

Zeitschrift:	Schweizerische mineralogische und petrographische Mitteilungen = Bulletin suisse de minéralogie et pétrographie
Band:	49 (1969)
Heft:	2
Artikel:	Einfache Kriterien für einen vorhandenen Zonenverband nichtindizierter Flächen
Autor:	Burri, Conrad
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-38603

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Einfache Kriterien für einen vorhandenen Zonenverband nichtindizierter Flächen

Von *Conrad Burri* (Zürich) *)

Mit 4 Textfiguren

Zusammenfassung. Es werden zwei einfache Vektormethoden gegeben, welche gestatten, einen vorhandenen Zonenverband von Kristallflächen auf Grund ihrer (φ, ρ) -Werte oder der Richtungscosinus ihrer Normalen, vorgängig der Indizierung, zu konstatieren. Das Achsenverhältnis wird nicht benötigt.

Summary. Simple vector methods are proposed to find out whether there exists a zonal relationship between given crystal faces as defined in their position by Goldschmidt (φ, ρ) -angles or the direction cosines of their normals. Neither the indices of the faces nor the axial ratio need be known.

Bei kristallographischen Untersuchungen sind neben den Flächenlagen besonders die Zonenverbände und die Richtungen der Zonenachsen von grosser Bedeutung. Sie ergeben sich im allgemeinen nach erfolgter Indizierung der Flächen durch Berechnung in bekannter Weise. In gewissen Fällen mag es jedoch erwünscht sein, das Bestehen eines Zonenverbandes direkt aus den Winkelwerten, vorgängig der Bestimmung des Achsenverhältnisses und vorgängig einer Indizierung zu konstatieren und die Lage der Zonenachsen durch Winkelkoordinaten anzugeben. Im folgenden soll daher gezeigt werden, wie einfache Kriterien für das Bestehen eines Zonenverbandes, ohne Kenntnis des Achsenverhältnisses und vorgängig der Indizierung der Flächen, auf Grund elementarer Vektormethoden gewonnen werden können.

Die Lage einer Ebene E kann in bezug auf ein rechtwinkliges System XYZ durch Vektormethoden in verschiedener Weise definiert werden. Für die hier verfolgten Ziele eignet sich in erster Linie die sog. Normalform der Ebenengleichung.

Ist (Fig. 1) $\overrightarrow{OD} = e$ ein Vector normal zur betrachteten Ebene E, der sog. Stellungsvektor, und r der Ortsvektor eines beliebigen Punktes P in E, so ist

*) Institut für Kristallographie und Petrographie der Eidgenössischen Technischen Hochschule, Sonneggstrasse 5, 8006 Zürich

$\vec{DP} = \vec{r} - \vec{e}$. Da \vec{DP} auf \vec{OD} normal steht, so erhält man durch skalare Multiplikation als vektorielle Ebenengleichung $(\vec{r} - \vec{e}) \cdot \vec{e} = 0$, oder $\vec{r} \cdot \vec{e} - \vec{e} \cdot \vec{e} = 0$. Verschiebt man die Ebene parallel zu sich selbst, bis sie durch 0 verläuft, so resultiert

$$(\vec{r} \cdot \vec{e}) = 0. \quad (1)$$

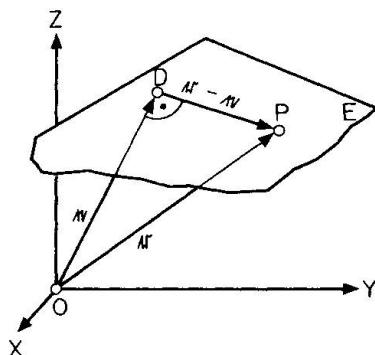


Fig. 1.

Es werde nun angenommen, dass die Kristallmessung für drei Flächen A, B, C drei Pole auf der Einheitskugel geliefert habe, und es wird danach gefragt, ob A, B, C in einer Zone liegen bzw. welches die Bedingung hierfür sei.

Nimmt man die drei Flächen als durch den Ursprung 0 verlaufend an, so lauten ihre Vektorgleichungen in Normalform gemäss (1):

$$A: (\vec{r} \cdot \vec{a}) = 0$$

$$B: (\vec{r} \cdot \vec{b}) = 0$$

$$C: (\vec{r} \cdot \vec{c}) = 0$$

wobei \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} die Stellungsvektoren (Flächenormalen) sind.

In Koordinatenform lauten die Gleichungen:

$$A: a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0$$

$$B: b_1 x + b_2 y + b_3 z = 0$$

$$C: c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0$$

Da alle drei Ebenen durch 0 verlaufen, weisen die drei Gleichungen kein Absolutglied auf, d. h. sie sind homogen in x, y, z. Sie besitzen sicher ein Lösungstripel $x=y=z=0$, was Ausdruck dafür ist, dass die Ebenen sämtlich durch 0 verlaufen. Es erhebt sich nun die Frage, ob die Gleichungen ausserdem noch andere Lösungen haben können. Bedingung hierfür ist, dass die Determinante der Koeffizienten verschwindet:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Da D zugleich Ausdruck für das Volumen V des von den drei Stellungsvektoren a, b, c aufgespannten Spates ist, so bedeutet dies, dass V ebenfalls gleich Null sein muss, falls ausser der Triviallösung $x=y=z=0$ noch weitere Lösungen vorhanden sein sollen. Es ist jedoch nur dann $V=0$ wenn die drei Vektoren entweder komplanar oder kollinear bzw. identisch sind. Der erste Fall bedeutet, dass die drei Vektoren normal zu einer den drei Ebenen gemeinsamen Geraden Z stehen, welche für sie Schnittgerade bzw. Zonenachse ist, womit sie jedoch tautozonal sind. Jeder Punkt (x, y, z) dieser Geraden, z. B. P in Fig. 2, ist den drei Ebenen gemeinsam und seine Koordinaten müssen daher die drei Gleichungen erfüllen.

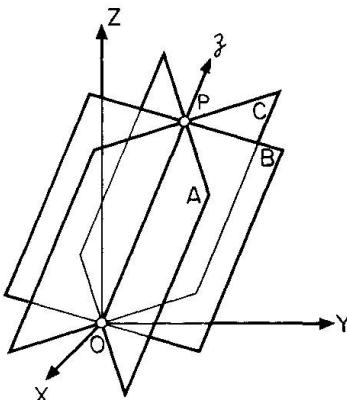


Fig. 2.

Der zweite Fall, für welchen die drei Stellungsfaktoren identisch sind und die drei Ebenen zusammenfallen und daher ebenfalls unendlich viele Punkte gemeinsam haben, fällt für das hier betrachtete Problem ausser Betracht. Notwendige und hinreichende Bedingung für einen Zonenverband der drei Flächen A, B, C ist somit, dass die Determinante D verschwindet:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = V_{a,b,c} = [a, b, c] = 0$$

Da die Lagenkugel als Einheitskugel vorausgesetzt wird, sind die betrachteten Stellungsvektoren der Flächen A, B, C zugleich die Einheitsvektoren der Flächennormalen und ihre Komponenten entsprechen deren Richtungscosinus λ, μ, ν , bezogen auf XYZ.

Messungen am zweikreisigen Goniometer liefern jedoch nicht direkt diese Richtungscosinus, sondern sphärische Lagekoordinaten auf der Einheitskugel in Form der (φ, ρ) -Werte. Diese lassen sich jedoch leicht in die Richtungscosinus bzw. Komponenten der Einheitsvektoren der Flächennormalen umrechnen. Führt man an Stelle des im positiven bzw. negativen Sinne von 0° – 180° , oder auch positiv von 0° – 360° gezählten Azimuts φ einen, immer spitzen, Hilfswinkel Δ ein, wobei die Beziehung zwischen φ und Δ aus Fig. 3

ersichtlich ist, erhält man gemäss Fig. 4 die Beziehungen zwischen φ und ρ einerseits und den drei Richtungscosinus anderseits:

$$\begin{aligned}\lambda &= \cos \Delta \sin \rho & \cotg \Delta &= \frac{\lambda}{\mu} \\ \mu &= \sin \Delta \sin \rho & \cos \rho &= \nu \\ \nu &= \cos \rho\end{aligned}\quad (2)$$

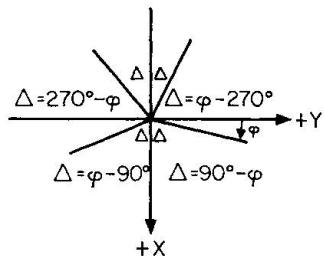


Fig. 3.

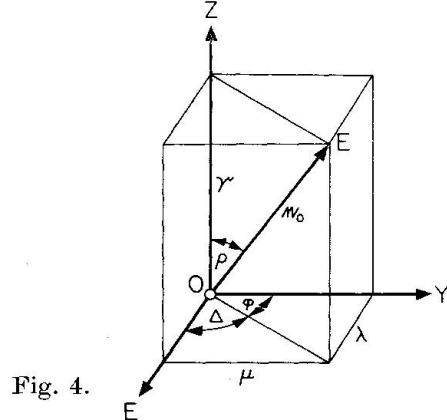


Fig. 4.

Für die Determinante D folgt somit, wenn Richtungscosinus und Polarkoordinaten der Flächennormalen zu A, B, C durch die Indizes a, b, c unterschieden werden:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_a & \mu_a & \nu_a \\ \lambda_b & \mu_b & \nu_b \\ \lambda_c & \mu_c & \nu_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \Delta_a \sin \rho_a & \sin \Delta_a \sin \rho_a & \cos \rho_a \\ \cos \Delta_b \sin \rho_b & \sin \Delta_b \sin \rho_b & \cos \rho_b \\ \cos \Delta_c \sin \rho_c & \sin \Delta_c \sin \rho_c & \cos \rho_c \end{vmatrix} = 0$$

Zur numerischen Auswertung entwickelt man diese Determinante dritten Grades nach Unterdeterminanten zweiten Grades, z. B. wie folgt:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_a & \mu_a & \nu_a \\ \lambda_b & \mu_b & \nu_b \\ \lambda_c & \mu_c & \nu_c \end{vmatrix} = \lambda_a \begin{vmatrix} \mu_b & \nu_b \\ \mu_c & \nu_c \end{vmatrix} - \mu_a \begin{vmatrix} \lambda_b & \nu_b \\ \lambda_c & \nu_c \end{vmatrix} + \nu_a \begin{vmatrix} \lambda_b & \mu_b \\ \lambda_c & \mu_c \end{vmatrix} = 0$$

Da die Zonenachse Z normal zu den drei Stellungsvektoren (Flächennormalen) a, b, c steht, erhält man ihren Richtungsvektor \mathfrak{z} als Vektorprodukt von zweien derselben (Reihenfolge der Vektoren und Vorzeichen unberücksichtigt):

$$\mathfrak{z} = [a \ b] = [b \ c] = [c \ a].$$

Beispiel: Für drei Flächen eines Kristalls von Anorthit wurde gemessen:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 58^\circ 04' & \Delta_1 &= 31^\circ 56' & \rho_1 &= 90^\circ 00' \\ \varphi_2 &= 22^\circ 19' & \Delta_2 &= 67^\circ 41' & \rho_2 &= 52^\circ 00' \\ \varphi_3 &= 320^\circ 44' & \Delta_3 &= 50^\circ 44' & \rho_3 &= 37^\circ 01'\end{aligned}$$

Gehören die drei Flächen einer Zone an, und, wenn ja, welches ist die Lage der Zonenachse? Durch Anwendung der Ausdrücke (2) erhält man:

$$\begin{array}{lll}
 \lambda_1 = 0,84868 & \mu_1 = 0,52893 & \nu_1 = 0 \\
 \lambda_2 = 0,29923 & \mu_2 = 0,72898 & \nu_2 = 0,61566 \\
 \lambda_3 = -0,38106 & \mu_3 = 0,46611 & \nu_3 = 0,79846
 \end{array}$$

und für die Determinante $D = +0,25043 - 0,25046 + 0 = -0,00003$ (Berechnung mit 5 stelligen Logarithmen). Die drei Flächen gehören somit einer Zone an. Es handelt sich bei ihnen um (110), (021) und (111). Die benützten (φ, ρ) -Werte wurden den Goldschmidtschen Winkeltabellen entnommen.

Der Richtungsvektor der Zonenachse berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{z} = [\mathfrak{a} \mathfrak{b}] &= \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} = 0,32565 \mathfrak{i} - 0,52249 \mathfrak{j} + 0,46040 \mathfrak{k} \quad |\mathfrak{z}| = 0,76878 \\
 \mathfrak{z} &= 0,42358 \mathfrak{i} - 0,67964 \mathfrak{j} + 0,59889 \mathfrak{k}.
 \end{aligned}$$

Aus (2) folgt $\Delta = 58^\circ 04'$, woraus $\varphi = 90^\circ - \Delta = 31^\circ 56'$ und $\rho = 53^\circ 13'$.

Eine weitere Möglichkeit zur Prüfung eines vermuteten Zonenverbandes für nicht indizierte Flächen ergibt sich auf Grund der Bestimmung der Zonenachse für je zwei Flächen und Prüfung ob die so ermittelten Zonenachsen identisch sind. Dieses Verfahren ist zwar weniger elegant als das eben beschriebene, hat jedoch den Vorteil, dass es sich sukzessive auf eine beliebige Flächenzahl anwenden lässt.

Es seien wiederum die Positionen von drei Flächen A, B, C durch ihre (φ, ρ) -Werte gegeben, aus welchen sich die Richtungscosinus der Flächennormalen bzw. deren Einheitsvektoren berechnen lassen. Durch vektorielle Multiplikation erhält man die Zonenachsen für je zwei Flächen:

$$\mathfrak{z}_1 = [\mathfrak{a} \mathfrak{b}] \quad \mathfrak{z}_2 = [\mathfrak{b} \mathfrak{c}].$$

Die Bedingung für das Bestehen eines Zonenverbandes für die drei Flächen A, B, C lautet, dass \mathfrak{z}_1 und \mathfrak{z}_2 den Winkel 0 einschliessen, oder dass $[\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2] = 0$ wird. Für die drei bereits benutzten Flächen von Anorthit (110), (021) und (111) erhält man

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{z}_1 &= [\mathfrak{a} \mathfrak{b}] = 0,32565 \mathfrak{i} - 0,52249 \mathfrak{j} + 0,46040 \mathfrak{k} \\
 \mathfrak{z}_2 &= [\mathfrak{b} \mathfrak{c}] = 0,29509 \mathfrak{i} - 0,47351 \mathfrak{j} + 0,41726 \mathfrak{k}
 \end{aligned}$$

woraus folgt: $[\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2] = 0$.

Die Lage der Zonenachse erhält man durch Berechnung des Einheitsvektors \mathfrak{z}_{10} bzw. \mathfrak{z}_{20} wie bereits w. o. angegeben zu $\varphi = 31^\circ 56'$ $\rho = 53^\circ 13'$. Beim Vorliegen von 4 Flächen wird mit Vorteil das vektorielle Viervektorprodukt angewandt, welches bei Vorhandensein eines Zonenverbandes ebenfalls verschwindet.