Zeitschrift: Schweizerische mineralogische und petrographische Mitteilungen = Bulletin suisse de minéralogie et pétrographie

Band: 28 (1948)

Heft: 1: Festschrift P. Niggli zu seinem 60. Geburtstag den 26. Juni 1948

Artikel: Auswertung geophysikalischer Sondierungen mit Hilfe von Potentialfeldern

Autor: Gassmann, Fritz

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23044

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Auswertung geophysikalischer Sondierungen mit Hilfe von Potentialfeldern

Von *Fritz Gassmann*, Zürich

Mitteilung Nr. 9
aus dem Institut für Geophysik der Eidg. Technischen Hochschule

Summary

The present paper deals with those methods of geophysical prospecting which consist in the measurement and interpretation of potential fields. Its aim is to set out briefly and coherently the fundamental principles governing these methods.

In § 1 the methods of geophysical prospecting are divided, according to the mathematical instruments involved, into two main groups, viz., the potential field methods and the dynamic methods. In §§ 2 to 4 some basic facts relating to potential fields are assembled. § 5 contains the keys and examples relating to the most important spheres of application of the potential theory in geophysics. § 6 gives a survey of the methods used to determine the fields of disturbing bodies located underground. In § 7 the principles are discussed by which measurements of potential fields are to be interpreted, i. e., by which the disturbing underground bodies can be determined, with all the accuracy called for by the problem, by measurements taken at the surface of the earth.

§ 1. Geophysikalische Sondiermethoden

Ungleichmässigkeiten im geologischen Aufbau des Untergrundes können sich physikalisch bis an die Erdoberfläche bemerkbar machen. Z. B. äussert sich ein Salzstock, der weniger dicht ist als die umgebenden Gesteine, in Störungen der Schwerkraft, ein Eisenerzkörper in Störungen des Erdmagnetismus, eine Verwerfung lenkt Erdbebenwellen ab usw. Es ist deshalb möglich, durch physikalische Messungen an der Erdoberfläche auf den geologischen Aufbau im Untergrund und insbesondere auf Lage, Grösse und Beschaffenheit von nutzbaren mineralischen Lagerstätten zu schliessen. Hinsichtlich des erforderlichen mathematischen Apparates lassen sich dabei

die Sondiermethoden, von unbedeutenden Ausnahmen abgesehen, in zwei Gruppen einteilen, die man summarisch als statische und dynamische bezeichnen kann. Die dynamischen Methoden handeln von Schwingungen und Wellenausbreitung vornehmlich elastischer und elektromagnetischer Natur und führen auf partielle Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus. Die statischen Methoden handeln von zeitlich konstanten oder langsam veränderlichen physikalischen Zuständen, die sich mit Hilfe des Potentialbegriffs beschreiben lassen. Diese statischen Methoden bilden eine Vielfalt von Theorien und Verfahren, in denen die leitenden und verbindenden Gedanken oft nicht leicht zu erkennen sind. In der vorliegenden Arbeit sollen daher die hauptsächlichsten Gesichtspunkte der statischen Methoden im Zusammenhang kurz dargestellt werden. Insbesondere soll gezeigt werden, wie die geophysikalischen Messungen, die sich auf den Potentialbegriff stützen, systematisch mit jeder Genauigkeit, die das Material überhaupt zulässt, ausgewertet werden können. (Lit. 2 und 3 sind vorläufige Mitteilungen zur vorliegenden Arbeit.)

§ 2. Potentialfelder

Zur nähern Orientierung über Potentialfelder und ihre physikalischen Anwendungsgebiete mögen einschlägige Lehrbücher zu Rate gezogen werden, wie etwa Lit. 8 und 1. Denkt man sich den Raum oder einen Teil davon als Träger eines physikalischen Zustandes, so nennt man ihn ein F e l d. Ist in jedem Punkte des Feldes der Zustand durch eine einzige Zahl H charakterisiert, wie z. B. die Temperatur in der Atmosphäre, so ist das Feld skalar. Ist hingegen zur Charakterisierung neben einer Zahl noch eine Richtungsangabe nötig, so ist das Feld vektoriell. Das Geschwindigkeitsfeld der Atmosphäre ist z. B. ein Vektorfeld, weil zu seiner Beschreibung neben der Windstärke auch die Windrichtung gehört.

Werden die Punkte des Raumes durch rechtwinklige Koordinaten x, y, z festgelegt, so ist das skalare Feld durch eine skalare Ortsfunktion $H(x, y, z)$ gegeben. Sind e_x, e_y und e_z die Einheitsvektoren parallel zu den Koordinatenachsen, so ist das Vektorfeld gegeben durch

$$\mathfrak{K} = K_x e_x + K_y e_y + K_z e_z , \tag{1}$$

wobei K_x, K_y und K_z, die rechtwinkligen Komponenten von $\mathfrak{K}$, drei skalare Ortsfunktionen sind.

Es gibt eine spezielle Klasse von Vektorfeldern $\mathfrak{K}$, für deren Beschreibung ebenfalls nur e i n e skalare Ortsfunktion $U(x, y, z)$ notwendig ist, aus der sich $\mathfrak{K}$ durch Gradientbildung herleiten lässt, also

$$K_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, K_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, K_z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \tag{2}$$

oder zusammengefasst $\mathfrak{K} = -\operatorname{grad} U$.

U heisst das Potential von $\mathfrak{K}$, und $\mathfrak{K}$ ist ein Potentialfeld. Ist z. B. U wiederum die Temperatur, so gibt $\mathfrak{K}$ Richtung und Grösse des Temperaturgefälles an.

§ 3. Quellen von Potentialfeldern

Für irgendein Vektorfeld erhält man ein anschauliches Modell, wenn man sich $\mathfrak{K}$ als Strömungsgeschwindigkeit einer inkompressibeln Flüssigkeit vorstellt. Es ist dabei allerdings unter Umständen nötig, an gewissen Stellen Flüssigkeit ständig entstehen, an andern solche verschwinden zu lassen, d. h. Quellen positiver und negativer Ergiebigkeit anzunehmen. Ist z. B. S eine punktförmige Quelle, die gleichmässig pro Sekunde Q m^3 Flüssigkeit produziert, und enthält der Raum keine andern Quellen, so strömt die Flüssigkeit radial nach aussen ab. Die Geschwindigkeit in einem Punkte T im Abstande r von S beträgt

$$\mathfrak{K} = \frac{Q}{4\pi r^3}\, \mathfrak{r}, \tag{3}$$

wo $\mathfrak{r}$ der Vektor $\overrightarrow{ST}$ und Q die Ergiebigkeit der Quelle ist. Dieses Strömungsfeld besitzt das Potential

$$U = \frac{Q}{4\pi r}. \tag{4}$$

Kompliziertere Felder lassen sich aufbauen durch Annahme von mehreren Punktquellen oder durch stetige Verteilung von Quellen auf gegebenen Kurven, Flächen oder in dreidimensionalen Gebieten. Das Potential eines solchen Feldes ist einfach die Summe bzw. das Integral der Potentiale der einzelnen Punktquellen, aus denen man sich die ganze Quellenverteilung zusammengesetzt denkt. Ist z. B. ein dreidimensionales Quellgebiet G gegeben und die Ergiebigkeit Θ pro Volumeneinheit (= Quelldichte) in jedem Punkte $S(\xi, \eta, \zeta)$ dieses Gebietes, so hat man in (4) Q durch $\Theta dG = \Theta \cdot d\xi\, d\eta\, d\zeta$ zu er-

setzen und über G zu integrieren. Das Potential des Feldes ist dann

$$U(x, y, z) = \iiint_G \frac{\Theta(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{4\pi r}, \tag{5}$$

$$r = +\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

(siehe auch Fig. 1). Für die numerische Behandlung von Potentialfeldern ist die Tatsache wichtig, dass für j e d e s beliebig gegebene Potentialfeld eine Quellenverteilung gefunden werden kann, durch die das Feld erzeugt wird.

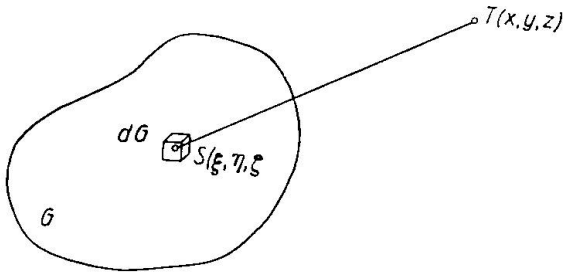

Fig. 1. Dreidimensionales Quellengebiet G

Das Schwerefeld der Erde ist ein Potentialfeld, dessen Quellen im wesentlichen die anziehenden (= gravitierenden) Massen sind, aus denen der Erdkörper aufgebaut ist. Die Quellen des elektrostatischen Feldes sind die elektrischen Ladungen. Die statischen Methoden der angewandten Geophysik beruhen auf der Ausmessung von Potentialfeldern an der Erdoberfläche und der Berechnung der zugehörigen Quellenverteilungen im Erdinnern. Mit statischen Methoden auffindbare mineralische Lagerstätten sind nichts anderes als solche Quellenverteilungen.

Magnetisierte Körper, wie z. B. Eisenerzlager, sind Quellen von Magnetfeldern. Sie haben die Eigentümlichkeit, dass ihre totale Ergiebigkeit stets Null ist. Als Beispiel seien zwei Punktquellen mit entgegengesetzt gleicher Ergiebigkeit $+Q$ und $-Q$ im Abstande s voneinander betrachtet. Die Verbindungsgerade der beiden Quellen ist die Achse des Quellenpaares,

$$h = s \cdot Q \tag{6}$$

ist sein skalares Moment. Lässt man, ohne die Achse zu verändern, s zu Null abnehmen und dafür Q so zunehmen, dass h konstant bleibt, so entsteht die Doppelquelle, auch Dipol genannt. Ihr Moment $\mathfrak{h}$

ist ein Vektor in Richtung der Achse mit dem Betrag h. Das Feld $\mathfrak{K}$ des Dipols besitzt im Punkte T das Potential

$$U = \frac{\mathfrak{h}\,\mathfrak{r}}{4\pi r^3} \tag{7}$$

(siehe auch Fig. 2). Beispielsweise ist ein kurzer Magnetstab angenähert ein magnetischer Dipol.

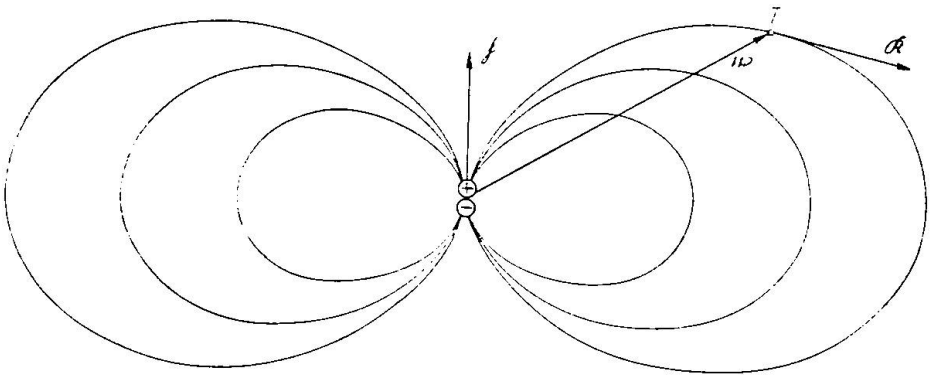

Fig. 2. Dipol mit Feldlinien

Sind in einem dreidimensionalen Gebiet Doppelquellen stetig verteilt, so ist dieses Gebiet polarisiert. Die Polarisation (im magnetischen Falle Magnetisierung genannt) ist bekannt, wenn für jeden Punkt des Gebietes die Doppelquellendichte $\mathfrak{M}$, d. h. das Dipolmoment der Volumeneinheit, gegeben ist. Das Potential des Feldes erhält man durch Zerlegung des Gebietes in elementare Dipole und Integration aus (7). Z. B. ist ein Eisenerzlager ein Gebiet mit stetig verteilten magnetischen Dipolen.

Häufig kommen im Untergrund Quellenverteilungen vor, die in einer bestimmten horizontalen Richtung sehr langgestreckt sind, wie z. B. unterirdische Antiklinalen, Synklinalen, Verwerfungen usw. Befindet man sich nicht zu nahe am einen Ende einer solchen Quellenverteilung, so sind die Feldvektoren $\mathfrak{K}$ senkrecht zum Streichen, d. h. zur Achse der Quellenverteilung. Sie liegen also in den vertikalen Querschnittsebenen, und in diesen (zueinander parallelen) Ebenen sind einerseits die Vektorfelder $\mathfrak{K}$ zueinander kongruent, anderseits auch die Querschnitte durch die Quellenverteilung. Es ist daher zweckmässig, die Quellenverteilung als einen in streichender Richtung unendlich langen Zylinder zu betrachten, dessen Quelldichte auf jeder Geraden in Richtung des Streichens konstant ist. Eine solche zylindrische Quellenverteilung mit dem zugehörigen Feld $\mathfrak{K}$ ist ein-

deutig bestimmt durch einen Querschnitt. Sie wird aus diesem Grunde oft „zweidimensional" genannt. Wie nun das Potential (5) einer dreidimensionalen Quellenverteilung aus einem elementaren Potential, nämlich dem Quellpunktpotential (4), durch Integration gewonnen wird, so lässt sich auch das Potential der zylindrischen Quellenverteilung aus einem elementaren Potential bestimmen. Dieses elementare Potential ist das sogenannte logarithmische Potential einer homogenen (d. h. überall gleich dicht mit Quellen besetzten), unendlich langen Quellengeraden mit der Ergiebigkeit λ pro Längeneinheit. Im Abstande r von der Geraden beträgt es

$$U = \frac{\lambda}{2\pi} \ln \frac{1}{r}. \tag{8}$$

Ist ferner eine zylindrische Doppelquellenverteilung gegeben, d. h. ist der Zylinder quer zum Streichen so polarisiert, dass die Doppelquellendichte längs jeder Geraden in Richtung des Streichens konstant ist, so lässt sich sein Potential durch Integration aus dem Potential der homogenen, unendlich langen Doppelquellengeraden bestimmen. Ist $\mathfrak{b}$ das Dipolmoment der Geraden pro Längeneinheit, T ein Punkt des Raumes ausserhalb der Geraden, T′ der Fusspunkt des Lotes von T auf die Gerade, $\overrightarrow{T'T} = \mathfrak{r}$, $|\mathfrak{r}| = r$, so ist das Potential der Doppelgeraden im Punkte T

$$U(T) = \frac{1}{2\pi} \frac{\mathfrak{b}\,\mathfrak{r}}{r^2}. \tag{9}$$

Es gibt demnach 4 elementare Quellgebilde, nämlich den Quellpunkt (4), die Doppelquelle (7), die Quellgerade (8) und die Doppelgerade (9), aus deren Potentialen das Potential irgend einer komplizierteren Quellenverteilung durch Summation, bzw. Integration bestimmt wird. Die vier elementaren Quellgebilde sind noch in einem anderen Sinne fundamental. Ist nämlich z. B. eine beliebige dreidimensionale Quellenverteilung mit dem Potential (5) gegeben und lässt man den Punkt T immer weiter vom Quellgebiet wegrücken, so nähert sich das Potential (5) immer mehr dem Potential (4) eines einfachen Quellpunktes, dessen Ergiebigkeit Q gleich der totalen Ergiebigkeit des Quellgebietes ist. Ganz entsprechend nähert sich bei wachsender Entfernung das Potential eines beliebig polarisierten dreidimensionalen Gebietes dem Potential (7) eines Dipols, das Potential einer zylindrischen Quellenverteilung dem Potential (8) der Quellengeraden und das Potential eines querpolarisierten Zylinders dem Potential (9) der Doppelgeraden.

In den Anwendungen sind homogene Quellgebiete, d. h. solche mit konstanter Quelldichte, besonders häufig. Ein gegebenes dreidimensionales oder zylindrisches Gebiet kann dabei entweder mit einfachen Quellen von der konstanten Dichte Θ oder mit Doppelquellen von der konstanten Dichte $\mathfrak{N}$ belegt werden. Zwischen dem Feld $\mathfrak{K}_1$ der einfachen Belegung und dem Potential U_2 der Doppelbelegung besteht dabei ein einfacher, in der Praxis oft benützter Zusammenhang. Es ist nämlich

$$U_2 = \frac{\mathfrak{N}}{\Theta} \cdot \mathfrak{K}_1 . \tag{10}$$

Nach § 1 wird bei geophysikalischen Sondiermethoden das Feld $\mathfrak{K}$ in der Regel ausserhalb der Quellgebiete benützt. In quellenfreien Gebieten ist div $\mathfrak{K} = 0$, was nach (2) für U die Laplace'sche Differentialgleichung

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \tag{11}$$

ergibt. U heisst in diesem Falle eine harmonische Funktion und kann mit Hilfe der vielseitigen und weittragenden Methoden behandelt werden, die in der Mathematik für solche Funktionen entwickelt worden sind.

§ 4. Sekundärfelder

Es kann sein, dass der Raum, in dem ein Vektorfeld $\mathfrak{K}$ besteht, von Materie erfüllt ist und dass $\mathfrak{K}$ in diesem Raum ein zweites Vektorfeld $\mathfrak{F}$ zur Folge hat. $\mathfrak{K}$ sei Primär-, $\mathfrak{F}$ Sekundärfeld genannt. Die Art der Abhängigkeit des Feldes $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{K}$ ist eine Eigenschaft der Materie und kann sehr verwickelt sein. Im Falle des Ferromagnetismus z. B. (Bedeutung von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{F}$ in diesem Falle siehe §. 5 d)) ist $\mathfrak{F}$ nicht einmal eine eindeutige Funktion von $\mathfrak{K}$. In den meisten in den Anwendungen vorkommenden Fällen ist es jedoch zulässig, die rechtwinkligen Komponenten von $\mathfrak{F}$ als lineare Funktionen der rechtwinkligen Komponenten von $\mathfrak{K}$ anzunehmen, also

$$\begin{aligned} F_x &= \Gamma_{xx} K_x + \Gamma_{yx} K_y + \Gamma_{zx} K_z , \\ F_y &= \Gamma_{xy} K_x + \Gamma_{yy} K_y + \Gamma_{zy} K_z , \\ F_z &= \Gamma_{xz} K_x + \Gamma_{yz} K_y + \Gamma_{zz} K_z , \end{aligned} \tag{12}$$

oder in üblicher Abkürzung $\mathfrak{F} = (\Gamma)\,\mathfrak{K}$ zu schreiben. Die neun Γ-Koeffizienten von (12), Tensorkomponenten genannt, können im Raume von Punkt zu Punkt variieren. In einem homogenen Kristall sind sie konstant. Ist die Materie isotrop, so ist $\Gamma_{xx} = \Gamma_{yy} = \Gamma_{zz} = \Gamma$, währenddem die andern sechs Tensorkomponenten Null sind. In diesem Falle ist $\mathfrak{F} = \Gamma\,\mathfrak{K}$, d. h. in jedem Punkte des Feldes hat $\mathfrak{F}$ die gleiche Richtung wie $\mathfrak{K}$, und die beiden Vektoren sind zueinander proportional.

§ 5. Potentialfelder in der Geophysik

Durch die neutrale Formulierung der in den vorstehenden §§ 1 bis 4 aufgeführten Tatsachen der Potentialtheorie soll ausgedrückt werden, dass die mathematische Behandlung der Potentialfelder unabhängig von der Art ihrer physikalischen Verwirklichung ist. Eine in irgendeinem physikalischen Anwendungsgebiet gefundene potentialtheoretische Tatsache oder Methode lässt sich daher auf alle andern Anwendungsgebiete der Potentialtheorie übertragen. Im folgenden seien für die wichtigsten in der Geophysik vorkommenden Anwendungsgebiete die Schlüssel zusammengestellt. Sie sollen den Zugang zur potentialtheoretischen Behandlung und den Übergang von einem Anwendungsgebiet auf ein anderes erleichtern. Den Schlüsseln sind in Stichworten Anwendungen in der Geophysik beigefügt.

a) Hydrodynamik

Q = Ergiebigkeit einer Punktquelle = Flüssigkeitsproduktion in der Zeiteinheit, z. B. in $\frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$.

$\mathfrak{K}$ = Strömungsgeschwindigkeit bei wirbelfreier Strömung, z. B. in $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$.

Grundwasserströmungen, Meeresströmungen, Luftströmungen.

b) Gravimetrik

m = gravitierende (= anziehende) Punktmasse in g.

ϱ = Dichte einer dreidimensionalen, gravitierenden Maße in $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

$k_0 = 6{,}67 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{cm}^3}{\text{g sec}^2}$ = universelle Gravitationskonstante.

$Q = -4\pi k_0 m$.
$\Theta = -4\pi k_0 \varrho$.
$\mathfrak{K}$ = Gravitationsbeschleunigung.

Schwerefeld der Erde, gravimetrische Sondiermethoden.

c) Elektrostatik

$p = \left\{\begin{array}{l} 4\pi \text{ bei nicht rationaler Schreibweise} \\ 1 \text{ bei rationaler Schreibweise} \end{array}\right\}$ = Massystemfaktor.
ε_0 = Dielektrizitätskonstante des Vakuums = Massystemfaktor.
$\frac{Q}{\hat{p}}$ = elektrische Ladung.
$\frac{\Theta}{\hat{p}}$ = elektrische Ladungsdichte.
$\frac{1}{\varepsilon_0}\mathfrak{K}$ = elektrische Feldstärke.
$\frac{1}{\hat{p}}\mathfrak{N}$ = dielektrische Polarisation.
$\mathfrak{F} = \mathfrak{K} + \mathfrak{N}$ = dielektrische Verschiebung.
Γ = relative Dielektrizitätskonstante der Materie.

Luftelektrizität, Gewitter, Theorie der Ionisationskammern und Zählrohre für Radioaktivitätsmessungen.

d) Magnetostatik

$\hat{p}$ wie im vorstehenden Abschnitt.
μ_0 = Permeabilität des Vakuums = Massystemfaktor.
$\frac{Q}{\hat{p}}$ = magnetische Polstärke.
$\frac{1}{\mu_0}\mathfrak{K}$ = „ Feldstärke.
$\frac{1}{\hat{p}}\mathfrak{N}$ = Magnetisierung.
$\mathfrak{F} = \mathfrak{K} + \mathfrak{N}$ = magnetische Induktion.
Γ = relative magnetische Permeabilität der Materie.

Magnetfeld der Erde, magnetische Sondiermethoden, Theorie der Stabmagnete und der magnetischen Messinstrumente.

e) Elektrisches Gleichstromfeld in homogener, isotroper Umgebung

E = Ergiebigkeit der Stromquelle (= Stromstärke).

$Q = \frac{E}{\Gamma}$

$\mathfrak{K}$ = elektrische Feldstärke.

Γ = spezifische Leitfähigkeit eines Leiters.

$\mathfrak{F}$ = Stromdichte.

Natürliche Erdströme, geoelektrische Gleichstrommethoden.

f) Wärmeströmung in homogener, isotroper Umgebung

E = Ergiebigkeit der Wärmequelle, z.B. in $\frac{\text{Kal}}{\text{sec}}$.

$Q = \frac{E}{\Gamma}$

U = Temperatur, z.B. in C^0 (Celsiusgrad).

$\mathfrak{K}$ = Temperaturgefälle, z.B. in $\frac{C^0}{\text{cm}}$

Γ = Wärmeleitfähigkeit, z.B. in $\frac{\text{Kal}}{\text{sec cm } C^0}$.

$\mathfrak{F}$ = Vektor der Wärmestörung, z.B. in $\frac{\text{Kal}}{\text{sec cm}^2}$.

Temperatur und Wärme im Erdinnern, geothermische Sondiermethoden.

g) Elastizitätslehre (man vgl. dazu z. B. Lit. 9)

Die kleinen Deformationen eines vollkommen elastischen, homogenen, isotropen Körpers, der sich unter dem Einfluss von Oberflächenkräften und von räumlich und zeitlich konstanten Massenkräften im Gleichgewicht befindet, lassen sich mit Hilfe der Potentialtheorie behandeln, weil eine ganze Reihe von mit den Deformationen zusammenhängenden Funktionen harmonisch sind.

$\mathfrak{p} = x\,e_x + y\,e_y + z\,e_z$.

$\mathfrak{s} = s_x\,e_x + s_y\,e_y + s_z\,e_z$ = Verschiebungsvektor.

P = Spannungstensor.

S_P = Summe der Hauptspannungen.

E = Verzerrungstensor.
ν = Poisson'sche Elastizitätskonstante.

Folgende Funktionen sind harmonisch: div $\mathfrak{s}$, S_P, die Komponenten der Vektoren rot $\mathfrak{s}$, $\Delta\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s} + \frac{\operatorname{div}\mathfrak{s}}{2(1-2\nu)}\mathfrak{p}$ und die Komponenten der Tensoren ΔP und ΔE. (Die Komponenten von $\Delta\mathfrak{s}$ sind Δs_x, Δs_y und Δs_z, entsprechend sind die Komponenten der beiden Tensoren definiert.)

Elastische Deformationen im Erdinnern, in der Erdkruste, im Baugrund.

§ 6. Bestimmung der Felder von Quellenverteilungen

Eine geophysikalische Sondierung mit Hilfe eines Potentialfeldes dient in der Regel der genauern Untersuchung einer ganz bestimmten Lagerstätte oder tektonischen Situation, deren Vorhandensein vom Geologen vermutet wird. Damit die Sondierung zweckmässig angelegt werden kann, ist es nötig, das zu vermessende physikalische Feld an der Erdoberfläche aus der vermuteten Quellenverteilung im Untergrund wenigstens in grossen Zügen zum voraus zu berechnen. Ist die Sondierung durchgeführt, so besteht die Interpretation der Resultate in der genauern Ermittlung der Quellenverteilung im Untergrund. Auch diese Aufgabe lässt sich, wie in § 7 gezeigt werden soll, nur lösen durch Berechnung der Felder von bestimmt vorgegebenen Quellenverteilungen. Solche Berechnungen bilden daher vom Anfang bis zum Schluss die mathematische Grundlage des Sondierverfahrens.

Hat die Quellenverteilung eine mathematisch definierte Form und Dichte, so ist das Feld durch Integration und Gradientbildung (man vergl. dazu die Gleichungen (5) und (2)) zu ermitteln. In der Literatur sind für zahlreiche Quellenverteilungen, wie homogene Strecken, Kugeln, Kreiszylinder, Ellipsoide, Quader usw. die auf diesem Wege gewonnenen Felder angegeben. (Man vgl. u. a. Lit. 8, 5, 11, 7.)

Die Berechnung von komplizierteren Quellengebieten lässt sich mit Hilfe der elementaren Quellgebilde (siehe § 3) angenähert durchführen. Man zerlegt nämlich das Quellengebiet in Teilgebiete und ersetzt zur Berechnung des Feldes jedes Teilgebiet durch das zugehörige elementare Quellgebilde. Auf diese Weise lässt sich offenbar, im Hinblick auf die in § 3 erwähnte fundamentale Bedeu-

tung der Potentiale der elementaren Quellgebilde als Grenzpotentiale, durch entsprechend feine Einteilung des Quellengebietes jeder gewünschte Grad von Annäherung erreichen. Die Berechnung wird sehr erleichtert durch tabellierte Hilfsfunktionen für die Felder der elementaren Quellgebilde. (Man vgl. dazu Lit. 10 und 7.)

Hat die Quellenverteilung eine unregelmässige, etwa graphisch durch Höhenkurven oder Vertikalschnitte gegebene Form, so eignet sich zur Ermittlung des Feldes ausser der eben besprochenen Zerlegungsmethode auch eine mechanische oder graphische Methode. (Siehe u. a. Lit. 5, 6, 4.)

§ 7. Interpretation geophysikalischer Messungen an Potentialfeldern

Die Interpretation besteht in der Ermittlung der unterirdischen Quellenverteilung auf Grund der Resultate der Vermessung des zugehörigen Potentialfeldes an der Erdoberfläche. In der Regel wird allerdings nicht der gesamte Feldvektor $\mathfrak{K}$ gemessen, sondern nur eine oder zwei Komponenten, z. B. in der Gravimetrik die Vertikalkomponente, in der Magnetik die Vertikalkomponente oder die NS-Komponente oder beide. Die Messung beschränkt sich ferner auf einzelne Stationspunkte. Für dazwischen liegende Punkte der Erdoberfläche ist, wenn nötig, die betreffende Feldkomponente durch Interpolation angenähert zu bestimmen; auch in den Stationspunkten selbst sind die Resultate naturgemäss mit unvermeidlichen Messfehlern behaftet.

Es sei aber einmal angenommen, der Feldvektor $\mathfrak{K}$ sei für alle Punkte der Erdoberflache und überdies für den ganzen Raum ausserhalb der Erdoberfläche vollständig und fehlerlos bekannt. Trotzdem liesse sich daraus die Quellenverteilung im Untergrund nicht eindeutig bestimmen. Die Potentialtheorie lehrt, dass es stets unendlich viele Quellenverteilungen gibt, deren Felder an der Erdoberfläche und im Aussenraum identisch sind. Als einfachstes Beispiel sei eine homogene Kugel genannt. Ihr Feld ist ausserhalb der Kugel das gleiche wie das Feld eines Quellpunktes, der sich im Mittelpunkt der Kugel befindet und dessen Ergiebigkeit gleich der gesamten Ergiebigkeit der Quellkugel ist. Von einer sich im Untergrund befindlichen homogenen Kugel lässt sich daher durch Messungen an der Erdoberfläche wohl der Mittelpunkt und die Gesamtmasse bestimmen, nicht aber ihr Radius. Die Aufgabe hat daher unendlich viele Lösungen entsprechend der unendlichen Anzahl der möglichen Radien und Dichten.

Wenn sich daher die Quellenverteilung mathematisch nicht eindeutig bestimmen lässt, so liegt das grundsätzlich nicht an der Tatsache, dass das Feld durch Messungen nur lückenhaft und mit Fehlern behaftet ermittelt werden kann, und es ist demnach ein aussichtsloses Unterfangen, die Eindeutigkeit der Lösung durch Vermehrung und Verfeinerung der Messungen und durch den Ausbau des mathematischen Apparates erzwingen zu wollen.

Die Vielfalt der Lösungsmöglichkeiten kann nur eingeschränkt werden durch zusätzliche Hypothesen über die Quellenverteilung. Diese Hypothesen fussen auf den Kenntnissen, die der Geologe in jedem einzelnen Falle vom Untergrund besitzt und die ihm gestatten, die Vielfalt der mathematisch möglichen Lösungen mehr oder weniger einzuschränken. In günstigen Fällen kann auf diese Weise die Quellenverteilung mit einer an Sicherheit grenzenden Wahrscheinlichkeit ermittelt werden.

Bei der Bestimmung der Quellenverteilung sollen zwei Stufen unterschieden werden, nämlich eine Stufe der Schätzung und eine Stufe der genauern Berechnung. Die Schätzung einer Quellenverteilung wird am besten anhand eines Kataloges ausgeführt, der nach den Methoden von § 6 erstellt werden kann und für eine Reihe von geometrisch einfachen Quellenverteilungen die zugehörigen Felder in Form von Zahlentabellen, graphischen Darstellungen oder Kurvenplänen enthält (Lit. 11, 5, 10, 7). Durch Vergleichung dieser Felder mit dem gemessenen und Berücksichtigung der geologischen Kenntnisse des Untergrundes wird ein Katalogbeispiel ausgewählt. (Oder es wird aus mehreren Katalogbeispielen durch Interpolation ein passendes Beispiel hergestellt.) Abgesehen von den bei einer Schätzungsmethode unvermeidlichen Abweichungen soll die wirkliche Quellenverteilung aus dem Katalogbeispiel hervorgehen durch Multiplikation aller linearen Dimensionen mit einer Konstanten und der Quelldichte mit einer zweiten Konstanten. Die Vergleichung des Katalogfeldes mit dem gemessenen ergibt sofort die beiden Konstanten und damit die Grösse, Tiefe, Dichte usw. der gesuchten Quellenverteilung resp. einer Quellenverteilung, die eine geometrisch einfache Näherung an die wirkliche Quellenverteilung darstellt. Damit ist die Schätzung ausgeführt.

In vielen Fällen ist mit einer solchen Schätzung das praktische Ziel der geophysikalischen Sondierung erreicht. Ist dies nicht der Fall, so wird als zweite Stufe eine genauere Berechnung der Quellenverteilung angeschlossen. Zuerst wird das vereinfachte Abbild der Quellenverteilung, das auf der ersten Stufe gewonnen wurde,

durch eine ausreichende Anzahl n von Parametern $p_1, p_2, \ldots, p_n$ charakterisiert. Liegt z. B. ein homogenes Ellipsoid vor und beabsichtigt man im Hinblick auf die geologische Situation und die beschränkte Genauigkeit der Messresultate, die Quellenverteilung auch nach genauerer Berechnung als homogenes Ellipsoid von gegebener Quelldichte darzustellen, so sind die rechtwinkligen Koordinaten des

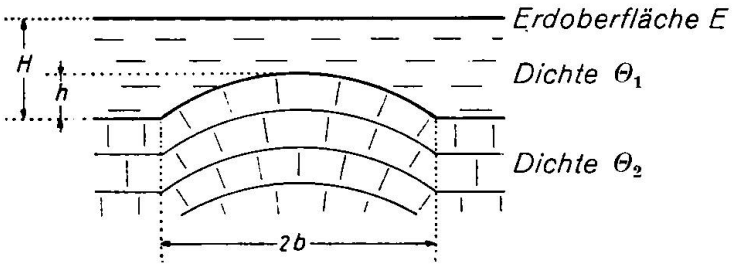

Fig. 3a. Vertikaler Querschnitt durch eine unterirdische Antiklinale, schematisiert

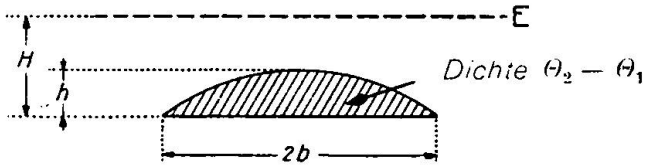

Fig. 3b. Querschnitt der Quellenverteilung, die der Antiklinalen entspricht und das Störungsfeld $\mathfrak{R}$ verursacht

Mittelpunktes, die Achsenlängen und die Winkel der Achsen mit den Koordinatenrichtungen die Parameter, und das Ziel der genauern Berechnung besteht darin, für die durch Schätzung gewonnenen Parameterwerte $p_1, p_2, \ldots$ Verbesserungen $v_1, v_2, \ldots$ zu finden, so dass die verbesserten Parameterwerte $p_1 + v_1, p_2 + v_2, \ldots$ eine Quellenverteilung ergeben, deren Feld die bestmögliche Übereinstimmung mit dem gemessenen Feld zeigt. Dass die Wahl der Parameter für die genauere Berechnung in weitem Masse willkürlich ist und daher der Berücksichtigung der geologischen Situation und des Umfanges und der Genauigkeit der vorliegenden Messresultate jeden Spielraum lässt, der gewünscht wird, möge an einem zweiten Beispiel gezeigt werden. Die Schätzung habe für die Quellenverteilung eine Antiklinale ergeben, deren Querschnitt (Fig. 3) ein Kreissegment mit der Breite 2b und der Höhe h sei. Liegen z. B. nur wenige an der Erdoberfläche ausgeführte Messungen vor und ist die Ausgangstiefe H, etwa durch Bohrungen, gesichert, so kann man sich

darauf beschränken, auch den Querschnitt der genaueren Quellenverteilung durch ein Kreissegment mit gleicher Symmetrieachse und Ausgangstiefe darzustellen, d. h. lediglich $b = p_1$ und $h = p_2$ als Parameter einzuführen. Liegt hingegen ein dichteres Netz von Messstationen vor und ist die Ausgangstiefe unsicher, so kann die Voraussetzung, der Querschnitt sei ein Kreissegment von gegebener Ausgangstiefe, verlassen und der Querschnitt z. B. durch eine grössere Serie von äquidistanten Ordinaten als Parametern charakterisiert werden, wie dies in Fig. 4 angedeutet ist. Nunmehr werde auf der Erdoberfläche ein Netz von Punkten $T_1, T_2, \ldots$ betrachtet, und es werde vorausgesetzt, dass in jedem dieser Punkte eine bestimmte Komponente des Feldvektors $\mathfrak{K}$ (z. B. die Vertikalkomponente) ent-

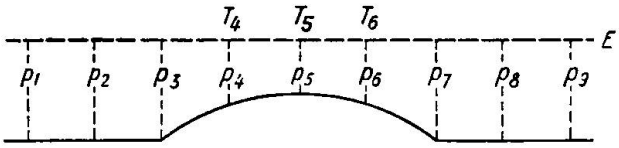

Fig. 4. Parameter zur Charakterisierung der unterirdischen Antiklinalen

weder direkt gemessen oder aus gemessenen Werten interpoliert worden sei. Auf alle Fälle werde der Wert der benützten Komponente im Punkte T_i gemessener Wert (im weitern Sinne) genannt und mit G_i bezeichnet. Wird nun eine z. B. durch Schätzung gewonnene Quellenverteilung im Untergrund als Ursache des Feldes $\mathfrak{K}$ betrachtet, so kann man nach § 6 für jeden Punkt T_i die benützte Feldkomponente bestimmen. Sie werde mit K_i bezeichnet. (Wäre die angenommene Quellenverteilung im Untergrund identisch mit der wirklich vorhandenen, so wäre in jedem Punkte T_i der Erdoberfläche $G_i = K_i$. In der Regel ist dies aber nicht der Fall. Die Charakterisierung der Quellenverteilung durch Parameter $p_1, p_2, \ldots$ und die Aufsuchung von Verbesserungen $v_1, v_2, \ldots$ für diese Parameter hat gerade den Sinn, die noch vorhandenen Differenzen $G_i - K_i$ zum Verschwinden zu bringen oder wenigstens nach Möglichkeit zu reduzieren.) K_i hängt ab von den Werten der Parameter $p_1, p_2, \ldots, p_n$, durch die die angenommene Quellenverteilung charakterisiert wird, und werde in eine Taylor-Reihe entwickelt:

$$
\begin{aligned}
&K_i(p_1 + v_1, p_2 + v_2, \cdots, p_n + v_n) = K_i(p_1, p_2, \cdots, p_n) \\
(13) \quad &+ \frac{\partial K_i}{\partial p_1} v_1 + \frac{\partial K_i}{\partial p_2} v_2 + \cdots + \frac{\partial K_i}{\partial p_n} v_n + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K_i}{\partial p_1^2} v_1^2 + \cdots .
\end{aligned}
$$

Die Verbesserungen $v_1, v_2, \ldots$ müssen so bestimmt werden, dass die linke Seite der Gleichung gleich G_i wird. Vernachlässigt man rechts die Glieder höhern als ersten Grades, so wird die Gleichung linear in den unbekannten Verbesserungen. Die partiellen Differentialquotienten werden ersetzt durch die entsprechenden Differenzenquotienten, d. h.

$$\frac{\partial K_i}{\partial p_k}$$

wird ersetzt durch

$$a_{ik} = \frac{K_i^{(k)} - K_i}{u_k}, \tag{14}$$

wo $K_i^{(k)}$ die Grösse ist, die aus $K_i = K_i(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ entsteht, wenn man dem Parameter p_k einen willkürlichen Zuwachs u_k erteilt, d. h. ihn durch $p_k + u_k$ ersetzt, währenddem die andern $n-1$ Parameter unverändert bleiben. a_{ik} lässt sich deshalb nach den Methoden von § 6 ohne weiteres ermitteln. Die Gleichung (13) kann nun nacheinander für die Punkte $T_1, T_2, \ldots$ aufgestellt werden, was das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} G_1 - K_1 &= a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + \cdots + a_{1n} v_n, \\ G_2 - K_2 &= a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + \cdots + a_{2n} v_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \tag{15}$$

ergibt. Stellt man diese Gleichungen auf für sämtliche Punkte T_i, in denen die Feldkomponente K_i wirklich gemessen wurde, und nimmt man an, ihre Anzahl sei grösser als n, so sind die plausibelsten Werte für die Unbekannten $v_1, v_2, \ldots, v_n$ nach der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen.

Berücksichtigt man, dass auch die verbesserten Parameterwerte eine Quellenverteilung ergeben, die nur eine mehr oder weniger zutreffende Annäherung an die wirklichen Verhältnisse darstellt, so wird man meistens auf die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate verzichten und die Berechnung der Unbekannten bedeutend vereinfachen können. Man wird z. B. alle Verbesserungen bis auf eine kleine Gruppe von m Verbesserungen Null setzen und für diese m Unbekannten mit Hilfe von m günstig gewählten Punkten T_i genau m Gleichungen (15) aufstellen und auflösen. (In Fig. 4 z. B. wird die Vertikalkomponente des Feldes in den Punkten T_1, T_5 und T_6 in erster Linie durch die Ordinaten p_1, p_5 und p_6 be-

stimmt. Man erhält daher für diese Ordinate schon gute Verbesserungen, wenn man zunächst die Verbesserungen der übrigen Ordinaten Null setzt.) Das Verfahren wird mit verschiedenen Gruppierungen wiederholt, bis die sukzessiv verbesserten Parameterwerte eine genügende Annäherung des berechneten Feldes K_i an das gemessene G_i ergeben. Bei der Wahl der Punkte T_i braucht man sich dabei nicht auf die wirklichen Messtationen zu beschränken, sondern kann auch interpolierte Feldwerte benützen. Die Güte der Konvergenz des Verfahrens hängt natürlich von der Geschicklichkeit in der Wahl der Parametergruppen und Stationspunkte T_i ab. Die Konvergenz ist aber jederzeit kontrollierbar, da ja in jedem Stadium des Verfahrens das Feld K_i berechnet und mit dem gemessenen G_i verglichen werden kann.

Während auf der Stufe der Schätzung in der Regel die Erdoberfläche horizontal anzunehmen ist, wird auf der Stufe der genauern Berechnung nach der eben beschriebenen Parameter-Methode die wirkliche Topographie der Erdoberfläche automatisch mitberücksichtigt. Die Methode lässt sich überdies in gleicher Weise anwenden, wenn mehr als eine Komponente von $\mathfrak{K}$ gemessen und für die Interpretation benützt wird, wie dies z. B. häufig in der Magnetik der Fall ist.

Ein Rückblick auf die in diesem Paragraphen beschriebene Interpretationsmethode zeigt, dass ihr mathematischer Teil vor allem auf der Bestimmung der Felder von gegebenen Quellenverteilungen beruht. Für diese Bestimmung stehen nach § 6 gut ausgebaute Methoden zur Verfügung, womit die praktische Durchführbarkeit der Interpretationsmethode gesichert ist.

Literatur

1. P. Frank und R. v. Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. 2 Bände. Vieweg, Braunschweig, 1930 und 1935.
2. F. Gassmann, Zur numerischen Behandlung von Potentialfeldern in der Geophysik. Verhandlungen der Schweiz. Naturf. Gesellschaft, Fribourg (1945), 117.
3. — Näherungsmethode zur Bestimmung der Quellen von Potentialfeldern in der Geophysik. Verhandlungen der Schweiz. Naturf. Gesellschaft, Zürich (1946), 81.
4. F. Gassmann und D. Prosen, Graphische Bestimmung der Wirkung gegebener dreidimensionaler Massen auf die Schwereintensität. Eclogae geol. Helvetiae 39 (1947), 199—210.
5. C. A. Heiland, Geophysical exploration. Prentice-Hall, Inc., New York 1940.

6. K. Jung, Diagramme zur Bestimmung der Terrainwirkung für Pendel und Drehwaage und zur Bestimmung der Wirkung „zweidimensionaler" Massenanordnungen. Zeitschrift für Geophysik III (1927), 201—212.
7. — Direkte Methoden zur Bestimmung von Störungsmassen aus Anomalien der Schwereintensität. Zeitschrift für Geophysik XIII (1937), 45—67.
8. O. D. Kellogg, Foundations of potential theory. Springer, Berlin 1929.
9. A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizität. Deutsch von A. Timpe. Teubner, Leipzig 1907.
10. A. Nippoldt, Verwertung magnetischer Messungen zur Mutung. Springer, Berlin 1930.
11. H. Reich und R. v. Zwerger, Taschenbuch der angewandten Geophysik. Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig 1943.

Eingegangen: Dezember 1947.