) + x_2y_1 - y_2x_1 = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (27)$$

In besonders delikatzen Fällen, wenn die Messung der Gangunterschiede z. B. infolge innerer Reflexe oder einer Trübung mit Schwierigkeiten verbunden ist und die Messwerte streuen, kann ein Ausgleich nach der Methode der kleinsten Quadrate vorgenommen werden um den wahrscheinlichsten Verlauf der Wendetangente zu erhalten. Es handelt sich um das gleiche Verfahren, wie es in der Statistik zur Bestimmung der Regressionsgeraden angewandt wird, so dass für Einzelheiten auf die Darstellung in den Lehrbüchern der Statistik bzw. Korrelationsrechnung verwiesen werden kann, wie z. B. EZEKIEL (1950), LINDER (1960), YULE und KENDALL (1950), WEBER (1956) etc.

Beispiel: Optisch-positive Hornblende aus Amphibolit, Val d'Arbedo, Tessin. $(+)2V = 86^\circ \pm 1^\circ$ (direkte Messung). Obwohl für die hier angewandte Methode zur Bestimmung der Position der optischen Achse prinzipiell zwei Gangunterschiedsmessungen genügen und sich die Zeichnung der Gangunterschiedskurve erübrigt, soll diese hier, zum besseren Verständnis der Methode berücksichtigt werden. Zu diesem Zwecke wurden für eine Reihe von Wellennormalenrichtungen innerhalb der um 20° gegen die Schlifffnormale geneigten Achsenebene vermitteltst eines MgF_2 -Kompensators der Firma Leitz-Wetzlar die Gangunterschiede für die D-Linie gemessen und auf die Schlifffdicke reduziert. Für die graphische Darstellung wurden die α_4 -Koordinaten derart auf neue Abszissenwerte transformiert, dass $[n_\gamma]$ mit $\alpha_4 = -31^\circ$ in den Ursprung ($x=0$) zu liegen kommt. Die reduzierten Gangunterschiede mit ihren Koordinaten sind die folgenden, wobei die Transformation lautet: $x = \alpha_4 + 31^\circ$:

α_4	-40°	-31°	-20°	-10°	0°	$+5^\circ$	$+20^\circ$	$+30^\circ$	$+40^\circ$
x	-9°	0°	$+11^\circ$	$+21^\circ$	$+31^\circ$	$+36^\circ$	$+51^\circ$	$+61^\circ$	$+71^\circ$
R_{nm}	$-458,5$	$-476,3$	$-436,5$	$-349,1$	$-202,4$	$-116,1$	$+130,6$	$+309,1$	$+427,4$

Dabei wurden willkürlich das Extremum $[n_\gamma]$ als negativ, das (ausserhalb des Messbereiches liegende) $[n_\alpha]$ jedoch als positiv angenommen, in Übereinstimmung mit den bisher gemachten Ausführungen. Auf Grund dieser Messwerte erhält man das Kurvenbild Fig. 7. Da $[n_\gamma]$ bei $x=0$ liegt und die Kurve die X-Achse bei ca. $x=43^\circ$ schneidet, ergibt sich $V_\gamma = 43^\circ$ und entsprechend $(+)2V = 86^\circ$. Der Wendepunkt der Kurve liegt nach den gemachten Ausführungen bei $x=45^\circ$ und es ist deutlich ersichtlich, wie die Wendetangente in dessen Nachbarschaft von ca. $x=30^\circ$ bis ca. $x=60^\circ$ innerhalb der Messgenauigkeit mit der Kurve zusammenfällt. Es genügt daher, innerhalb dieses Intervalles die Tangente durch zwei Gangunterschiedsmessungen festzulegen

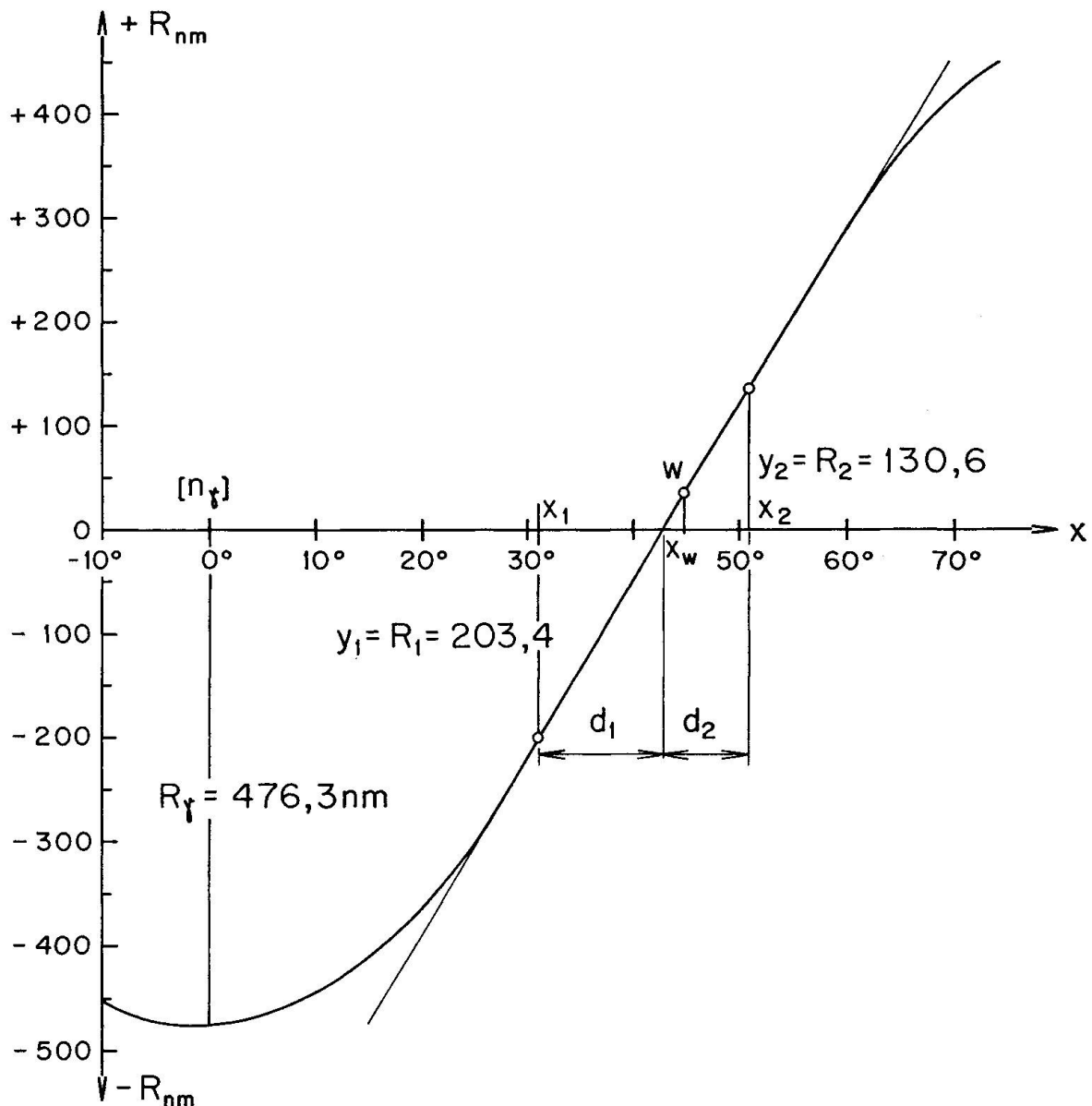


Fig. 7. Bestimmung der Position der optischen Achse und des Achsenwinkels für eine optisch-positive Hornblende mit $V_\gamma = 43,1^\circ$ aus Amphibolit (Val Arbedo, Tessin).

und ihren Schnitt mit der Abszisse festzulegen um die optische Achse zu lokalisieren.

Geht man von den beiden Gangunterschieden $R_1(x_1 = 31^\circ, y_1 = -202,4 \text{ nm})$ und $R_2(x_2 = 51^\circ, y_2 = 130,6 \text{ nm})$ aus, erhält man als Gleichung der Wendetangente $y = 16,65x - 717,35$. Für $y = 0$ folgt daraus $x = 43,08^\circ = V_\gamma$ und $(+) 2V = 86,2^\circ$.

Nach der Methode der ähnlichen Dreiecke erhält man auf Grund von (26) $d_1 = 12,16^\circ$ und $V_\gamma = 31^\circ + 12,16^\circ = 43,16^\circ$, somit $(+) 2V = 86,3^\circ$.

Benützt man die Gangunterschiede $R_2(x_2 = 51^\circ, y_2 = +130,6 \text{ nm})$ und

$R_3(x_3 = 36^\circ, y_3 = -116,1 \text{ nm})$, so resultiert auf gleiche Weise $d_1 = 7,06$ und $V_\gamma = 36^\circ + 7,06^\circ = 43,06^\circ$, woraus $(+) 2V = 86,1^\circ$.

Zur Kontrolle wurde eine Bestimmung des Achsenwinkels mit Hilfe der charakteristischen Funktion der Doppelbrechung nach BEREK vorgenommen. Sie ergab unter Verwendung des Gangunterschiedes $R_\gamma = 476,3 \text{ nm}$ und desjenigen einer Hilfsrichtung ($x = 61^\circ, y = 427,4 \text{ nm}$) $(+) 2V = 86,0^\circ$, in befriedigender Übereinstimmung mit den eben erhaltenen Werten.

b) Verfahren bei $2V < 62^\circ$

Für kleine $2V$ fällt der Schnittpunkt der Gangunterschiedskurve mit der Abszissenachse wegen der Krümmung der Kurve nicht mehr mit demjenigen der Wendetangente zusammen, wie aus Fig. 3 anschaulich hervorgeht. Trotzdem lässt sich die Position der optischen Achse festlegen und der Achsenwinkel bestimmen, denn nach Tabelle 6 und 7 sind die Differenzen der Schnittpunkte x_0 und x_t in Funktion des Achsenwinkels, wie sie sich aus (24) und (25) ergeben, bekannt. Es kann somit die Korrektur angebracht werden, welche notwendig ist, damit von x_t auf x_0 geschlossen werden darf. Zur Bestimmung der Wendetangente benötigt man wiederum zwei Punkte derselben, welche man durch die Messung von zwei Gangunterschieden in dem, dem Wendepunkt unmittelbar benachbarten Kurvenabschnitt erhält, für welchen sich die Kurve praktisch als Gerade verhält. Die Lage des Wendepunktes ist bekannt, da dessen Abszisse nach (16), unabhängig von $2V$, bei $x = \pi/4$ liegt. Man bestimmt daher

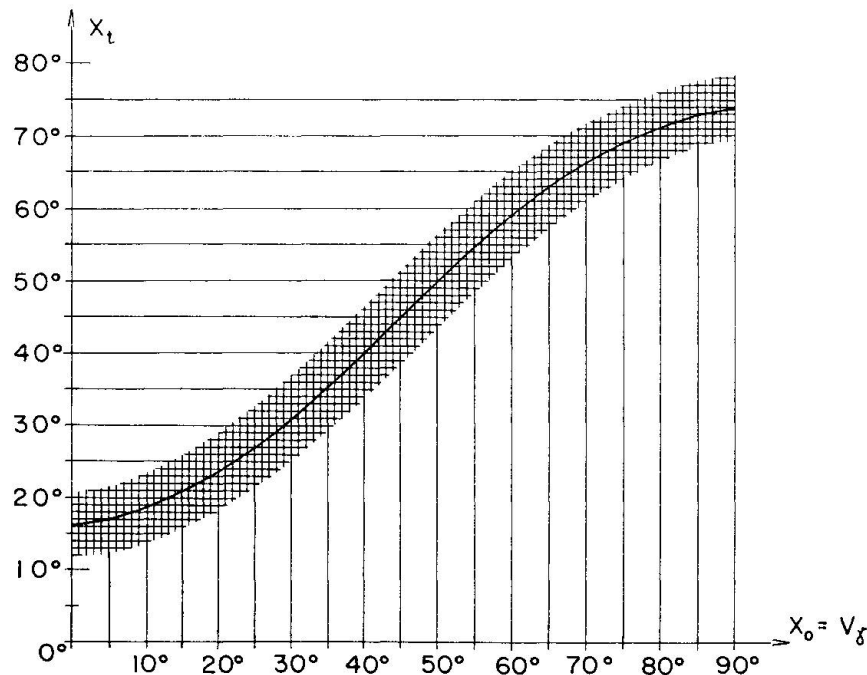


Fig. 8. Korrekturdiagramm zur Ermittlung von V_γ aus dem Abszissenschnitt der Wendetangente x_t bei kleinem $2V$.

in der stereographischen Projektion die Winkelhalbierende von $[n_\alpha, n_\gamma]$ und liest deren α_4 -Koordinate ab. Ist diese α_{4w} , so misst man die Gangunterschiede für die beiden Richtungen $\alpha_{4w} \pm 15^\circ$ und reduziert sie durch Multiplikation mit $\cos \alpha_2 \cos \alpha_4$ auf die Schliffdicke. Bei sehr kleinem $2V$ muss vermieden werden, dass die gewählten Richtungen in unmittelbarer Nachbarschaft einer optischen Achse zu liegen kommen. Auf Grund der beiden Gangunterschiede kann die Wendetangente konstruiert und ihr Schnittpunkt mit der Abszisse, x_t abgelesen werden. Um aus x_t den Schnittpunkt der Gangunterschiedskurve mit der Abszisse x_0 zu erhalten, kann man sich des Diagrammes Fig. 8 bedienen, welches auf Grund von Tabelle 6 und 7 gezeichnet wurde. Es ist so angelegt, dass mit x_t als Ordinate eingegangen wird und auf der Abszisse V_γ abgelesen werden kann.

Genauere Resultate erhält man auf rechnerischem Wege. Man bestimmt, wie für $2V > 62^\circ$ angegeben, die Gleichung der Wendetangente und erhält daraus x_t indem man $y = 0$ setzt und nach x auflöst. Den Achsenwinkel erhält man durch Auflösen von (24) bzw. (25) zu

$$\cos V_\gamma = \sqrt{1,2854 - x_t} \quad \text{bzw.} \quad \cos V_\alpha = \sqrt{x_t - 0,2854}. \quad (28)$$

x_t ist hierbei im Bogenmass auszudrücken.

Da es wichtig ist, die Bestimmung der Wendetangente möglichst genau vorzunehmen, empfiehlt es sich auch hier, wie für den Fall $2V > 62^\circ$ erwähnt, mindestens einen weiteren Punkt der Kurve zu bestimmen, wofür sich in erster Linie der Wendepunkt eignet. Des weiteren gilt auch, was über das Kriterium für die Kollinearität der drei Punkte, sowie über einen eventuellen Ausgleich gesagt wurde.

Beispiel: Wollastonit aus Wollastonit-führendem Granat-Diopsid-Vesuvianfels von Claro, Tessin⁴).

An einem Kristall, dessen Achsenebene 18° gegen die Schliffnormale geneigt war, konnte $2V$ durch direkte Einmessung beider Achsen zu $(-) 2V = 40^\circ \pm 2^\circ$ bestimmt werden, wobei die Einstellung auf maximale Dunkelheit für beide Achsen relativ unsicher war. Zur Festlegung der Wendetangente wurden die Gangunterschiede für die beiden Richtungen gemessen, welche je 15° mit der Winkelhalbierenden $[n_\alpha, n_\gamma]$ bilden und auf die Schliffdicke reduziert:

$$R_1 (x_1 = 30^\circ, y_1 = 338,9 \text{ nm}), R_2 (x_2 = 60^\circ, y_2 = 65,5 \text{ nm}).$$

Zur Kontrolle wurde auch der Gangunterschied für den Wendepunkt der Kurve gemessen: $R_w (x_w = 45^\circ, y_w = 202,5 \text{ nm})$. Zur Prüfung, ob die drei eingemessenen Punkte der Tangente kollinear sind, wurde das Kriterium (27)

⁴) Der Autor dankt auch an dieser Stelle Herrn Kollegen V. Trommsdorff, Zürich, bestens für die freundliche Überlassung von Schliffen dieses Gesteins.

angewandt. Es ist:

$$D = \begin{vmatrix} x_w & y_w & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 45 & 202,5 & 1 \\ 60 & 65,5 & 1 \\ 30 & 338,9 & 1 \end{vmatrix} = 9,0.$$

$D=0$ würde sich ergeben für $y_w = 201,1$. Die Abweichung liegt innerhalb der Messgenauigkeit und es darf angenommen werden, dass die Wendetangente durch die beiden Gangunterschiede R_1 und R_2 mit genügender Genauigkeit festgelegt ist. Für die graphische Darstellung ist zu beachten, dass, im Gegensatz zum vorhergehenden Beispiel, R_1 und R_2 gleiches Vorzeichen haben, somit auf derselben Seite der X -Achse abzutragen sind. Ob sie beide positiv oder negativ gerechnet werden, ist an sich ohne Bedeutung und ohne Einfluss auf das Resultat. Wenn sie hier negativ genommen werden, so geschieht dies in Befolgung der hier bisher eingehaltenen Konvention (Fig. 3). Aus Fig. 9 lässt sich für den Schnittpunkt der Wendetangente mit der Abszisse ablesen $x_t = 67^\circ$, woraus mit Hilfe des Korrekturdiagramms Fig. 8 folgt, dass $V_\gamma = 70,5$, entsprechend $V_\alpha = 19,5^\circ$ und $(-) 2V = 39^\circ$.

Zur rechnerischen Lösung bestimmt man die Gleichung der Wendetangente:

$$y = 273,4 x - 19369$$

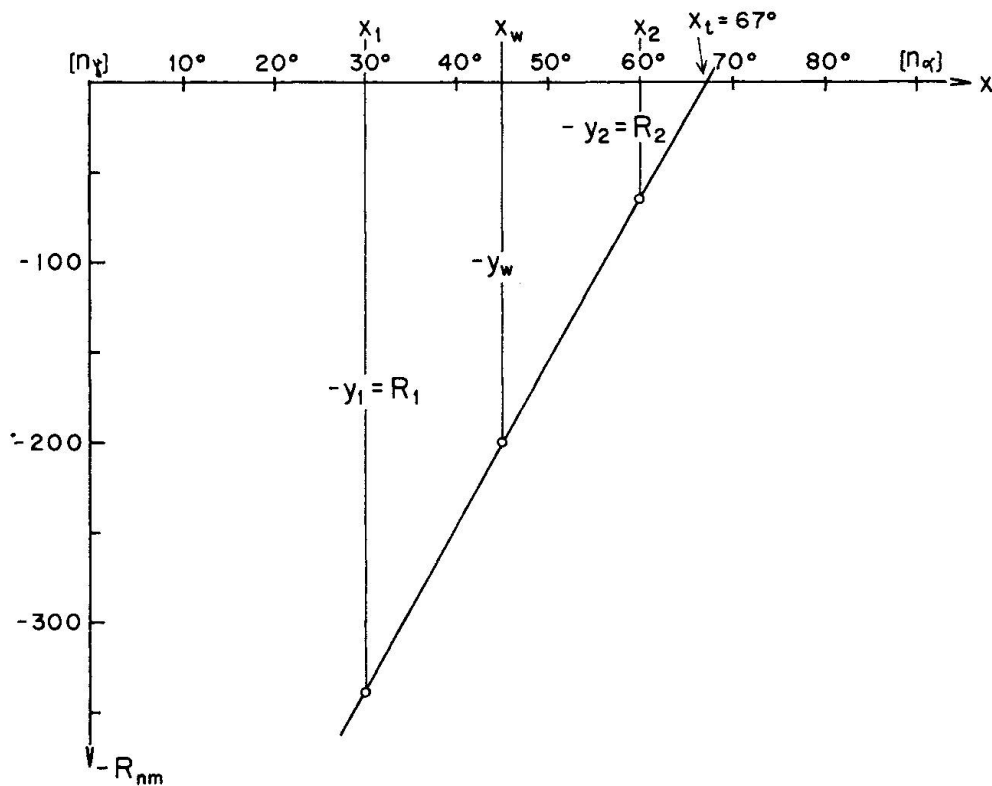


Fig. 9. Zur Bestimmung des Achsenwinkels $(-) 2V = 39,2^\circ$ von Wollastomit aus Kalksilikatfels (Claro, Tessin).

aus welcher man durch Nullsetzung erhält $x = x_t = 67,19^\circ$. Da diesem Winkel im Bogenmass 1,1726 rad entspricht, wird nach (25) $\cos V_\alpha = \sqrt{1,1726 - 0,2854} = 0,94192$, woraus $V_\alpha = 19,6^\circ$ und $(-)\ 2V = 39,2^\circ$.

3. ANHANG

a) Bemerkungen zur Messung der Gangunterschiede

Zur Messung von Gangunterschieden in Verbindung mit den U-Tischmethoden werden heute ausschliesslich Drehkompensatoren benutzt. An Stelle des bekannten und weitverbreiteten Kalkspathkompensators nach BEREK, der Firma Leitz-Wetzlar, dessen Fertigung kürzlich eingestellt wurde, ist der nach demselben Prinzip arbeitende MgF_2 -Kompensator der gleichen Herstellerfirma getreten. Im Gegensatz zum Calcit erlauben die schleiftechnischen Eigenschaften von MgF_2 die Herstellung von Kompensatorplättchen einheitlicher Dicke, so dass die Gangunterschiede in Funktion des Kippwinkels tabelliert werden können und sich die Einschaltung einer instrumentenabhängigen Kompensatorkonstante erübrigt. Ein weiterer Vorteil des MgF_2 gegenüber dem Calcit ist dessen normale Dispersion der Doppelbrechung. Tabellierung der Gangunterschiede und normale Dispersion der Doppelbrechung weist auch der Quarzplattenkompensator nach EHRINGHAUS der Firma Zeiss auf.

Alle Drehkompensatoren weisen einen gewissen Fertigungsfehler auf. Um ihre Genauigkeit voll auszunützen ist es daher unumgänglich, für jedes Instrument eine Fehlerkurve in Funktion des Gangunterschiedes aufzunehmen, wie dies zuerst von MOSEBACH (1948) vorgeschlagen wurde, und aus welcher für jeden gemessenen Gangunterschied die entsprechende Korrektur, welche positiv oder negativ sein kann, zu entnehmen ist. Für weitere diesbezügliche Untersuchungen und Ausführungen sei auf RATH (1958, 1958a) verwiesen.

Drehkompensatoren haben allgemein den Nachteil, dass Messungen von Gangunterschieden $< \lambda/2$ wenig zuverlässig sind, da die diesbezüglichen Kompensationsstreifen breit und verwaschen erscheinen. Durch diesen Umstand waren lange Zeit eine Reihe wichtiger und ergiebiger polarisationsmikroskopischer Methoden, welche auf der Messung von Gangunterschieden beruhen, auf niedrig doppelbrechende Kristallarten, wie z. B. Feldspäthe, nicht, oder nur beschränkt anwendbar, zum mindesten, wenn nicht besonders angefertigte, dickere Schiffe verwandt wurden. Erst die systematischen Untersuchungen und Vorschläge von MOSEBACH (1949, 1949a) haben diese Einschränkung behoben und es ermöglicht, auch kleine Gangunterschiede genau zu messen. Da solche bei der vorgeschlagenen Methode gelegentlich auftreten, sowie, weil die MOSEBACHSchen Methoden vielfach nicht die ihnen gebührende Beachtung gefunden haben, soll hier anhangsweise kurz auf sie aufmerksam gemacht werden.

Bezeichnet man den zu messenden Gangunterschied im Präparat mit R_x und den im Kompensator erzeugten, von bekanntem Betrag, mit R_k , so besteht das allgemein übliche Verfahren zur Messung von Gangunterschieden bekanntlich darin, dass man in Subtraktionsstellung «auf Null kompensiert», d. h. $R_k = R_x$ macht und aus dem bekannten R_k auf das unbekannte R_x schliesst. Nach MOSEBACH kompensiert man nun für kleine Gangunterschiede nicht auf R_x , sondern auf $R_x + k\lambda$, wodurch es möglich wird, die Kompensation in höhere Ordnungen mit grösserer Messgenauigkeit zu verschieben. Praktisch geht man dabei so vor, dass man zuerst im weissen Licht auf R_x kompensiert, was am Erscheinen des schwarzen Kompensationsstreifen erkannt wird. Man geht nun zu homogenem Licht von bekannter Wellenlänge über. Beim Weiterdrehen des Kompensators erscheinen dann weitere dunkle Streifen, welche den Gangunterschieden $R_x + 1\lambda, R_x + 2\lambda, \dots R_x + k\lambda$ entsprechen. Beim Erscheinen des k -ten Streifens ist somit $R_k = R_x + k\lambda$ und daher $R_x = R_k - k\lambda$. Man hat somit vom Messwert $k\lambda$ abzuziehen um das gesuchte R_x zu erhalten.

Weniger bekannt dürfte sein, dass die Kompensation für homogenes Licht auch in Additionsstellung vorgenommen werden kann. Beim Erscheinen des ersten dunkeln Streifens ist dann $R_x + R_k = 1\lambda$ und beim k -ten ist $R_x + R_k = k\lambda$, so dass $R_x = k\lambda - R_k$ ist. Dieses Verfahren kann unter Umständen von Vorteil sein, z. B. wenn bei kleinen Objekten Zentrierschwierigkeiten bestehen. Der Mikroskopist braucht nach dem Durchgang einer optischen Achse nicht um 45° gedreht zu werden.

Da bei diesen Methoden öfters vom weissen Licht zu homogenem von bekannter Wellenlänge gewechselt werden muss und umgekehrt, ist der Gebrauch eines geeigneten Lichtfilters⁵⁾ einer Spektrallampe oder einem Monochromator vorzuziehen.

b) Die Mallardschen Formeln

In den vorhergehenden Ausführungen wurde verschiedentlich von den Mallardschen Formeln Gebrauch gemacht. Es scheint daher vielleicht angebracht, diese hier anhangsweise in ihrer Gesamtheit aufzuführen, um so mehr, als sie in den einschlägigen Lehrbüchern kaum je vollständig behandelt werden. Es handelt sich bei Ihnen bekanntlich um vereinfachte Näherungsausdrücke

⁵⁾ Der Verfasser hat sehr gute Erfahrungen mit einem Interferenzfilter für die D-Linie vom Typ «Filtraflex» B-20 der Firma Balzers AG für Hochvakuumtechnik und dünne Schichten, in FL-9496 Balzers, Fürstentum Liechtenstein, gemacht. Als Beleuchtung eignet sich eine Halogenlampe, welche wegen ihrer hohen Intensität ohne weiteres die nötige Einschränkung der Apertur erlaubt. Breitbandfilter, wie sie für manche Zwecke genügen und eine grössere Durchlässigkeit aufweisen, so dass auf eine intensive Beleuchtung verzichtet werden könnte, sind für Gangunterschiedmessungen nicht geeignet, da bei ihrem Gebrauch an den Kompensationsstreifen farbige Säume auftreten.

für die exakten Formeln zur Berechnung von $2V$ aus den drei Hauptbrechungsindizes. Eine Ableitung der exakten Ausdrücke findet man verschiedentlich, u. a. bei BURRI (1950, p. 47), oder in den Lehrbüchern der analytischen Geometrie des Raumes, wo das entsprechende Problem der Berechnung des Winkels der Kreisschnittnormalen bzw. der Kreisschnittebenen eines dreiaxigen Ellipsoides aus dessen drei Halbachsen interessiert. Es gibt im ganzen 12 Möglichkeiten diesen Winkel auszudrücken, entsprechend der Tatsache, dass die Kreisschnittnormalen (optische Achsen) zwei Winkel miteinander bilden, welche durch die grösste bzw. kleinste Ellipsoidachse halbiert werden, sowie dass sechs trigonometrische Funktionen zur Verfügung stehen um diese Winkel auszudrücken.

Unter Benützung der cos-Funktion z. B. lautet die exakte Beziehung für den auf $[n_\gamma]$ bezogenen Achsenwinkel:

$$\cos V_\gamma = \frac{n_\alpha}{n_\beta} \sqrt{\frac{n_\gamma^2 - n_\beta^2}{n_\gamma^2 - n_\alpha^2}}.$$

Nach Mallard kann man nun für kleine Doppelbrechungen (und somit für den grössten Teil der wichtigen gesteinsbildenden Mineralien) einen Faktor F

$$F = \frac{n_\alpha}{n_\beta} \sqrt{\frac{n_\gamma + n_\beta}{n_\gamma + n_\alpha}}$$

absondern, da sein Wert in diesem Falle nur wenig von 1 abweicht. Das ist die sog. Mallardsche Näherung, welche auf die nach diesem Autor benannten Näherungsausdrücke führt. Entsprechende Möglichkeiten bestehen naturgemäss auch für die übrigen elf Formeln.

Setzt man gemäss (9) wiederum vereinfachend:

$$(n_\gamma - n_\beta) = \Delta_\alpha, \quad (n_\gamma - n_\alpha) = \Delta_\beta, \quad (n_\beta - n_\alpha) = \Delta_\gamma,$$

so lassen sich die 12 Mallardschen Formeln, da $V_\alpha + V_\gamma = \pi/2$ ist, wie folgt in 6 Gruppen zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \sin V_\gamma &= \sqrt{\frac{\Delta_\gamma}{\Delta_\beta}} = \cos V_\alpha, & \cos V_\gamma &= \sqrt{\frac{\Delta_\alpha}{\Delta_\beta}} = \sin V_\alpha, \\ \operatorname{tg} V_\gamma &= \sqrt{\frac{\Delta_\gamma}{\Delta_\alpha}} = \operatorname{cotg} V_\alpha, & \operatorname{cotg} V_\gamma &= \sqrt{\frac{\Delta_\alpha}{\Delta_\gamma}} = \operatorname{tg} V_\alpha, \\ \operatorname{sec} V_\gamma &= \sqrt{\frac{\Delta_\beta}{\Delta_\alpha}} = \operatorname{cosec} V_\alpha, & \operatorname{cosec} V_\gamma &= \sqrt{\frac{\Delta_\beta}{\Delta_\gamma}} = \operatorname{sec} V_\alpha. \end{aligned}$$

Die Mallardschen Formeln gestatten somit die angenäherte Berechnung des Achsenwinkels aus zwei Hauptdoppelbrechungen. Ihre Bedeutung beruht jedoch besonders auch darauf, dass an Stelle der nur selten genau bekannten Hauptdoppelbrechungen Δ_x , die mit dem Kompensator leicht zu bestimmenden

Hauptgangunterschiede $R_x = d\Delta_x$ verwendet werden können, da die unbekannte und nur angenähert zu bestimmende Schliffdicke zufolge der Verhältnissbildung herausfällt.

III. ZITIERTE LITERATUR

- BEREK, M. (1924): Mikroskopische Mineralbestimmung mit Hilfe des Universaldreh-tisches. Berlin, Bornträger.
- BURRI, C. (1950): Das Polarisationsmikroskop. Basel, Birkhäuser.
- DODGE, T. A. (1934): The Determination of Optic Axial Angle with the Universal Stage. Amer. Min. 19, 72–75.
- EZEKIEL, M. (1950): Methods of Correlation Analysis. 2nd ed. New York, Wiley.
- LINDER, A. (1960): Statistische Methoden. 3. Aufl. Basel, Birkhäuser.
- MOSEBACH, R. (1949): Das Messen optischer Gangunterschiede mit Drehkompensatoren. Heidelberger Beitr. Min. Petr. 1, 515–528.
- (1949a): Eine Differenzmethode zur Erhöhung der Messgenauigkeit und Erweiterung des Messbereichs normaler Drehkompensatoren. Ibid. 2, 167–171.
- (1949b): Ein einfaches Verfahren zur Erhöhung der Messgenauigkeit kleiner optischer Gangunterschiede. Ibid. 2, 172–175.
- RATH, R. (1958): Fehler bei Gangunterschiedsmessungen mit Berek-Kompensatoren. Mikroskopie (Wien) 12, 327–345.
- (1958a): Deutung des Verlaufes der Eichkurven von Ehringhaus-(Quarz-)Kompensatoren. Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 10, 9–24.
- RINNE, F. und M. BEREC (1953): Anleitung zu optischen Untersuchungen mit dem Polarisations-Mikroskop. 2. Aufl. von M. BEREC †. Herausgeg. v. C. H. Claussen, A. Driessen und S. Rösch. Stuttgart, Schweizerbart.
- WEBER, E. (1956): Grundriss der biologischen Statistik. 2. Aufl. Jena, Fischer.
- YULE, G. U. und M. G. KENDALL (1950): An Introduction to the Theory of Statistics. 14th ed. London, Griffin.

Manuskript eingegangen am 14. Dezember 1972.