

Zeitschrift: Schweizerische mineralogische und petrographische Mitteilungen = Bulletin suisse de minéralogie et pétrographie
Band: 22 (1942)
Heft: 2

Artikel: Kristallographie und Optik des Kupfervitriols
Autor: Mäder, Josef
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-19519>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Kristallographie und Optik des Kupfervitriols

Von *Josef Mäder*

L. WEBER hat nachgewiesen (Lit. 11), dass die optischen Konstanten eines triklinen Kristalls sich mittels eines einzigen Prismas unbekannter Orientierung bestimmen lassen, falls die Schwingungsrichtungen jener Wellen berücksichtigt werden, deren Ebenen parallel zu den Grenzflächen des Prismas sind. Die experimentelle Prüfung der Methode an Hand eines Kupfervitriolkristalls ergab dann allerdings nicht unerhebliche Abweichungen von den Werten, die PAPE, KOHLRAUSCH, LAVENIR und G. WULFF (Lit. 8, 4, 6, 2) auf andere Weise gefunden hatten. Den Grund dafür sieht L. WEBER vor allem darin, dass bei seinem Verfahren vom Befund in einem beschränkten Beobachtungsgebiet auf das Verhalten im Gesamtraum extrapoliert wird. In einer Schlussbemerkung meint er, dass die zusätzliche Berücksichtigung der Doppelbrechung zu besseren Resultaten führen könnte.

So schien es verlockend, die Bestimmung der optischen Konstanten eines triklinen Kristalls mit Hilfe der Prismenmethode nochmals zu versuchen. Zum vorneherein war aber die Forderung eines einzigen Prismas fallen zu lassen. Auch sollten die Lichtgeschwindigkeiten in möglichst verschiedenen Richtungen ermittelt und vor allem die Doppelbrechung herangezogen werden.

Als Untersuchungsmaterial dienten selbstgezüchtete Kupfervitriolkristalle. Diese eignen sich für die beschriebenen Zwecke besonders gut, weil sie chemisch völlig bestimmt sind und sich leicht in passender Grösse und Zahl gewinnen lassen. Überdies können die Flächen, die sich mannigfach unter spitzen Winkeln treffen, zu optischen Prismen ganz verschiedener Orientierung kombiniert werden. Die Flächen selber wurden nicht poliert, sondern in ihrem ursprünglichen Zustand belassen. Natürlich mussten die bestgeformten Kristalle ausgesucht werden.

I. Kristallographischer Teil

Die zur Untersuchung benötigten Kristalle wurden zur warmen Sommerszeit in einem temperaturkonstanten Kellervorraum gezogen.

Neben ganz grossen Individuen (2—3 cm) bildeten sich viele kleinere (etwa $\frac{1}{2}$ cm Längsdurchmesser). Unter diesen allen wurden jene, die sich durch gute Flächenbeschaffenheit und klare Durchsichtigkeit auszeichneten, sorgfältig herausgelesen. An 15 Individuen, die näher geprüft und naturgetreu skizziert wurden, konnten folgende Formen festgestellt werden: a (100), b (010), m (110), q (011), t (021), κ (0 $\bar{1}$ 1), μ (1 $\bar{1}$ 0), ξ ($\bar{1}$ 21), σ (12 $\bar{1}$), τ (0 $\bar{2}$ 1), ω ($\bar{1}$ 11). Das Pinakoid λ (1 $\bar{2}$ 0), das mehrfach gefunden und auch für die optischen Beobachtungen verwertet wurde, ist an diesen 15 Individuen wegen seiner Kleinheit nicht mitgezählt worden. Nie beobachtet wurden π (1 $\bar{3}$ 0) und c (001).

Der Habitus dieser nach der c-Achse durchwegs gestreckten Kristalle entspricht nicht ganz den in GROTHS Chemischer Kristallographie (Bd. II, S. 419) abgebildeten Typen. Diese sind in der Hauptzone zu rundlich, einzig Fig. 669 zeigt eine gewisse Tafeligkeit nach m. Von den 15 in Rede stehenden Kristallen sind 12 nach m ausgesprochen tafelig; ein weiterer zeigt diese Tafeligkeit durch ungleiche Ausbildung der hintern und vorderen Fläche etwas gestört. Einmal sind a und m im Gleichgewicht. Am letzten Kristall herrscht a entschieden vor. Oberes und unteres Ende unterscheiden sich zuweilen auffallend durch Zahl und relative Grösse der ausgebildeten Flächen. ω (öfters parallel zur Kombinationskante mit ξ fein gestreift) ist immer am stärksten entwickelt, jedoch nur in einem einzigen Fall von keinen weiteren Endflächen begleitet. Im Gegensatz zu GROTHS Figuren sind auch q und t, einzeln oder beide zugleich, recht stark ausgedehnt. Tabelle 1 gibt über diese Grössenverhältnisse näheren Aufschluss. Es bedeutet darin: g = gross; sg = sehr gross; + = vorhanden, aber klein; ++ = verhältnismässig gross.

Tabelle 1

Grössen-Entwicklung der Endflächen an 15 Kupfervitriolkristallen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
t	g			g	g	+			g		+		g	g	+
q		g	g	g		g	++						++	+	g
κ		+				+							+	++	
τ		++	++	+		+	+	+							+
ξ	+	+	++	+	++	++					+	+	+	++	+
ω	g	g	sg	sg	sg	g	sg	sg	g	sg	sg	sg	g	g	g
σ		+	+	+		+	+	+							+

Fig. 1 gibt ein Idealbild des durch die Angaben von Tab. 1 festgelegten Typus des Kupfervitriols.

Zur sicheren Deutung der Kristallflächen wie auch zur Ermittlung der genauen Winkel an den brechenden Kanten mussten zahlreiche Messungen vorgenommen werden. Dabei ergaben sich für die Winkel gleicher Flächenpaare verschiedener Kristalle Abweichungen von maximal 25'. Um ähnliche Beträge weichen die Mittel meiner Messungsergebnisse von den BARKER'schen Werten (Lit. 2) ab. BARKER selbst erhielt zwischen Messung und Berechnung Unterschiede bis zu 32'. Der Grund für diese Unsicherheit der Winkel

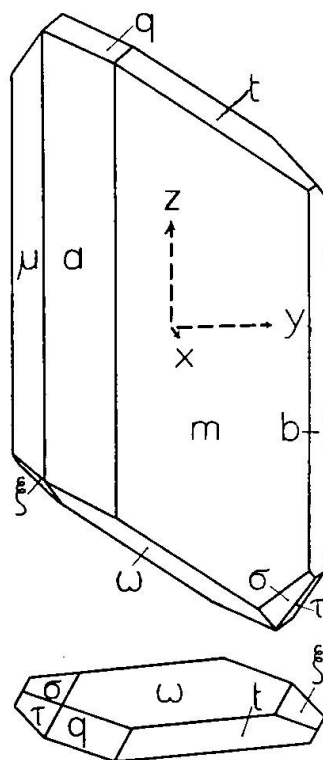


Fig. 1. Ideales Habitusbild des Kupfervitriols.

liegt in der starken Neigung des Kupfervitriols zu Vizinalflächenbildung. Flächen, die einander parallel liegen sollten, schliessen Winkel ein, die von 180° um mehrere Minuten verschieden sein können. Einzelne Flächen, besonders die breit entwickelten m-Flächen, zeigen Doppelreflexe, die bis zu 25' voneinander abstehen. Durch geeignete Schwärzung einzelner Flächenteile mit Tusche wurden Nebenreflexe zum Verschwinden gebracht. Sollen geschwärzte Kristalle für optische Zwecke gebraucht werden, so ist darauf zu achten, dass das Licht noch in möglichst verschiedenen Richtungen hindurchgehen kann. Auch ist nicht zu übersehen, dass beim Schwärzen einer vorderen und hinteren Fläche u. U. nicht zusammengehörige Teile zugedeckt werden. So wird ohne weiteres verständlich, dass

Flächen, die tadellos erscheinen und einheitliche Reflexe ergeben, zu den Gegenflächen nicht parallel sind. Ein Beispiel hierfür liefert Kr. 27.

Ablesung	Fläche ¹⁾	Reflex- beschaffenheit	Innen- oder Aussenwinkel	Mittel
341° 12 $\frac{1}{8}$ '	m	sehr gut		
214 16 $\frac{3}{8}$	b'	gut	53° 4 $\frac{1}{4}$ '	
160 49 $\frac{1}{8}$	m'	sehr gut	53 27 $\frac{1}{4}$	53° 14 $\frac{1}{2}$
34 13 $\frac{7}{8}$	b	verschwommen	53 24 $\frac{3}{4}$	
341 12 $\frac{1}{8}$	m		53 1 $\frac{3}{4}$	

Die Flächen m und m', die beide sehr gute Reflexe liefern, bilden einen Winkel von 180° 23'. Das ist leicht verständlich, wenn man bedenkt, dass vor dem Schwärzen die eine Fläche zwei sehr gute und gleich starke Reflexe gibt, die 33' voneinander absteigen, während die maximale Signalabweichung der andern Fläche 27' ausmacht.

Bei diesem Sachverhalt, wo in der gegenseitigen Lage der Flächen doch eine gewisse Unbestimmtheit zu herrschen scheint, ist es angezeigt, die kristallographischen Konstanten des Kupfervitriols neu zu berechnen, aber nicht nach der gewöhnlichen, auch von BARKER befolgten Methode, wo von fünf unabhängigen Messungen ausgegangen wird, sondern unter gleichmässiger Berücksichtigung aller überhaupt gemessenen Winkel durch Anwendung des GAUSS'schen Ausgleichungsverfahrens. Allerdings werden dadurch systematische Fehler nicht weggeschafft. G. KALB (Lit. 3) weist in seiner Arbeit über „Die Bedeutung der Vizinalerscheinungen für die Kristallmessung“ mit besonderer Eindrücklichkeit darauf hin, wie sehr in solchen Fällen die zuverlässige Bestimmung des Achsenverhältnisses erschwert ist.

Tabelle 2

Gemessene und berechnete Winkel des Kupfervitriols in der Zone [001]

Fl.	Kr. 14	Kr. 27	Kr. 28	Kr. 29	Kr. 30	Kr. 31	Mittlerer Meßwert	Barker	berechnet
b : m	53° 8'	53° 15'	53° 5'	53° 3'	53° 12'	53° 11'	53° 9'	52° 59'	53° 7' 26''
b : a	79 3	79 5	78 58	79 9	79 2	79 5	79 4	79 6	79 7 40
b : μ	110 8	110 15	110 9	110 10	110 11	110 11	110 11	110 8	110 6 17
b : λ	132 50	132 42	132 44	132 48	—	132 26	132 42	132 37	132 44 35

¹⁾ Der Akzent beim Buchstabenzeichen der Form bedeutet, dass die betreffende Fläche auf der Hinterseite des Kristalls gelegen ist; im Symbol ist also der erste Index negativ.

Bei der geschilderten Ausbildung der Kristalle war es gegeben, dass für die fünf Flächen aus der Zone der c-Achse besonders viele Messungen vorliegen. Es schien darum erlaubt, diese für sich auszugleichen. Tab. 2 enthält die Winkelwerte, die an sechs Kristallen durch Ausmessen der ganzen Zone gefunden wurden. Sie stellen das Mittel dar, das an jedem Kristall für den Winkel des angegebenen Flächenpaares wie auch für den Winkel der parallelen Gegenflächen aus wiederholten Messungen erhalten wurde. Kristall 31 hat jedoch eine einzige Fläche λ ; $b\lambda$ konnte so nicht mit der gleichen Zuverlässigkeit bestimmt werden, wie das für die übrigen Winkel der Fall ist. Vielleicht erklärt sich daraus der grosse Unterschied dieses Einzelwertes gegenüber den vier andern Angaben. Für die Ausgleichungsrechnung wurde das auf volle Minuten gekürzte Gesamtmittel der an den sechs Kristallen gemessenen Winkel verwendet (= mittlerer Messwert). Zum Vergleich sind in Tab. 2 die entsprechenden Messwerte BARKERS angegeben.

Die Flächen der c-Zone seien, bei b beginnend, gemäss ihrer natürlichen Reihenfolge numeriert. Es ergibt sich so die eindeutige Zuordnung: b (1), m (2), a (3), μ (4), λ (5). Der Winkel, den die k^{te} Fläche mit b bildet, heisse φ_{1k} . Die am Beobachtungswert von φ_{1k} anzubringende Korrektur sei x_{1k} . Nach dem GAUSS'schen Satz über das Doppelverhältnis vier tautozonalen Flächen ergeben sich die beiden Gleichungen (Lit. 7, S. 113):

$$\begin{aligned}\lambda_1 \cotg(\varphi_{13} + x_{13}) - \cotg(\varphi_{14} + x_{14}) &= (\lambda_1 - 1) \cotg(\varphi_{12} + x_{12}) \\ \lambda_2 \cotg(\varphi_{13} + x_{13}) - \cotg(\varphi_{15} + x_{15}) &= (\lambda_2 - 1) \cotg(\varphi_{12} + x_{12})\end{aligned}$$

Hierin sind λ_1 und λ_2 einfache Funktionen der Flächenindizes; sie haben also mit dem vorerwähnten Flächenzeichen λ für (120) nichts zu tun. Die kleinen Unbekannten x_{1k} sind so zu bestimmen, dass sie einerseits die beiden Gleichungen erfüllen, anderseits aber $\sum x_{1k}^2$ zu einem Minimum werden lassen. Dazu werden die beiden trigonometrischen Beziehungen zunächst linear gemacht und hierauf nach zwei der vier Unbekannten (z. B. x_{14} und x_{15}) aufgelöst. Durch Substitution der gewonnenen Werte in $\sum x_{1k}^2 = \text{Min.}$ ergibt sich ²⁾:

$$\begin{aligned}F(x_{12}, x_{13}) &\equiv 5,73829 x_{12}^2 + 7,16512 x_{13}^2 - 10,69916 x_{12} x_{13} \\ &+ 0,01701 x_{12} - 0,02056 x_{13} + 0,00002 = \text{Min.}\end{aligned}$$

Nach üblicher Rechnungsart finden sich daraus eindeutig x_{12} und x_{13} und damit ebenso eindeutig x_{14} und x_{15} . Endgültig kommt:

$$bm = 53^\circ 7,4' \quad ba = 79^\circ 7,7' \quad b\mu = 110^\circ 6,5' \quad b\lambda = 132^\circ 44,8'$$

²⁾ Diese und die spätern Ausgleichungsrechnungen wurden mit einer achtstelligen Multiplikations-Rechenmaschine („Millionär“, Egli A.G. Zürich-Wollishofen) durchgeführt.

Die Abweichung von den mittleren Messwerten (vergl. Tab. 2) ist also sehr gering und die vorzügliche Übereinstimmung mit den aus dem Achsenverhältnis zurückberechneten Werten (Tab. 2, letzte Kolonne) ebenfalls beachtenswert.

Tabelle 3

Messwerte der von den Endflächen des Kupfervitriols untereinander und mit a , m , μ gebildeten Winkel

Fl.	Kr. 28	Kr. 32	Kr. 33	Kr. 34	Kr. 35	Kr. 36	Mittel	Barker	berechnet
$b : q$	—	—	—	—	—	64°46'	64°46'	64°58'	64°46' 1"
$b' : \tau$	—	—	—	—	—	40 39	40 39	40 33	40 42 59
$b : t$	—	—	—	—	—	44 32	44 32	44 41	44 33 16
$b : \omega'$	76°17'	—	—	—	—	76 17	76 17	76 23	76 22 33
$b : \sigma$	—	—	—	—	—	40 53	40 53	40 52	40 57 48
$b : \xi'$	54 38	—	—	—	—	—	54 38	54 44	54 44 6
$m : q$	—	—	—	—	61°58'	—	61 58	61 47	61 55 17
$m : t$	—	53°28'	—	53°40'	53 24	—	53 31	53 30	53 32 23
$m : \omega$	72 4	—	—	—	—	—	72 4	72 0	72 0 13
$a : q$	—	—	—	—	70 2	—	70 2	69 59	69 52 2
$a : \omega$	—	59 32	59 32	—	—	—	59 32	59 25	59 26 37
$\mu : \omega$	—	52 26	—	—	—	—	52 26	52 27	52 26 22
$q : \omega'$	—	—	—	—	50 28	—	50 28	50 36	50 41 25
$\sigma' : \tau$	—	—	—	—	—	33 41	33 41	33 28	33 43 45

Die sechs Endflächen q , t , ξ , σ , τ , ω wurden unter sich und gegenüber den Flächen a , m , μ der Grundzone durch 14 Winkel festgelegt. Sie sind in Tab. 3 zusammengestellt. Wegen der besonderen Ausbildung der Kristalle erfolgten die Messungen nicht ringsum. Die Winkel sind also nicht durch Mittelung der Ergebnisse an einem Flächenpaar und den dazu „parallelen“ Ebenen gewonnen. Auch wurden sie, von drei Fällen abgesehen, nur je an einem Kristall bestimmt. Die der Ausgleichsrechnung zu Grunde gelegten „Mittelwerte“ dürften somit weniger sicher sein als bei der c -Achsenzone. Wenn übrigens mit einer einzigen Ausnahme für Tab. 3 andere Kristalle zur Verwendung kamen als für Tab. 2 — und ähnliches gilt für die kristallographisch durchgemusterten Kristalle 1 bis 15 —, so erklärt sich das im Wesentlichen aus dem Umstand, dass beim Aufsetzen der Kristalle auf das Goniometer die Anhaftflächen teilweise verunreinigt werden und für optische Untersuchungen nicht mehr in Frage kommen.

Zwischen den Winkeln der Tab. 3 bestehen naturgemäss wiederum gewisse Widersprüche. Aufgabe der Ausgleichsrechnung ist es, Werte zu finden, die den Beobachtungen gegenüber Unter-

schiede mit möglichst kleiner Quadratsumme ergeben. Naheliegender wäre es, die Gleichungen, denen die Verbesserungen zu genügen haben, auf Grund der stereographischen Projektion (Fig. 6) aufzustellen. Leider führt das zu höchst verwickelten trigonometrischen Ausdrücken, die beim Linearformen Anlass zu allerlei Fehlern sind. Dieser Übelstand lässt sich bei Zugrundelegung des gnomonischen Projektionsverfahrens weitgehend vermeiden. Wir legen also im Abstand 1 vom Kristallmittelpunkt eine Ebene senkrecht zur c-Achse. Wo diese aussticht, liege der Anfangspunkt O eines neuen Bezugssystems, dessen x- und y-Achse senkrecht und parallel zum seitlichen

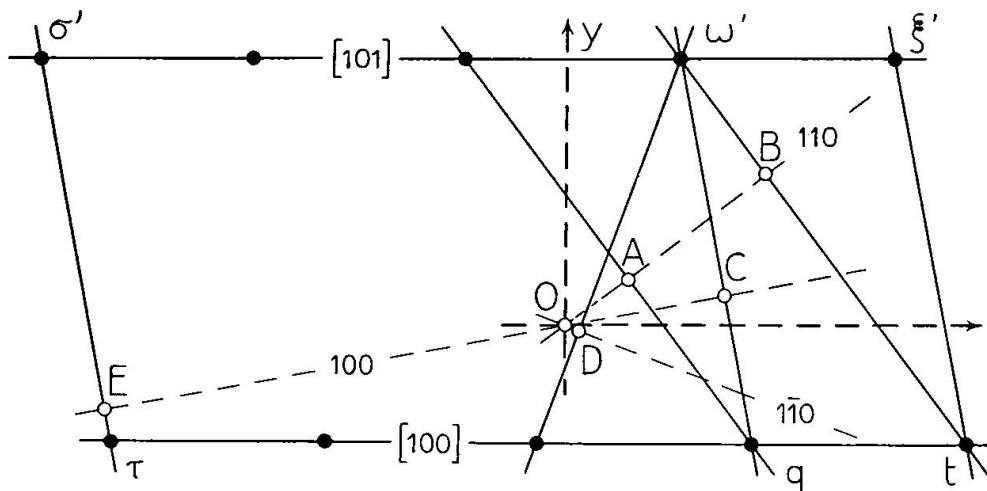


Fig. 2. Gnomonische Projektion der Endflächen des Kupfervitriols mit den Ebenenspiuren (100), (110), ($\bar{1}10$). x- und y-Achse kräftig gestrichelt.

Pinakoid b (010) seien (Fig. 2). Vom Kristallmittelpunkt aus fallen wir die Senkrechten zu allen Endflächen und bringen sie mit der Projektionsebene zum Schnitt. Die Koordinaten x, y eines jeden „Flächenpols“ berechnen wir aus den gemessenen Winkeln und betrachten sie als ausgleichende Beobachtungsgrößen.

Wie in Fig. 2 dargestellt, sind die Zonen [100] und [101] mit den Flächen t, q, τ bzw. ξ' , ω' , σ' zwei zur x-Achse parallele Geraden mit den Gleichungen

$$\begin{aligned}
 y &= -\operatorname{tg}(\beta - 90) = -0,30987 \\
 y &= \operatorname{tg}(90 - \beta') = 0,70891,
 \end{aligned}$$

worin β der stumpfe Winkel der kristallographischen Achsen a und c, β' aber der spitze Winkel der Kanten [001] und [101] ist.

Geeignet ausgewählte Winkel der Messungsreihe führen für die Abszissen von t, q, τ , ξ' , ω' , σ' zu den in Tab. 4 zusammengestellten Werten. Bei der Berechnung ist natürlich zu berücksichtigen, dass

die beiden Tripel tautozonaler Flächennormalen je in einer Ebene liegen, die gegenüber der Projektionsebene geneigt ist.

Tabelle 4

Numerische Lagebestimmung der in Fig. 2 vermerkten Flächenpole

Koord. und Abstände unkorrig.		Korrekturen	Koord. und Abstände korrig.		Koord. und Abstände rückberech.
y_1	-0,30987	z_1	-0,00110	-0,31097	-0,31097
y_2	0,70891	z_2	0,00163	0,71054	0,71054
x_q	0,49338	z_3	0,00015	0,49353	0,49353
x_t	1,06410	z_4	-0,00044	1,06366	1,06366
x_r	-1,21931	z_5	0,00245	-1,21686	-1,21684
$x_{\omega'}$	0,29920	z_6	-0,00186	0,29734	0,29732
$x_{\xi'}$	0,87006	z_7	-0,00259	0,86747	0,86743
$x_{\sigma'}$	-1,41593	z_8	0,00288	-1,41305	-1,41301
Aq	0,54391	z_9	0,00101	0,54492	0,54491
Bt	0,88802	z_{10}	-0,00096	0,88706	0,88704
$\omega'B$	0,38863	z_{11}	0,00132	0,38995	0,38999
qC	0,39493	z_{12}	0,00355	0,39848	0,39847
$C\omega'$	0,63946	z_{13}	0,00225	0,64171	0,64171
$\omega'q$	1,03595	z_{14}	0,00423	1,04018	1,04023
$\omega'D$	0,76972	z_{15}	-0,00027	0,76945	0,76948
$\tau\sigma$	1,03874	z_{16}	0,00144	1,04018	1,04007

Die gefundenen x -Werte und Abstände sind nicht nur ungenau, sondern sogar mit gewissen Widersprüchen behaftet. Sie wären durch andere Zahlen zu ersetzen, wenn unter den gemessenen Winkeln eine andere Auswahl getroffen würde. Um Werte zu finden, die sich den Beobachtungen möglichst anpassen, werden die x und y mit Korrekturen z_i versehen (Tab. 4). Die beiden vorstehenden Gleichungen nehmen so die Gestalt an:

$$\text{I. } y_1 = -0,30987 + z_1$$

$$\text{II. } y_2 = 0,70891 + z_2$$

Da zufolge der Eigentümlichkeit der gnomonischen Projektion die Bedingungen

$$\omega'\sigma' = 3\xi'\omega' \quad q\tau = 3tq \quad \omega'\xi' = qt$$

bestehen (Fig. 2), so ergeben sich mit Berücksichtigung der Abszissenwerte der Tab. 4 die Fehlergleichungen:

$$\text{III. } -4z_6 + 3z_7 + z_8 = 0,002550$$

$$\text{IV. } -4z_3 + 3z_4 + z_5 = 0,000531$$

$$\text{V. } z_3 - z_4 - z_6 + z_7 = -0,000141$$

Die Zonengeraden $q\omega'$ und $t\omega'$ stehen auf den Schnittlinien der Projektionsebene mit den Flächen $a(100)$ bzw. $m(110)$ senkrecht. Somit ist

$$\frac{y_2 - y_1}{x_{\omega'} - x_q} = \operatorname{tg}(180 - ab) \quad \frac{y_2 - y_1}{x_{\omega'} - x_t} = \operatorname{tg}(180 - bm),$$

worin $a:b$ den bereits ausgeglichenen Winkel $a:b$ und $b:m$ den ebenfalls feststehenden Winkel $b:m$ bedeutet. Werden in diesen Formeln die entsprechenden Werte aus Tab. 4 eingesetzt, so folgen die Fehlergleichungen

$$\text{VI. } -z_1 + z_2 - 5,20673 z_3 + 5,20673 z_6 = -0,007753$$

$$\text{VII. } -z_1 + z_2 - 1,33301 z_4 + 1,33301 z_6 = 0,000830.$$

Die durch den Ursprung verlegte m -Fläche schneidet die Projektionsebene in der Geraden

$$x \cos(bm) - y \sin(bm) = 0.$$

Aus dieser Gleichung werden durch Einsetzen der Koordinaten von q , t , ω' und ihren Korrekturen die Abstände A_q , B_t und $B_{\omega'}$ gefunden. Diese Abstände lassen sich auch aus den gemessenen Winkeln $m:q$, $m:t$ und $m:\omega'$ berechnen (Tab. 4). Das führt auf drei weitere Fehlergleichungen

$$\text{VIII. } 0,79992 z_1 - 0,60010 z_3 + z_9 = 0,000037$$

$$\text{IX. } 0,79992 z_1 - 0,60010 z_4 + z_{10} = -0,001580$$

$$\text{X. } 0,79992 z_2 - 0,60010 z_6 - z_{11} = 0,001103.$$

Unter gleichen Voraussetzungen wie soeben kommt für $a(100)$ die Gleichung

$$x \cos(ab) - y \sin(ab) = 0.$$

Sie liefert mit Berücksichtigung der Winkel $a:q$ und $a':\omega'$ für C_q und $C_{\omega'}$ die Fehlergleichungen

$$\text{XI. } 0,98205 z_1 - 0,18861 z_3 + z_{12} = 0,002438$$

$$\text{XII. } 0,98205 z_2 - 0,18861 z_6 - z_{13} = -0,000298.$$

Es wurden auch die Winkel $q\omega'$ und $\tau\sigma'$ gemessen, welche die beiden charakteristischen Zonen der Endbegrenzung miteinander verknüpfen. Aus den Beziehungen (Fig. 2)

$$qC + C_{\omega'} = q\omega' \quad \text{und} \quad \tau E + E_{\sigma'} = \tau\sigma'$$

werden zwei neue Fehlergleichungen gewonnen

$$\text{XIII. } z_{12} + z_{13} - z_{14} = 0,001566$$

$$\text{XIV. } -0,98205 z_1 + 0,98205 z_2 + 0,18861 z_5 - 0,18861 z_8 - z_{16} = 0,001158.$$

Schliesslich wurde noch $\mu' \omega'$ gemessen. Wird der Ebene μ' ($\bar{1}10$) die Gleichung

$$x \cos(b \mu') + y \sin(b \mu') = 0$$

zugeordnet, so ergibt sich für den Abstand $\omega' D$ eine letzte Fehlergleichung:

$$\text{XV. } 0,93904 z_2 + 0,34379 z_6 - z_{15} = 0,001157$$

Die 13 Bedingungsgleichungen III—XV lassen sich auf eine für die Rechnung bequemere Form bringen, indem man 13 Unbekannte durch die 3 verbleibenden — gewählt wurde z_1, z_3, z_6 — ausdrückt. Statt das an 13 Nebenbedingungen geknüpfte Minimum von $\sum z_i^2$ ($i = 1, \dots, 15$) zu suchen, ist nurmehr der kleinste Wert einer Funktion zu finden, die zur Erzielung gleichartiger Koeffizienten in der Form

$$\begin{aligned} F(z'_1, z'_3, z'_6) \equiv & 6,73025 z_1'^2 + 3,16889 z_3'^2 + 3,41368 z_6'^2 \\ & + 3,12218 z'_1 z'_3 - 6,50988 z'_3 z'_6 - 3,41972 z'_6 z'_1 \\ & - 5,35328 z'_1 - 12,72731 z'_3 + 13,31097 z'_6 \\ & + 13,74951 = \text{Min.} \end{aligned}$$

geschrieben werden kann. Darin ist $z_1' = z_1 \cdot 10^2$, $z_3' = z_3 \cdot 10^3$ und $z_6' = z_6 \cdot 10^3$. Mit den hierdurch bestimmten Werten berechnen sich alle z_i ($i = 1, \dots, 15$) und schliesslich auch y_1 und y_2 . Die Korrekturen z_i und die verbesserten x -Werte usw. sind in Tab. 4 zusammengestellt.

Nun wird aus y_1 direkt der Winkel β gefunden. Die korrigierten Lagen von t und q (Fig. 2) ergeben die Winkel $b t$ und $b q$. Hieraus liefert der Gauss'sche Satz sofort $b c$. Im sphärischen Dreieck $a b c$ (Fig. 6) sind demnach die Seiten $b a$ und $b c$, sowie der Aussenwinkel β bei b bekannt. Nach geläufiger Formel errechnen sich die Aussenwinkel α und γ bei a und c . Aus diesen kommen mit Hilfe der Dreiecke $a b q$ und $b c m$ die Winkel ϵ und η . Das Achsenverhältnis ermittelt sich hernach in üblicher Weise. Es wurde erhalten

$$\underline{a : b : c = 0,56890 : 1 : 0,55494}$$

$$\underline{\alpha = 82^\circ 22' 31''} \quad \underline{\beta = 107^\circ 16' 27''} \quad \underline{\gamma = 102^\circ 35' 11''}$$

Der Unterschied gegenüber den BARKER'schen Werten

$$a : b : c = 0,5721 : 1 : 0,5554$$

$$\alpha = 82^\circ 5' \quad \beta = 107^\circ 8' \quad \gamma = 102^\circ 41'$$

ist also nicht beträchtlich. Die Neuberechnung stützt sich auf die fünf Winkel $\beta, b t, b q, b m, b a$. Dass eine andere Winkelauswahl

— im Gegensatz zur üblichen Kristallberechnung — im wesentlichen zum gleichen Achsenverhältnis geführt hätte, ergibt sich aus der glänzenden Übereinstimmung zwischen den ausgeglichenen und den aus dem gefundenen Achsenverhältnis zurückberechneten Winkeln und übrigen Grössen (Tab. 2 und 4).

II. Optischer Teil

a) INSTRUMENT, MESSUNG, MESSERGEBNISSE

Die Messungen wurden mit einem Fuess'schen Goniometer, Modell II (Websky'scher Spalt, Ramsden'sches Okular mit $3^{\circ}45'$ Sehfeldgrösse) durchgeführt. Als Lichtquelle diente eine Heliumgasentladungsröhre. Eingestellt wurde auf die Linien 5876 (gelb), 5016 (grün) und 4471 Å (violett). Wenn infolge geringer Doppelbrechung sich die beiden Spektren teilweise überlagerten, wurden die zusammenfallenden Linien durch ein zwischen Auge und Fernrohr gehaltenes Nicol'sches Prisma voneinander getrennt.

Die Winkelablesung wurde an beiden Nonien (I und II) auf $\frac{1}{4}'$ genau vorgenommen. Dabei zeigte es sich, dass je nach wechselseitiger Stellung des Limbus und der Nonien die Stelle II gegenüber I einen Unterschied von $180^{\circ} - 4\frac{1}{4}'$ bis $180^{\circ} + 1\frac{1}{4}'$ aufwies. Die Messungen selber wurden anfänglich in drei verschiedenen Limbusstellungen ausgeführt; von Journal-Nr. 17 ab wurde indessen hievon Umgang genommen, weil der feststellbare Einfluss auf die q^2 -Werte (q = Lichtgeschwindigkeit) zu unbedeutend war, um den erforderlichen Zeitaufwand zu rechtfertigen.

Tabelle 5

Abhängigkeit der Winkelmessung von der Auffallsrichtung des Lichtes

Krist. Nr.	28	29	31	28	36
Flächenpaar	m : b	m : b	m : b	b : ω	b : q
Auffallsw.	30°31'	32°59'	30°34'	12°30'	11°54'
Prismenw.	53 19	53 3 $\frac{3}{8}$	53 12 $\frac{1}{24}$	76 17 $\frac{1}{3}$	64 47 $\frac{1}{12}$
Auffallsw.	46 27	43 3	43 8	43 54	44 49
Prismenw.	53 18 $\frac{5}{8}$	53 3 $\frac{13}{24}$	53 11 $\frac{2}{3}$	76 17 $\frac{1}{8}$	64 47 $\frac{1}{24}$
Auffallsw.	77 24	66 17	62 51	68 58	77 17
Prismenw.	53 18 $\frac{7}{24}$	53 4	53 11 $\frac{7}{12}$	76 17 $\frac{1}{3}$	64 46 $\frac{1}{8}$
Mittelwert	53°18' $\frac{17}{24}$	53° 3 $\frac{23}{36}$	53°11' $\frac{55}{72}$	76°17' $\frac{19}{72}$	64°46' $\frac{55}{72}$

Für den Prismenwinkel fanden sich nicht gänzlich übereinstimmende Werte, falls der Lichteinfall variiert wurde, d. h. Kollimator und Fernrohr in verschiedene gegenseitige Stellungen gebracht wur-

den. Die Prismenwinkel wurden daher bei kleinem, mittlerem und grossem Lichtauffallswinkel gemessen und als Mittel der so erhaltenen Grössen berechnet. Tab. 5 gibt einige Beispiele. Die Zu- und Abnahme des Prismenwinkels ändert sich mit der Grösse des Auffallswinkels nicht einsinnig. Die grösste beobachtete Schwankung beträgt $11\frac{1}{2}$ Minuten. Dabei ist zu beachten, dass sämtliche Einzelwerte bereits die Mittel je dreier, wohl selten mehr als $\pm \frac{1}{2}'$ voneinander abweichender Messungen sind. Die kleinen Schwankungen des Prismenwinkels sind nicht bloss durch Konstruktionsmängel des Instrumentes bedingt, sondern dürften — wie schon im kristallographischen Teil angedeutet wurde — aus der Flächenbeschaffenheit der benutzten Kristalle zu erklären sein.

Tabelle 6

Orientierung der für die optische Untersuchung benutzten Prismen und Zahl der verschiedenen Einfallsrichtungen

Flächen-Paar	Brech. Kante	Kristallnummer											
		14	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
a : m	001		9	9		2							
a : μ	001					5							
b : m	001				7	5	2	2					
b : λ	001				1								
b : μ	001				3	2							
m : μ	001	3	2	2									
m : q	$1\bar{1}1$											3	
m : t	$1\bar{1}2$										3		
b : q	100												6
b : ξ	101				2								
b : ω	101				3								
μ : ω	110								5				
a : ω	$01\bar{1}$								4	4			

Das optische Verhalten des Kupfervitriols wurde an zwölf verschiedenen Kristallen geprüft. Zur Untersuchung gelangten insgesamt 22 Prismen. Ihre brechenden Kanten gehören 7 Richtungen an; die begrenzenden Ebenen entsprechen 13 natürlichen Flächenpaaren. Die Einzelheiten sind aus Tab. 6 ersichtlich. Darin geben die vermerkten Zahlen an, für wieviele verschiedene Einfallsrichtungen die Ablenkungen gemessen wurden. Die Addition ergibt, dass für jede der drei Wellenlängen die Lichtgeschwindigkeiten in je 85 Richtungspaaren bestimmt wurden. Über welche Bereiche sie sich verteilen, erhellt aus den fetten Kreislinienzügen der Fig. 6.

Tabelle 8. Endmittel der Prismen-, Eintritts- und Ablenkungswinkel.

L.	J.	K.	E: A	Prisma	Eintritt	Gelb	Grün	Violett
0	45	29	b: μ	69°50' 10 "	49°52' 50 "	57°37' 45 "	59°19' 32,5 "	61° 9' 55 "
1	44	29	b: μ	69 50 10	52 23 15	54 37 2,5 58 42 40	55 45 57,5 60 21 40	56 54 15 62 8 0
2	36	28	b: μ	69 49 2,5	55 9 43,8	52 48 15 56 6 47,5	53 43 7,5 57 16 47,5	54 36 50 58 26 0
3	39	28	b: λ	47 8 15	57 55 12,5	31 26 25 32 27 15	31 44 42,5 32 46 40	31 59 20 33 4 0
4	43	29	b: μ	69 50 10	59 50 43,8	51 45 27,5 54 30 10	52 31 32,5 55 25 12,5	53 14 40 56 17 30
5	38	28	b: μ	69 49 2,5	66 31 21,3	52 21 37,5 54 48 57,5	53 0 57,5 55 34 5	53 37 40 56 17 30
6	37	28	b: μ	69 49 2,5	76 55 36,3	56 47 50 59 7 15	57 22 57,5 59 47 55	57 55 45 60 24 10
7	40	29	a: μ	31 3 15	47 18 28,8	19 18 50 20 18 12,5	19 30 0 20 29 57,5	19 39 27,5 20 40 45
8	46	29	a: μ	31 3 2,5	40 29 11,3	18 2 47,5 19 0 20	18 12 22,5 19 10 40	18 22 15 19 22 10
9	41	29	a: μ	31 3 0	33 31 40	17 12 0 18 9 27,5	17 22 0 18 20 37,5	17 32 22,5 18 31 0
10	47	29	a: μ	31 3 2,5	24 30 48,8	16 47 20 17 45 22,5	16 57 35 17 56 37,5	17 7 17,5 18 7 42,5
11	6	26	m: μ	57 10 19,2	83 6 31,7	50 57 34,1 52 58 43,3	51 19 46,7 53 23 13,3	51 40 54,6 53 46 25
12	7	26	m: μ	57 10 19,2	80 59 55	49 15 33,3 51 16 28,3	49 37 52,5 51 41 25,8	49 58 43,3 52 4 29,2
13	26	14	m: μ	57 9 17,5	78 42 57,5	47 30 40 49 31 40	47 53 5 49 56 55	48 12 55 50 19 5
14	22	27	m: μ	57 16 7,5	76 1 47,5	45 40 25 47 41 52,5	46 3 12,5 48 7 22,5	46 25 5 48 29 42,5
15	42	29	a: μ	31 3 0	17 50 32,5	16 59 17,5 17 58 52,5	17 9 35 18 10 20	17 20 25 18 22 30
16	3	26	m: a	26 9 56,7	67 42 31,3	23 59 12,5 24 55 27,5	24 9 34,2 25 6 58,3	24 19 20,8 25 17 41,7
17	17	27	m: a	26 2 16,7	67 45 58,8	23 58 35 24 54 10	24 8 2,5 25 5 15	24 18 17,5 25 15 15
18	18	27	m: a	26 2 16,7	54 32 32,5	18 40 10 19 29 22,5	18 49 47,5 19 39 52,5	18 59 42,5 19 50 40
19	21	27	m: μ	57 13 25	52 21 0	36 16 30 38 19 57,5	36 40 10 38 47 17,5	37 1 15 39 10 42,5
20	28	14	m: μ	57 9 17,5	47 30 31,3	35 51 5 37 58 12,5	36 15 57,5 38 26 35	36 39 5 38 52 57,5
21	5	26	a: m	26 9 42,5	0 0 0	15 48 35,8 16 41 31,7	15 59 31,7 16 53 49,2	16 10 55,8 17 5 44,2
22	13	27	a: m	26 2 16,7	0 0 0	15 42 44,2 16 35 3,3	15 53 6,7 16 46 41,7	16 2 48,3 16 57 30
23	27	14	m: μ	57 9 17,5	34 31 41,3	38 30 52,5 41 15 40	39 5 52,5 41 57 7,5	39 39 22,5 42 37 12,5
24	54	29	m: a	26 5 12,5	32 0 5	14 32 22,5 15 11 7,5	14 41 5 15 20 35	14 48 52,5 15 29 10
25	15	27	m: a	26 2 16,7	30 53 58,7	14 24 50,8 15 3 25	14 33 50,8 15 13 9,2	14 43 10,8 15 22 36,7
26	1	26	m: a	26 10 29,2	29 34 27,5	14 22 26,7 15 0 47,5	14 30 40,8 15 9 40	14 39 0,8 15 18 47,5
27	14	27	m: a	26 2 16,7	25 4 58,3	14 6 5 14 42 36,7	14 15 11,7 14 52 20	14 24 49,2 15 2 10
28	10	26	m: a	26 10 10,8	19 59 56,2	14 6 0,8 14 41 51,7	14 15 0,8 14 51 10	14 23 38,3 15 0 5,8

L.	J.	K.	E: A	Prisma	Eintritt	Gelb	Grün	Violett
29	53	29	m: a	26° 5' 12,5"	15° 57' 25 "	14° 8' 55 "	14° 17' 57,5"	14° 27' 10 "
30	19	27	m: a	26 2 16,7	12 22 12,5	14 43 35 14 19 20	14 53 17,5 14 29 0	15 2 32,5 14 39 0
31	11	26	m: a	26 10 10,8	11 42 20,8	14 53 2,5 14 27 8,3 15 0 54,2	15 3 10 14 36 23,3 15 10 48,3	15 13 30 14 45 40 15 21 1,7
32	2	26	m: a	26 10 1,7	0 0 0	16 7 43,3 16 40 32,5	16 18 56,6 16 52 27,5	16 28 52,1 17 3 44,2
33	12	27	m: a	26 2 16,7	0 0 0	16 0 52,5 16 33 1,7	16 12 45 16 45 41,7	16 25 13,3 16 58 22,5
34	16	27	m: a	26 2 16,7	0 0 0	16 0 46,7 16 33 20	16 13 1,7 16 46 0	16 24 45 16 58 9,2
35	20	27	m: a	26 2 16,7	-14 9 28,7	21 45 30 22 25 0	22 5 47,5 22 46 2,5	22 22 50 23 4 22,5
36	4	26	m: a	26 9 45	-15 45 44,6	23 17 25 24 0 2,5	23 37 33,3 24 22 19,2	23 58 30,8 24 43 48,3
37	8	26	m: a	26 9 50,8	-17 59 37,9	25 38 34,2 26 28 55,8	26 3 20,8 26 55 22,5	26 26 39,2 27 19 40,8
38	9	26	a: m	26 8 43,3	78 41 41,7	31 21 46,7 31 43 20	31 33 35 31 55 35	31 44 5 32 6 27,5
39	30	28	m: b	53 19 3,8	31 2 13,8	35 55 27,5 36 40 52,5	36 25 7,5 37 13 0	36 55 35 37 43 35
40	55	30	m: b	53 16 31,7	32 19 10	35 27 2,5 36 9 0	35 57 42,5 36 40 55	36 26 20 37 10 40
41	48	29	m: b	53 3 38,3	35 1 10	34 24 52,5 34 59 57,5	34 53 15 35 29 35	35 20 0 35 56 35
42	34	28	b: m	53 18 57,5	48 58 32,5	34 2 0 34 29 22,5	34 26 12,5 34 54 5	34 48 40 35 16 12,5
43	59	31	m: b	53 11 45,8	40 27 2,5	33 46 12,5 34 14 45	34 12 22,5 34 41 2,5	34 36 5 37 10
44	49	29	m: b	53 3 38,3	43 0 5	33 34 22,5 33 59 47,5	33 59 5 34 25 17,5	34 22 35 34 48 47,5
45	29	28	m: b	53 19 3,8	45 20 41,3	33 49 12,5 34 13 2,5	34 12 10 34 37 7,5	34 34 37,5 34 59 42,5
46	33	28	b: m	53 19 18,8	38 54 13,8	34 4 32,5 34 29 45	34 30 52,5 34 56 32,5	34 56 42,5 35 22 7,5
47	50	29	m: b	53 3 38,3	50 59 32,5	34 16 10 34 36 50	34 39 30 35 0 17,5	35 0 25 35 22 30
48	35	28	b: m	53 18 57,5	33 2 20	35 26 47,5 35 52 15	35 57 30 36 24 30	36 26 7,5 36 53 37,5
49	56	30	m: b	53 16 31,7	56 44 40	35 41 52,5 36 0 57,5	36 4 7,5 36 23 50	36 25 25 36 45 32,5
50	60	31	m: b	53 11 45,8	57 59 16,3	36 1 25 36 20 2,5	36 24 17,5 36 43 12,5	36 45 12,5 37 4 12,5
51	52	29	m: b	53 3 38,3	62 29 0	37 28 47,5 37 46 45	37 50 45 38 9 40	38 11 2,5 38 30 35
52	32	28	b: m	53 19 18,8	26 59 38,8	38 42 45 39 14 27,5	39 23 17,5 39 57 27,5	39 58 5 40 35 22,5
53	51	29	m: b	53 3 38,3	71 48 22,5	42 0 10 42 17 50	42 22 20 42 41 0	42 42 30 43 2 0
54	31	28	m: b	53 18 5	76 58 2,5	45 28 30 45 47 2,5	45 50 22,5 46 10 2,5	46 10 15 46 30 25
55	83	35	q: m	61°58' 19,2"	65°50' 55 "	44°47' 7,5"	45°16' 7,5"	45°40' 47,5"
56	85	35	m: q	61 58 19,2	51 28 7,5	45 59 5 41 54 42,5 43 16 57,5	46 30 22,5 42 27 15 43 52 45	46 58 25 42 57 25 44 25 22,5

L.	J.	K.	E: A	Prisma	Eintritt	Gelb	Grün	Violett
57	82	35	q: m	61°58' 19,2"	48°24' 40 "	42° 6' 50 "	42°42' 2,5"	43°14' 45 "
58	84	35	m: q	61 58 19,2	72 48 33,8	43 32 22,5 48 1 25 49 6 15	44 11 7,5 48 29 25 49 36 2,5	44 46 35 48 53 27,5 50 2 37,5
59	81	34	t: m	53°40' 7,5"	57° 0' 58,8"	35°42' 32,5"	36° 4' 50 "	36°24' 35 "
60	80	34	m: t	53 40 7,5	43 0 5	36 30 25 33 53 17,5 34 42 40	36 53 32,5 34 17 12,5 35 8 12,5	37 15 32,5 34 40 55 35 32 25
61	79	34	m: t	53 40 7,5	46 57 55	34 2 5 34 47 22,5	34 25 35 35 12 15	34 46 22,5 35 35 52,5
62	87	36	b: q	64°46' 45,8"	44° 8' 53,8"	49°54' 52,5"	50°56' 25 "	51°56' 10 "
63	90	36	b: q	64 46 45,8	64 10 41,3	50 53 12,5 47 26 15 47 55 5	51 59 22,5 47 59 10 48 28 47,5	53 4 57,5 48 30 0 49 0 45
64	86	36	b: q	64 46 45,8	54 27 28,8	46 5 27,5 46 35 37,5	46 43 25 47 15 7,5	47 18 52,5 47 52 22,5
65	91	36	q: b	64 46 45,8	50 50 15	46 31 7,5 47 1 35	47 13 15 47 45 2,5	47 52 55 48 26 22,5
66	89	36	q: b	64 46 45,8	45 50 20	48 31 0 49 7 10	49 23 55 50 2 30	50 14 35 50 55 52,5
67	88	36	b: q	64 46 45,8	77 33 31,3	53 50 30 54 11 5	54 20 40 54 41 55	54 48 47,5 55 11 5
68	78	28	b: ξ	54°37' 47,5"	47°36' 36,3"	34°53' 22,5"	35°17' 45 "	35°38' 40 "
69	77	28	b: ξ	54 37 47,5	54 6 50	35 34 57,5 35 46 7,5 36 24 27,5	36 0 25 36 8 22,5 36 48 7,5	36 23 32,5 36 29 37,5 37 10 55
70	75	28	ω : b	76 17 15,8	77 13 56,3	67 11 0 69 6 22,5	68 10 52,5 70 14 42,5	69 8 0 71 20 22,5
71	74	28	ω : b	76 17 15,8	68 53 50	65 48 20 68 37 22,5	67 11 12,5 70 23 52,5	68 34 52,5 72 17 22,5
72	76	28	b: ω	76 17 15,8	81 13 26,3	69 7 30 71 1 50	70 4 45 72 5 25	70 59 17,5 73 6 22,5
73	69	32	ω : μ	52°25' 52,5"	73° 4' 15 "	41° 0' 40 "	41°20' 37,5"	41°39' 7,5"
74	65	32	μ : ω	52 25 52,5	27 16 40	42 42 22,5 34 46 25 37 25 27,5	43 4 37,5 35 17 35 38 2 32,5	43 24 52,5 35 45 52,5 38 37 7,5
75	68	32	ω : μ	52 25 52,5	41 53 45	31 38 32,5 33 23 2,5	32 0 45 33 48 2,5	32 19 30 34 10 42,5
76	67	32	μ : ω	52 25 52,5	49 59 58,8	32 18 35 33 54 52,5	32 39 42,5 34 18 5	32 58 5 34 39 42,5
77	66	32	μ : ω	52 25 52,5	70 27 36,3	39 34 55 41 2 37,5	39 54 35 41 24 42,5	40 12 32,5 41 44 25
78	61	32	ω : a	59°31' 58,3"	74°33' 53,8"	46°14' 15 "	46°38' 40 "	47° 0' 57,5"
79	72	33	ω : a	59 32 10	63 58 17,5	48 15 2,5 40 57 30 43 0 50	48 42 0 41 22 0 43 28 17,5	49 6 2,5 41 44 25 43 53 5
80	64	32	a: ω	59 31 58,3	43 31 2,5	38 22 40 40 59 50	38 54 27,5 40 59 50	39 24 12,5 42 10 52,5
81	70	33	a: ω	59 32 10	50 25 33,8	38 0 17,5 40 16 37,5	38 27 7,5 40 46 25	38 52 15 41 14 35
82	62	32	ω : a	59 31 58,3	42 14 17,5	38 37 32,5 41 16 42,5	39 10 12,5 41 54 22,5	39 39 32,5 42 29 0
83	73	33	a: ω	59 32 10	59 2 52,5	39 23 37,5 41 27 7,5	39 47 35 41 54 35	40 10 42,5 42 20 42,5
84	63	32	a: ω	59 31 58,3	61 31 37,5	40 3 40 42 5 7,5	40 59 52,5 42 34 15	40 53 10 42 59 37,5
85	71	33	a: ω	59 32 10	77 35 56,3	48 14 52,5 50 9 25	48 39 2,5 50 37 10	48 59 35 50 59 37,5

Leere Seite
Blank page
Page vide

Tabelle 7

Einfalls- und Ablenkungsmessungen an den Nonien I und II, sowie Differenzbildung w , δ

		1. Messung	2. Mess.	3. Mess.	Teilmittel	Gesamtmittel	w und δ
Reflekt.	I	228° 11 $\frac{1}{4}'$	10 $\frac{3}{4}'$	10 $\frac{1}{2}'$	228° 10 $\frac{8}{12}'$		
	II	48 8	7 $\frac{1}{2}$	6 $\frac{3}{4}$	48 7 $\frac{5}{12}$	228° 9 $\frac{1}{24}'$	
Direkt	I	327 16	16	16	327 16		
	II	147 13 $\frac{3}{4}$	14	14	147 13 $\frac{11}{12}$	327 14 $\frac{23}{24}$	<u>99° 5 $\frac{22}{24}'$</u>
Gelb	I	361 1 $\frac{3}{4}$	1 $\frac{3}{4}$	2 $\frac{1}{4}$	361 1 $\frac{11}{12}$		
	II	181 0 $\frac{1}{4}$	0	1	181 0 $\frac{5}{12}$	361 1 $\frac{4}{24}$	33 46 $\frac{5}{24}$
Grün	I	361 27 $\frac{3}{4}$	27 $\frac{1}{2}$	28 $\frac{1}{2}$	361 27 $\frac{11}{12}$		
	II	181 26 $\frac{1}{2}$	26 $\frac{1}{4}$	27 $\frac{1}{2}$	181 26 $\frac{9}{12}$	361 27 $\frac{8}{24}$	34 12 $\frac{9}{24}$
Violett	I	361 52	50 $\frac{1}{2}$	52 $\frac{1}{2}$	361 51 $\frac{8}{12}$		
	II	181 50 $\frac{3}{4}$	49	51 $\frac{1}{2}$	181 50 $\frac{5}{12}$	361 51 $\frac{1}{24}$	34 36 $\frac{2}{24}$
Gelb	I	361 30	30 $\frac{1}{4}$	30 $\frac{3}{4}$	361 30 $\frac{4}{12}$		
	II	181 29	29	29 $\frac{1}{4}$	181 29 $\frac{1}{12}$	361 29 $\frac{17}{24}$	34 14 $\frac{18}{24}$
Grün	I	361 56 $\frac{1}{2}$	55 $\frac{1}{2}$	57 $\frac{3}{4}$	361 56 $\frac{7}{12}$		
	II	181 55	54 $\frac{1}{2}$	56 $\frac{3}{4}$	181 55 $\frac{5}{12}$	361 56	34 41 $\frac{1}{24}$
Violett	I	362 23	23 $\frac{1}{2}$	22	362 22 $\frac{10}{12}$		
	II	182 21 $\frac{1}{2}$	22	20 $\frac{3}{4}$	182 21 $\frac{5}{12}$	362 22 $\frac{3}{24}$	35 7 $\frac{4}{24}$

Im allgemeinen wurde der Lichtdurchgang in verschiedenen Stellungen des Prismas gemessen. Eintritts- und Austrittsflächen wurden öfters vertauscht (Tab. 8). Stets wurde in folgender Reihe vorgegangen: reflektiert \rightarrow direkt \rightarrow gelb, grün, violett I \rightarrow gelb, grün, violett II, dann zurück und schliesslich nochmals im ersten Sinn. Es liessen sich in der Weise Mittelwerte aus jeweils drei Messungen finden. Tab. 7 bietet ein Beispiel für die Durchführung dieser Messungen (Journ.-Nr. 59). Wie ersichtlich, weichen die Einzelmessungen maximal $1\frac{1}{2}'$ voneinander ab. Die letzte Kolonne enthält als Differenzen den Winkel w (zwischen reflektiert und direkt) sowie die Ablenkung δ für die sechs Linien. Aus w berechnet sich nach der selbstverständlichen Formel $(180 - w) : 2$ der Einfallswinkel i_1 .

Die so bestimmten Endmittel aller i_1 - und δ -Werte sämtlicher Messungsreihen sind in Tab. 8 zusammengestellt. Ausser der laufenden Nummer (L) enthält sie auch die Journal- (J) und Kristallnummer (K) und lässt erkennen, welche Flächen zu Ein- und Austrittsebenen (E und A) gewählt wurden. Ob es sich dabei im Einzelfall um eine vordere oder hintere Fläche gehandelt habe, konnte Raumes halber nicht näher vermerkt werden, ist aber wegen der Zentrosymmetrie des Vorganges belanglos. Dass jedes optische Prisma von einer vorderen und einer hinteren Fläche gebildet war, ist eine Selbstverständlichkeit. Zu jedem Einfallswinkel gehören drei

Ablenkungswinkel des einen und drei des anderen Spektrums. Einzig an Kristall Nr. 29 war bei der Messung L. 0 nur das weniger abgelenkte Spektrum zu sehen.

In Tab. 8 sind die Werte, die zu bestimmten Zonen gehören, durch feine Linien voneinander geschieden. Es entsprechen

L.	0—54	der Zone	[001]
	55—58		[1 $\bar{1}$ 1]
	59—61		[1 $\bar{1}$ 2]
	62—67		[100]
	68—72		[10 $\bar{1}$]
	73—77		[110]
	78—85		[01 $\bar{1}$]

Zum Einfallswinkel i_1 findet sich der Austrittswinkel i_2 nach der bekannten Beziehung $i_2 = \gamma + \delta - i_1$. Da überdies $r_2 = \gamma - r_1$ ist, liefert das Brechungsgesetz

$$q = \frac{\sin r_1}{\sin i_1} = \frac{\sin r_2}{\sin i_2}$$

für r_1 die Beziehung

$$\operatorname{tg} r_1 = \frac{\sin i_1 \sin \gamma}{\sin i_2 + \sin i_1 \cos \gamma} = \frac{Z}{N}$$

Diese Formel wurde mit Hilfe siebenstelliger Logarithmen ausgewertet; es sollte dadurch verhütet werden, dass sich durch die Rechnung Fehler einschleichen, die u. U. grösser sind als jene, die sich aus den Messungen als unvermeidlich ergeben. Die Produkte $\sin i_1 \sin \gamma$ und $\sin i_1 \cos \gamma$ sind für alle sechs Linien einer Messungsreihe konstant und wurden für sich berechnet. Wie sich die übrigen Rechnungen tabellarisch durchführen lassen, ist aus Tab. 9 ersichtlich, wo die Daten der Tabelle 7 ausgewertet sind. $\log q$ ergibt sich zweifach. Die beiden Grössen weichen um kaum mehr als fünf Einheiten der letzten Dezimale voneinander ab und erlauben dadurch eine angenehme Kontrolle. Für den endgültigen Wert q^2 wurde vom arithmetischen Mittel ausgegangen. Von $\log q$ und $\log q^2$ ist überall in Tab. 9 die Grösse 1 abzuziehen.

Alle auf diese Weise errechneten q^2 -Werte sind in Tab. 10 zusammengestellt. Der Index 1 ist immer der rascheren, also schwächer abgelenkten Welle zugeordnet. Durch den Winkel χ ist die Fortpflanzungsrichtung gegeben. Für Wellen, deren Ebenen parallel zur c-Achse sind (L. 0—54), wird χ von (110) aus über (010) hin positiv gemessen und ergibt sich sowohl aus r_1 wie aus r_2 unter Berücksichtigung

Tabelle 10. Richtungen und Geschwindigkeitsquadrate der Wellennormalen.

Nr.	Gelb				Grün				Grün				Violett				Nr.
	λ_1	q_1^2	λ_2	q_2^2	λ_1	q_1^2	λ_2	q_2^2	λ_1	q_1^2	λ_2	q_2^2	λ_1	q_1^2	λ_2	q_2^2	
0	-96°52' 16"	4291275	—	—	-96°59' 22"	4260847	—	—	-97° 5' 52"	4232717	—	—	0				
1	-95°39' 49"	4293640	-96° 3' 53"	4194973	-95°47' 14"	4263140	-96°11' 45"	4162912	-95°54' 5"	4235103	-96°19' 3"	4133232	1				
2	-94° 7 50	97792	-94 34 6	95232	-94 15 33	67564	-94 42 17	63460	-94 22 46	39382	-94 49 50	34220	2				
3	-92 55 26	4301418	-93 23 17	97449	-93 3 54	69736	-93 32 0	65094	-93 10 37	44665	-93 39 42	36540	3				
4	-92 23 11	01131	-92 52 20	95584	-92 31 42	70255	-93 1 18	63228	-92 39 24	42318	-93 9 28	33799	4				
5	-89 40 30	06720	-90 13 57	95891	-89 49 44	76070	-90 23 35	64079	-89 58 9	48169	-90 32 35	34388	5				
6	-86 54 56	12499	-87 33 48	95615	-87 5 1	82148	-87 44 34	63299	-87 14 15	54367	-87 53 58	35151	6				
7	-55 7 3	60009	-54 30 56	96067	-55 0 9	4328534	-54 23 57	64661	-54 54 20	4302093	-54 17 35	36070	7				
8	-51 27 43	57642	-50 57 8	95497	-51 22 32	29995	-50 51 47	67214	-51 17 14	01780	-50 45 52	36163	8				
9	-47 28 23	59967	-47 2 59	96807	-47 23 53	30880	-46 58 11	66193	-47 19 16	01008	-46 53 45	38058	9				
10	-41 58 50	58329	-41 40 34	97080	-41 55 33	29114	-41 37 7	66970	-41 52 28	01741	-41 33 45	37658	10				
11	-40 57 20	59202	-40 2 18	98816	-40 47 1	29084	-39 51 33	67538	-40 37 18	00725	-39 41 28	38277	11				
12	-40 42 2	59122	-39 47 35	99007	-40 31 45	28835	-39 36 43	67151	-40 22 15	00851	-39 26 47	38075	12				
13	-40 21 34	60537	-39 27 41	4200152	-40 11 21	30081	-39 16 49	67905	-40 2 24	03421	-39 7 22	39938	13				
14	-39 52 15	63900	-38 59 14	03220	-39 42 4	32983	-38 48 28	70742	-39 32 24	03646	-38 39 9	42653	14				
15	-37 44 56	54830	-37 31 55	4196563	-37 42 38	26752	-37 29 29	67289	-37 40 15	4297537	-37 26 55	36593	15				
16	-37 39 10	58845	-36 50 54	4200783	-37 30 10	29250	-36 41 12	69195	-37 21 43	4301535	-36 32 14	40056	16				
17	-37 38 37	53416	-36 50 46	4196924	-37 30 22	26344	-36 41 25	66445	-37 21 29	4297224	-36 33 1	39177	17				
18	-32 30 32	53282	-31 52 1	4200986	-32 22 54	22958	-31 43 58	69358	-32 15 5	91980	-31 35 44	37155	18				
19	-31 29 33	53142	-30 52 43	01669	-31 22 18	23167	-30 44 53	69727	-31 15 55	96849	-30 38 17	42808	19				
20	-29 5 50	49234	-28 33 2	01026	-28 59 13	19227	-28 26 3	69648	-28 53 10	91775	-28 19 39	41023	20				
21	-26 9 43	46597	-26 9 43	02513	-26 9 43	16071	-26 9 43	70361	-26 9 43	84664	-26 9 43	39640	21				
22	-26 2 17	45755	-26 2 17	02220	-26 2 17	16554	-26 2 17	71521	-26 2 17	89602	-26 2 17	43397	22				
23	-21 55 22	38766	-21 33 27	02274	-21 50 29	08189	-21 28 22	70821	-21 45 55	79744	-21 23 36	41470	23				
24	-20 25 14	34734	-20 5 32	02266	-20 20 45	04430	-20 0 50	70847	-20 16 46	77580	-19 56 35	42630	24				
25	-19 45 52	35987	-19 26 53	03643	-19 41 23	04554	-19 22 12	71204	-19 36 46	72321	-19 17 40	40026	25				
26	-18 58 16	38608	-18 40 18	07503	-18 54 22	09932	-18 36 13	78012	-18 50 26	81203	-18 32 4	48022	26				
27	-16 11 48	29269	-15 57 17	04268	-16 8 8	4297554	-15 53 30	71941	-16 4 17	64440	-15 49 42	39650	27				
28	-12 59 55	25395	-12 48 49	05201	-12 57 6	94702	-12 46 0	74876	-12 54 25	65617	-12 43 18	46108	28				
29	-10 24 33	19213	-10 16 9	05044	-10 22 26	90331	-10 13 50	73963	-10 20 6	58473	-10 11 40	44709	29				
30	- 8 5 14	12478	- 7 59 4	04223	- 8 3 27	80949	- 7 57 15	72606	- 8 1 37	48748	- 7 55 25	40755	30				
31	- 7 39 23	12300	- 7 33 37	05205	- 7 37 47	82506	- 7 31 57	74651	- 7 36 12	52963	- 7 30 15	43520	31				
32	0 0 0	4294207	0 0 0	05864	0 0 0	63603	0 0 0	74647	0 0 0	36886	0 0 0	45520	32				
33	0 0 0	94943	0 0 0	07615	0 0 0	62288	0 0 0	74142	0 0 0	28501	0 0 0	41137	33				
34	0 0 0	95216	0 0 0	06799	0 0 0	61533	0 0 0	73337	0 0 0	29769	0 0 0	41713	34				
35	9 12 6	74113	9 7 45	07723	9 9 51	39640	9 5 31	73567	9 7 59	11296	9 3 35	44463	35				
36	10 13 27	69567	10 8 51	06416	10 11 15	39339	10 6 31	74622	10 9 1	08626	10 4 19	44743	36				
37	11 38 24	65832	11 33 21	05120	11 35 53	35499	11 30 48	74722	11 33 34	07791	11 28 32	47657	37				
38	13 38 31	58898	13 20 27	05184	13 28 7	27971	13 8 54	70919	13 18 55	00643	12 59 29	42995	38				
39	19 39 4	54136	19 32 37	09600	19 34 50	24861	19 28 11	79069	19 30 35	4195524	19 24 4	50745	39				
40	20 23 36	48025	20 17 6	05008	20 18 50	16447	20 12 18	73237	20 14 29	87654	20 7 55	44338	40				
41	21 57 22	45165	21 50 55	05775	21 52 8	13224	21 45 35	73317	21 47 18	83738	21 40 50	44369	41				
42	23 51 54	47431	24 0 24	10242	23 59 26	14509	24 7 59	77247	24 6 20	84434	24 14 40	48161	42				
43	24 59 46	41820	24 53 4	06449	24 53 37	09365	24 47 0	74501	24 48 8	80481	24 41 4	43350	43				
44	26 21 48	39333	26 15 12	06509	26 15 23	07417	26 8 40	74161	26 9 21	77570	26 2 44	44857	44				
45	27 35 47	40771	27 29 9	09478	27 29 23	10617	27 22 32	78373	27 23 12	81578	27 16 24	49669	45				
46	29 11 5	39790	29 16 35	09538	29 16 50	08200	29 22 20	77990	29 22 22	77796	29 27 45	48436	46				
47	30 22 42	35306	30 15 53	06685	30 15 0	03020	30 8 14	74659	30 8 12	74491	30 1 5	44790	47				
48	32 31 59	35570	32 36 5	09026	32 36 55	03619	32 41 10	76157	32 41 25	74520	32 45 40	47177	48				
49	32 58 7	34768	32 51 1	07835	32 49 51	03399	32 42 36	75968	32 42 2	73781	32 34 43	46138	49				
50	33 28 53	32783	33 21 47	06354	33 20 10	00367	33 13 2	73900	33 12 17	71115	33 5 12	44869	50				
51	35 14 28	33048	35 7 3	07235	35 5 25	01521	34 57 42	74684	34 57 8	72744	34 49 15	45354	51				
52	36 8 45	32875	36 11 55	07700	36 12 47	00816	36 16 4	74703	36 16 8	74232	36 19 37	46671	52				
53	38 10 30	32674	38 2 22	07221	38 0 18	00777	37 51 48	74199	37 51 7	72078	37 42 20	44625	53				
54	39 19 8	30031	39 10 19	03569	39 8 44	4198835	38 59 29	71096	38 59 23	70806	38 50 0	42650	54				
55	25°20' 56"	4274220	25°44' 31"	4195472	25°30' 33"	4242089	25°54' 31"	4162233	25°38' 37"	4215181	26° 3' 19"	4132956	55				
56	30 45 49	75361	30 27 16	98													

Leere Seite
Blank page
Page vide

sichtigung des Winkels, den die entsprechenden Flächen des optischen Prismas mit (110) bilden. Die übrigen χ -Werte gehören zu Prismen, die von einer vertikalen und einer schiefen Ebene gebildet sind, z. B. F_1 und F_2 der Fig. 5. S bedeutet darin die Fortpflanzungsrichtung der fraglichen Welle. Unter χ ist der Winkel FS verstanden, wo F die Gegenfläche von F_1 ist. Auch hier ergibt sich χ aus r_1 und r_2 durch gleiche Überlegungen wie im Fall der Zone [001].

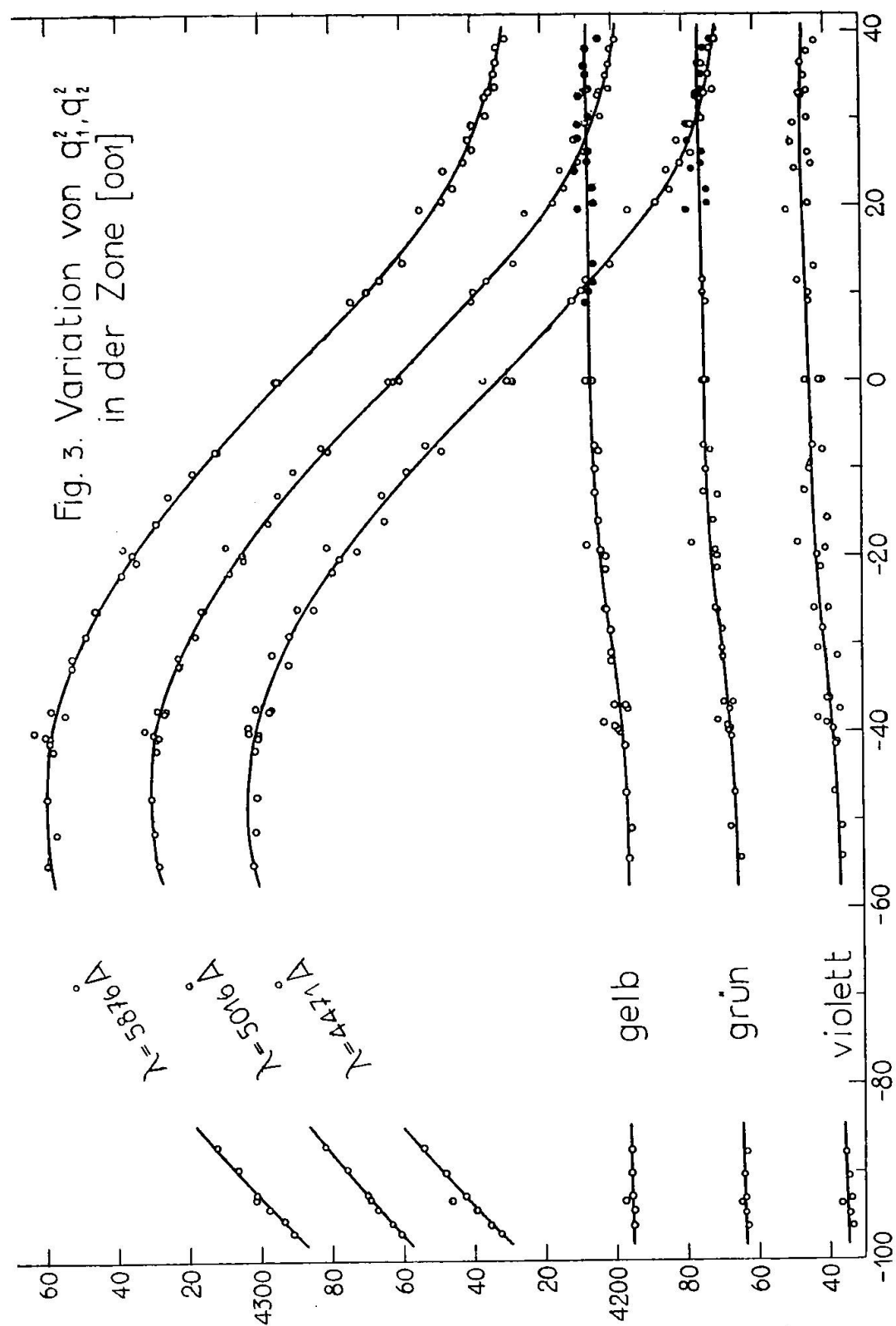
Tabelle 9

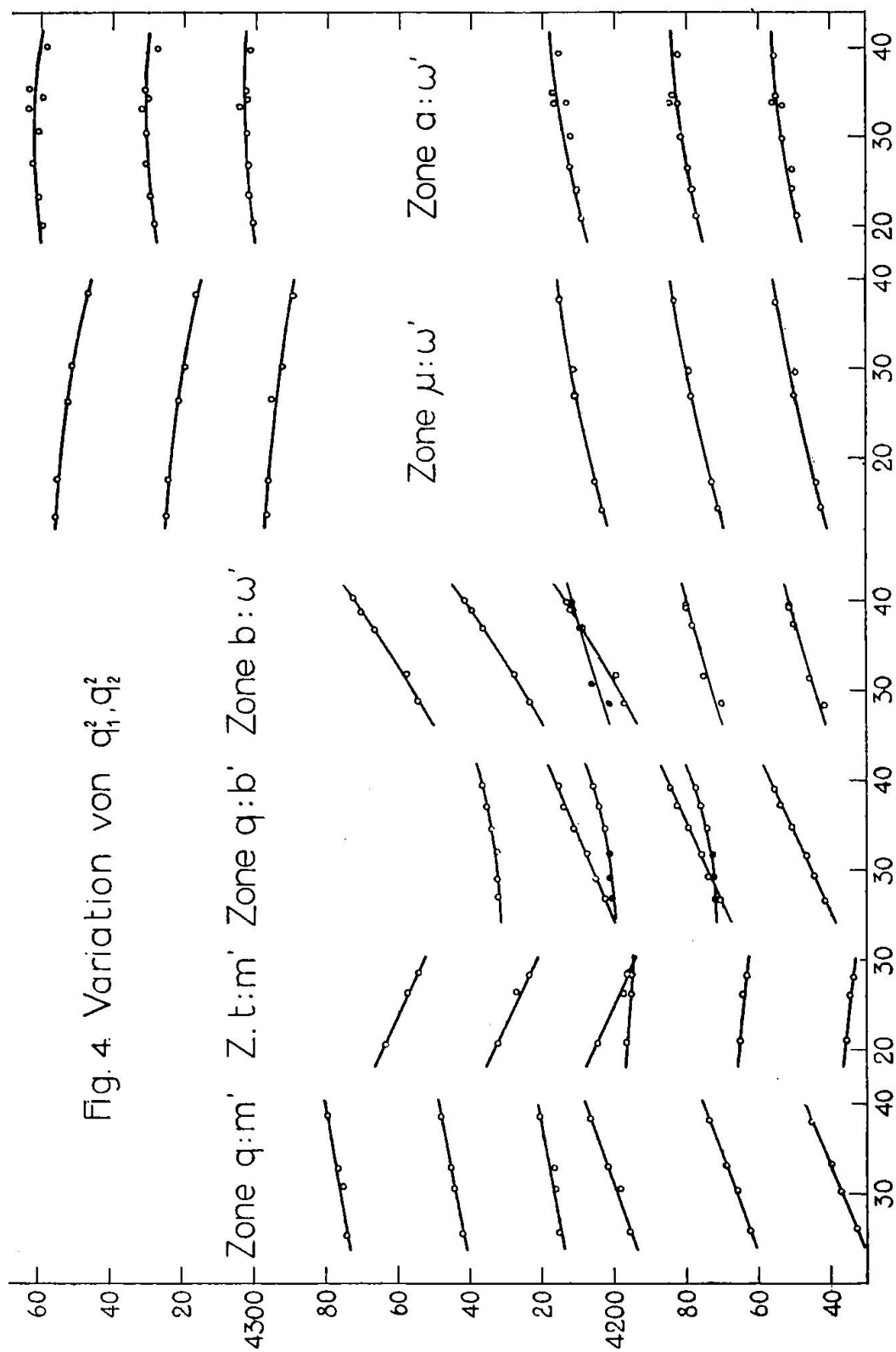
Rechnungsschema zur Bestimmung von r_i und q_i^2

	Gelb	Grün	Violett	Gelb	Grün	Violett
γ	$53^{\circ}11'55''_{72}$	$53^{\circ}11'55''_{72}$	$53^{\circ}11'55''_{72}$	$53^{\circ}11'55''_{72}$	$53^{\circ}11'55''_{72}$	$53^{\circ}11'55''_{72}$
δ	$33'46''_{16/72}$	$34'12''_{27/72}$	$34'36''_{6/72}$	$34'14''_{54/72}$	$34'41''_{3/72}$	$35'7''_{12/72}$
$\gamma + \delta$	$86'57''_{70/72}$	$87'24''_{10/72}$	$87'47''_{61/72}$	$87'26''_{37/72}$	$87'52''_{58/72}$	$88'18''_{67/72}$
i_1	$40'27''_{3/72}$	$40'27''_{3/72}$	$40'27''_{3/72}$	$40'27''_{3/72}$	$40'27''_{3/72}$	$40'27''_{3/72}$
$\alpha = \gamma + \delta - i_1$	$46'30''_{67/72}$	$46'57''_{7/72}$	$47'20''_{58/72}$	$46'59''_{34/72}$	$47'25''_{55/72}$	$47'51''_{64/72}$
og $\sin i_2$	9,8606737	9,8637851	9,8665636	9,8640653	9,8671399	9,8701485
$\sin i_2$	0,7255607	0,7307773	0,7354676	0,7312490	0,7364442	0,7415637
$\sin i_1 \cdot \cos \gamma$	0,3886784	0,3886784	0,3886784	0,3886784	0,3886784	0,3886784
$\sin i_2 + \sin i_1 \cos \gamma$	1,1142391	1,1194557	1,1241460	1,1199274	1,1251226	1,1302421
og (Z)	9,7155710	9,7155710	9,7155710	9,7155710	9,7155710	9,7155710
og (N)	0,0469784	0,0490069	0,0508227	0,0491898	0,0511998	0,0531715
og tg r_1	9,6685926	9,6665641	9,6647483	9,6663812	9,6643712	9,6623995
r_1	$24^{\circ}59'45,5''$	$24^{\circ}53'37,0''$	$24^{\circ}48'8,2''$	$24^{\circ}53'3,9''$	$24^{\circ}47'0''$	$24^{\circ}41'4,2''$
og $\sin r_1$	9,6258828	9,6242147	9,6227197	9,6240645	9,6224088	9,6207826
og $\sin i_1$	9,8121065	9,8121065	9,8121065	9,8121065	9,8121065	9,8121065
og q	0,8137763	0,8121082	0,8106132	0,8119580	0,8103023	0,8086761
$\alpha = \gamma - r_1$	$28^{\circ}12'0,3''$	$28^{\circ}18'8,8''$	$28^{\circ}23'37,6''$	$28^{\circ}18'41,9''$	$28^{\circ}24'45,8''$	$28^{\circ}30'41,6''$
og $\sin (\gamma - r_1)$	9,6744496	9,6758936	9,6771767	9,6760229	9,6774422	9,6788241
og $\sin i_2$	9,8606737	9,8637851	9,8665636	9,8640653	9,8671399	9,8701485
og q	0,8137759	0,8121085	0,8106131	0,8119576	0,8103023	0,8086756
og q (mittel)	0,8137761	0,8121083	0,8106131	0,8119578	0,8103023	0,8086758
og q^2	0,6275522	0,6242166	0,6212262	0,6239156	0,6206046	0,6173516
q^2	0,4241820	0,4209365	0,4180481	0,4206449	0,4174501	0,4143350

Die Werte der Tab. 10 sind in Fig. 3 und Fig. 4 aufgetragen: χ wurde zur Abszisse und q^2 zur Ordinate gewählt. Zwischen den Punkten ³⁾ hindurch sind in möglichster Annäherung kontinuierliche

³⁾ Im Gebiet, wo sich zwei Kurvenäste kreuzen, sind die q^2 -Werte, welche dem weniger steilen oder weniger gekrümmten Ast entsprechen, durch ausgefüllte Kreise gekennzeichnet. Die Verteilung der Kurven von Fig. 4 auf die verschiedenen Farben macht keine Schwierigkeit; q^2_1 und q^2_2 unterscheiden sich hinreichend durch den Kurvenverlauf.





Kurven gezogen. Für gelb und grün ist die Streuung der Punkte ungefähr gleich. Sie beträgt maximal etwa fünf Einheiten der vierten Dezimale, d. h. ungefähr $\frac{1}{1000}$ des q^2 -Wertes. Für violett macht sie etwas mehr aus — wohl deshalb, weil die violetten Linien vom Auge weniger scharf gesehen werden.

Die Streuung hat im einzelnen verschiedene Gründe. Bedeutungsvoll ist vorab die Ungenauigkeit des Prismenwinkels, der sich infolge gekrümmter oder vizinaler Flächenausbildung mit dem wechselnden Lichteinfall etwas zu ändern scheint (Tab. 5). Gerade dieser Umstand dürfte für die Streuung im Gebiete von 20° — 40° der c-Achsenzone massgebend sein. Es liegen Messungen an vier verschiedenen Kristallen mit gleich orientierten Prismen vor. Die Ergebnisse von drei Kristallen schmiegen sich den Kurven gut an; die vom vierten Kristall gelieferten Punkte stimmen nur in einem mittleren Gebiete, also bei relativ symmetrischem Durchgang der Wellen, befriedigend mit den Kurven überein, entfernen sich aber davon umso mehr, je stärker der Wellendurchgang vom Minimum der Ablenkung abweicht. Da Reflex und Spektrum durchwegs schön sind, so zeigt sich daraus überzeugend, dass einzelne Messungen, selbst wenn sie noch so gut erscheinen, Fehlschlüsse veranlassen können. Ob innere Reflexionen in diesem Falle mitspielen, konnte nicht entschieden werden.

Die Flächenbeschaffenheit der Eintrittsebene beeinflusst den Gang des reflektierten Lichtes auch etwas. Ist sie nicht besonders gut, so treten selbst bei nicht zu grossen Einfallswinkeln Verbreiterungen des Spaltbildes auf, und das erschwert die genaue Bestimmung von i_1 . Dass die abgelenkte Welle bei angenähert symmetrischem Durchgang die genauesten Messungen gestattet, ist längst bekannt. Wird der Einfallswinkel grösser, so werden die Spaltbilder nicht nur schmaler, sondern rücken sich auch stetig näher. Ein kleinster Messungsfehler von δ wirkt sich demnach unverhältnismässig stark auf q^2 aus. Umgekehrt werden die Spaltbilder der abgelenkten Wellen bei sehr kleinem oder gar negativem Einfallswinkel überaus in die Breite gezogen, so dass die genaue Einstellung abermals erschwert ist.

Die Grösse des Prismenwinkels selber spielt auch eine gewisse Rolle. Ist dieser Winkel beträchtlich, so tritt eine starke Ablenkung auf und die Messungsfehler wirken sich relativ wenig aus. Grosse Prismenwinkel sind aber insofern nachteilig, als dann infolge des baldigen Eintretens der Totalreflexion nur ein kleines Durchgangsgebiet erfasst wird. Es sei hier auf Journ.-Nr. 45 (L. 0) verwiesen,

wo das stärker abgelenkte Spektrum, wie schon erwähnt, nicht mehr austritt ⁴⁾).

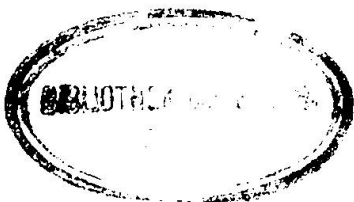
Die grosse Streuung in der c-Achsenzone bei -37° und $+12^\circ$ erklärt sich aus dem Zusammenwirken äusserster Lagen mit kleinem Prismenwinkel, während sie bei -97° bis -87° eben darum sehr klein ist, weil es sich um Prismenwinkel von 47° und 70° handelt. Die ansehnliche Streuung bei -39° (Prismenwinkel = 57°) ist aus der extremen Lage des Wellendurchganges begreiflich. Bei anderem Durchgang ergibt das gleiche Prisma sehr gut mit der Kurve übereinstimmende Werte ⁵⁾.

Aus dem genauen Studium der in Fig. 3 und Fig. 4 dargestellten Kurven zeigt sich sofort, dass die Differenz $D = q_1^2 - q_2^2$ viel genauer ermittelt werden kann als die q^2 -Werte selber. Liegt q_1^2 unter- oder oberhalb der gezeichneten Kurve, so befindet sich q_2^2 zumeist fast ebensoviel unter oder über dem andern Kurvenast. Dieses Verhalten stimmt im allgemeinen für alle drei Farben bestens überein. Begründet ist diese grössere Genauigkeit von D dadurch, dass für die drei zusammengehörigen q^2 -Paare Einfallswinkel und Prismenwinkel unverändert bleiben, sodass die davon herrührenden Fehler in der Differenz wegfallen.

Hier sei noch darauf hingewiesen, dass aus den Kurvenästen der c-Achsenzone die Hauptlichtgeschwindigkeiten angenähert abgelesen werden können. Das Minimum der unteren Kurven, bei ca. -55° , entspricht dem c^2 -Wert jeder Farbe, das Maximum der oberen Äste gibt bei fast gleichem Azimut wie soeben je a^2 . Zur mittleren Hauptlichtgeschwindigkeit b^2 gehört jeweils das Maximum der untern oder das Minimum der oberen Zweige. Wo b^2 wirklich liegt, kann aus dem Kurvenverlauf nicht erschlossen werden. Da aber in jenem Gebiete, ungefähr bei $+35^\circ$, auch die Schwingungsrichtungen mit einem Nicol geprüft und für die unteren Kurven annähernd parallel der c-Achse gefunden wurden, so ist b^2 das Minimum der oberen Kurven. Es ergeben sich so die Näherungswerte (vgl. Tab. 21):

⁴⁾ Die Messungen für das weniger stark abgelenkte Spektrum wurden trotzdem durchgeführt, weil die so erhaltenen Punkte für den Verlauf der oberen Kurvenäste wichtig erschienen.

⁵⁾ Gemäß diesen Feststellungen ist es ratsam, bei solchen Arbeiten äusserste Wellendurchgänge nicht einzubeziehen, d.h. auf eine gewisse Gedrängtheit der Kurvenpunkte zu verzichten — zumal wenn die Flächen weniger gut ausgebildet sind und weder gründlich gereinigt noch vollkommen geschliffen werden können.



	Gelb	Grün	Violett
a^2	0,4361	0,4330	0,4301
b^2	0,4231	0,4200	0,4172
c^2	0,4195	0,4163	0,4133

Aus diesen Feststellungen und aus dem fast horizontalen Verlauf des unteren Kurvenastes folgt, dass die Schwingungsrichtung n_γ nicht allzu stark zur c-Achse geneigt ist.

b) AUSWERTUNG DER MESSERGEBNISSE

Um die Messergebnisse zur Ermittlung der optischen Konstanten auszuwerten, gehen wir vom Indexellipsoid (= Indikatrix) aus. Wir beziehen diese Fläche auf ein Rechtssystem, dessen

x-Achse die Aussennormale zu (110) ist
 y- „ nach rechts hin zeigt
 z- „ der positiven c-Achse des Kristalls
 parallel verläuft (Fig. 1).

Die Gleichung der Indikatrix werde in der Form

$$I(x, y, z) \equiv a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2a_{12} xy + 2a_{23} yz + 2a_{31} zx = 1 \quad (1)$$

geschrieben. Die Fortpflanzungsrichtung sei durch die Richtungs-cosinus ψ_1, ψ_2, ψ_3 festgelegt. Die zugehörigen Geschwindigkeiten⁶⁾ q_1 und q_2 sind die Reziproken der Hauptachsen jener Ellipse, in der $I(x, y, z) = 1$ von der zu ψ_1, ψ_2, ψ_3 senkrechten Ebene

$$E(x, y, z) \equiv \psi_1 x + \psi_2 y + \psi_3 z = 0 \quad (2)$$

geschnitten wird. Es muss also das Abstandsquadrat

$$\frac{1}{q^2} \equiv x^2 + y^2 + z^2 \quad (3)$$

ein Extremum werden und die Koordinaten müssen überdies Gl. 1 und Gl. 2 erfüllen. Mithin gilt:

$$F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - \lambda_1 I(x, y, z) - \lambda_2 E(x, y, z) = \text{Extremum.}$$

Hierin bedeuten λ_1 und λ_2 noch zu bestimmende Konstanten. Durch partielle Differentiation von F nach x, y und z ergeben sich (Lit. 9) folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} x - \lambda_1 (a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z) - \lambda_2 \psi_1 &= 0 \\ y - \lambda_1 (a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z) - \lambda_2 \psi_2 &= 0 \\ z - \lambda_1 (a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z) - \lambda_2 \psi_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

⁶⁾ Im Gegensatz zur bisherigen Schreibweise bezeichnen q_1 und q_2 die beiden einer bestimmten Fortpflanzungsrichtung zugeordneten Lichtgeschwindigkeiten.

Aus Symmetriegründen ist für a_{ik} auch a_{ki} gesetzt. Nebstdem ist $2\lambda_2' = \lambda_2$. Werden nun die Gleichungen 4 der Reihe nach mit x , y und z multipliziert und hernach addiert, so kommt:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \lambda_1 I(x, y, z) - \lambda_2' E(x, y, z) = 0$$

Mit Berücksichtigung von 1, 2 und 3 folgt hieraus:

$$\lambda_1 = \frac{1}{q^2}$$

Demnach lassen sich die Gl. 4 auf die Form bringen:

$$\begin{aligned} (q^2 - a_{11})x - a_{12}y - a_{13}z &= \lambda_2' q^2 \psi_1 \\ -a_{21}x + (q^2 - a_{22})y - a_{23}z &= \lambda_2' q^2 \psi_2 \\ -a_{31}x - a_{32}y + (q^2 - a_{33})z &= \lambda_2' q^2 \psi_3 \end{aligned} \quad (5)$$

Das System 5 wird nach x , y , z aufgelöst. Nach Eintragung der gefundenen Werte in die Gl. 2 kommt für die sogen. Wellennormalenfläche der Ausdruck:

$$\begin{aligned} q^4 - q^2 [(a_{22} + a_{33})\psi_1^2 + (a_{33} + a_{11})\psi_2^2 + (a_{11} + a_{22})\psi_3^2 \\ - 2a_{12}\psi_1\psi_2 - 2a_{23}\psi_2\psi_3 - 2a_{31}\psi_3\psi_1] \\ + [(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)\psi_1^2 + (a_{33}a_{11} - a_{31}^2)\psi_2^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\psi_3^2 \\ - 2(a_{12}a_{33} - a_{23}a_{31})\psi_1\psi_2 - 2(a_{23}a_{11} - a_{31}a_{12})\psi_2\psi_3 \\ - 2(a_{31}a_{22} - a_{12}a_{23})\psi_3\psi_1] = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Abkürzend sei für die auftretenden Funktionen der sechs Polarisationskonstanten $a_{ik} = a_{ki}$ gesetzt:

$$\begin{aligned} a_{22} + a_{33} &= L_{11} & a_{33} + a_{11} &= L_{22} & a_{11} + a_{22} &= L_{33} \\ -a_{12} &= L_{12} & -a_{23} &= L_{23} & -a_{31} &= L_{31} \end{aligned} \quad (7a)$$

und

$$\begin{aligned} a_{22}a_{33} - a_{23}^2 &= P_{11} & a_{33}a_{11} - a_{31}^2 &= P_{22} & a_{11}a_{22} - a_{12}^2 &= P_{33} \\ a_{23}a_{31} - a_{12}a_{33} &= P_{12} & a_{31}a_{12} - a_{23}a_{11} &= P_{23} & a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22} &= P_{31} \end{aligned} \quad (7b)$$

Gl. 6 nimmt so die vereinfachte Gestalt an:

$$\begin{aligned} q^4 - q^2 [L_{11}\psi_1^2 + L_{22}\psi_2^2 + L_{33}\psi_3^2 + 2L_{12}\psi_1\psi_2 + 2L_{23}\psi_2\psi_3 + 2L_{31}\psi_3\psi_1] \\ + [P_{11}\psi_1^2 + P_{22}\psi_2^2 + P_{33}\psi_3^2 + 2P_{12}\psi_1\psi_2 + 2P_{23}\psi_2\psi_3 + 2P_{31}\psi_3\psi_1] = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Zur Bestimmung der Richtungs cosinus ψ_i ist zu beachten, dass jede Wellenrichtung entweder der Grundzone selber angehört, oder aber einer Zone, die ausser einer schiefen Endfläche F_2 auch eine Ebene $F_1 = (hk0)$ enthält. Die Gegenfläche der letzteren sei F (Fig. 5). Es sei nun φ der über (010) gemessene Winkel $(110):F$, χ (wie bereits S. 211 vermerkt) der Winkel $F:S$ und endlich ω der Winkel, den die Grundzone mit der Zone F_1F_2 im angedeuteten Sinne

einschliesst. Für diesen allgemeineren Fall lassen sich aus den in Fig. 5 sofort ersichtlichen sphärischen Dreiecken folgende Beziehungen aufstellen:

$$\cos \psi_1 = \cos \varphi \cos \chi - \sin \varphi \sin \chi \cos \omega$$

$$\cos \psi_2 = \sin \varphi \cos \chi + \cos \varphi \sin \chi \cos \omega$$

$$\cos \psi_3 = \sin \chi \sin \omega$$

Liegt die Wellennormale in der Grundzone, so wird $\chi = 0$. Die Formeln vereinfachen sich daher zu:

$$\cos \psi_1 = \cos \varphi \quad \cos \psi_2 = \sin \varphi \quad \cos \psi_3 = 0$$

In Tabelle 10 wurde der die Fortpflanzungsrichtung bestimmende Winkel einheitlich und darum auch für die Grundzone χ genannt. Der

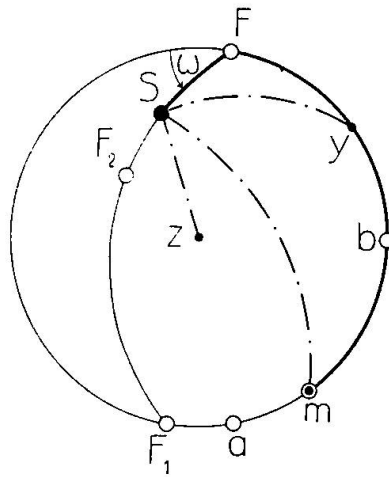


Fig. 5. Festlegung der Wellennormale S im xyz-System. m ist zugleich Ausstichpunkt der x-Achse.

jetzigen Schreibweise zufolge wäre für L. 0—54 χ durch φ oder ψ zu ersetzen.

Leider ist es nicht möglich, für eine beliebige Fortpflanzungsrichtung die beiden zusammengehörigen q^2 -Werte durch Ablenkungsmessungen direkt zu bekommen. Hingegen zeigt ein Blick auf die Kurven und das Zahlenmaterial, dass die „beobachteten“ Geschwindigkeitsquadrate mit den hier in Rede stehenden nahezu übereinstimmen. Es schien deshalb erlaubt, durch Auswertung der Kurven die beobachteten q^2 -Werte je auf die gleiche Richtung zu reduzieren. Zur Vereinfachung späterer Rechnungen war es angezeigt, diese Reduktion für alle drei Farben auf eine einzige Richtung vorzunehmen. So wurden alle zusammengehörigen, d. h. aus dem gleichen Einfallswinkel erhaltenen q^2 auf die Richtung von grün I umgerechnet. Hierdurch werden die erforderlichen Korrekturen z. T. positiv, z. T. ne-

Tabelle 11. Reduktion der zu einem i_1 -Wert gehörigen Licht-

geschwindigkeitsquadrate auf eine einzige Fortpflanzungsrichtung.

Nr.	cos ψ_1	cos ψ_2	cos ψ_3	Gelb					Grün					Violett					Nr.
				k_1	k_2	$q_1^2 + q_2^2$	$q_1^2 \cdot q_2^2$	$q_1^2 - q_2^2$	k_2	$q_1^2 + q_2^2$	$q_1^2 \cdot q_2^2$	$q_1^2 - q_2^2$	k_1	k_2	$q_1^2 + q_2^2$	$q_1^2 \cdot q_2^2$	$q_1^2 - q_2^2$		
1	1007669	9949100	0000000	280	57	8488390	1801077	0098330	42	8426094	1774726	0100186	257	53	8368645	1750595	0102075	1	
2	0743986	9972286	—	320	63	92767	02916	0102177	90	31114	76822	04014	257	57	73916	52784	05362	2	
3	0534979	9985679	—	320	63	98610	05391	03586	47	34877	78405	04595	280	48	81605	55989	08357	3	
4	0442006	9990226	—	360	67	96422	04453	05120	48	33531	77825	06979	270	62	76514	53854	08727	4	
5	0029089	9999958	—	330	00	8502281	06914	10499	0	40149	80589	11991	293	72	82922	56510	14002	5	
6	0508835	9987045	—	350	19	07745	09204	16553	267	45180	82672	19116	330	33	89881	59395	19513	6	
7	5735764	8191521	—	23	0	56099	29499	63965	0	93195	1802688	63873	20	0	8438143	79368	66003	7	
8	6241070	7813389	—	17	87	53069	28217	62249	103	97106	04357	62884	0	0	37943	79286	65617	8	
9	6768759	7360971	—	0	70	56704	29763	63230	87	96986	04291	64774	0	100	38966	79739	63050	9	
10	7439229	6682654	—	15	50	55344	29197	61284	63	96021	03902	62207	7	73	39333	79885	64163	10	
11	7571852	6532003	—	60	225	57733	30225	60551	275	96348	04044	61821	33	330	38732	79642	62811	11	
12	7600281	6498903	—	60	220	57849	30277	60275	275	95711	03772	61959	60	325	38661	79609	63161	12	
13	7639837	6452354	—	50	220	60419	31375	60555	183	97711	04618	62359	30	212	43084	81471	63725	13	
14	7693995	6387678	—	67	215	66838	34121	60828	180	8503455	07058	62421	33	315	46051	82743	61341	14	
15	7910456	6117572	—	23	37	51333	27506	58281	47	8493994	03062	59510	20	53	34097	77702	61017	15	
16	7933535	6087614	—	120	195	59283	30908	58137	245	98200	04843	60300	53	290	41434	80790	61822	16	
17	7933535	6087614	—	107	133	50100	26993	56518	163	92626	02477	60062	60	190	36271	78640	58297	17	
18	8444837	5355811	—	133	103	54032	28707	52266	130	92186	02340	53730	107	157	29085	75636	55089	18	
19	8538537	5205130	—	128	130	54564	28940	51475	123	92734	02573	53563	90	73	39566	80061	54204	19	
20	8747608	4845551	—	140	30	50090	27053	48098	110	88710	00894	49689	150	66	32815	77239	50968	20	
21	8975152	4409838	—	0	0	49110	26663	44084	0	86432	1799957	45710	0	0	24304	73697	45024	21	
22	8985390	4388939	—	0	0	47975	26182	43535	0	88075	1800660	45033	0	0	32999	77352	46205	22	
23	9282696	3719079	—	133	57	40850	23188	36416	73	78937	1796837	37441	158	90	21257	72460	38522	23	
24	9375857	3477540	—	107	35	36858	21510	32396	47	75230	95292	33630	133	56	20287	72074	35139	24	
25	9415685	3368214	—	111	50	39469	22626	32283	63	75695	95490	33413	167	80	12405	68775	32542	25	
26	9460852	3239174	—	120	47	45944	25400	31032	60	87884	1800669	31980	120	73	29272	75871	33374	26	
27	9606178	2778735	—	120	29	33388	20078	24910	40	69455	1792897	25653	147	48	04162	65358	24985	27	
28	9745661	2241007	—	100	27	30469	18862	20121	37	69541	92969	19863	110	47	11778	68592	19666	28	
29	9836764	1799469	—	100	10	24147	16202	14079	13	64281	90763	16381	80	17	03245	65039	13861	29	
30	9901461	1400372	—	77	13	16611	13024	08191	20	53535	86263	08363	80	27	8389527	59312	08100	30	
31	9911384	1328330	—	73	9	17406	13369	07031	14	57143	87791	07869	80	19	96537	62246	09542	31	
32	1,0	0	—	0	0	00071	06085	0088343	0	38250	79904	0088956	0	0	82406	56410	0091366	32	
33	1,0	0	—	0	0	02558	07147	87328	0	36430	79140	88146	0	0	69638	51080	87364	33	
34	1,0	0	—	0	0	02015	06911	88417	0	34870	78481	88196	0	0	71482	51849	88056	34	
35	9872293	1593069	—	83	3	8481922	1798465	66470	7	13214	69445	66066	80	10	55686	45326	66743	35	
36	9842470	1767984	—	83	3	76089	96002	63231	8	13969	69767	64709	83	12	53298	44338	63788	36	
37	9795752	2010779	—	120	5	71077	93886	60827	8	10229	68206	60769	80	12	55380	45219	60042	37	
38	9725056	2328796	—	367	0	64449	91099	54081	0	8398890	63452	57052	330	0	43308	40188	57318	38	
39	9421550	3351775	—	120	0	63856	90872	44656	0	8403930	65599	45792	120	18	46167	41413	44641	39	
40	9377880	3472085	—	142	0	53175	86358	43159	0	839684	59623	43210	142	18	31868	35454	43156	40	
41	9279447	3727179	—	107	2	51049	85467	39495	7	86548	58315	39900	160	12	27959	33834	39197	41	
42	9136637	4064708	—	187	1	57485	88192	37003	9	91747	60501	37271	163	15	32743	35832	36451	42	
43	9070442	4102035	—	130	1	48400	84355	35500	7	83873	57203	34857	120	13	23724	32075	36998	43	
44	8968727	4422887	—	128	0	45970	83333	32952	1	81579	56244	33255	110	3	22320	31499	32600	44	
45	8871451	4614905	—	100	0	50349	85185	31393	12	89002	59358	32232	100	22	31169	35184	31787	45	
46	8722116	4891288	—	100	0	49228	84714	30152	6	86184	58179	30216	80	0	26312	33165	29440	46	
47	8638356	5037740	—	120	0	42111	81710	28741	0	77679	54618	28361	82	0	19199	30205	29619	47	
48	8422958	5390158	—	58	0	44538	82738	26486	0	79776	55497	27462	25	0	21722	31258	27368	48	
49	8402513	5421971	—	67	1	42669	81948	27001	0	79390	55336	27431	67	0	19862	30484	27576	49	
50	8354877	5495090	—	90	0	39047	80421	26519	0	74267	53191	26467	53	0	15931	28851	26193	50	
51	8183168	5747672	—	66	0	40349	80971	25879	0	76205	54002	26837	53	0	18045	29728	27337	51	
52	8067885	5908404	—	27	0	40548	81055	25148	0	75519	53716	26113	15	0	20923	30925	27576	52	
53	7880107	6156615	—	33	0	39928	80793	25486	0	74976	53488	26578	30	0	16673	29157	27423	53	
54	7754957	6313528	0000000	0	0	33600	78123	26462	0	69931	51374	27739	0	0	13456	27819	28156	54	
55	9024600																		

Leere Seite
Blank page
Page vide

gativ und haben in der Gesamtheit zumeist die geringsten Absolutwerte. Die Umrechnung liess sich leicht durchführen. Die q^2 -Kurven wurden in grossem Masstab aufgetragen (eine Einheit der vierten Dezimale = 1 mm; $1^\circ = 4$ mm). Die Korrektur der Winkel ergibt sich aus Tab. 10 als Differenz der Fortpflanzungsrichtung χ von grün I und jener χ -Werte, die den zu ändernden q^2 -Grössen entsprechen. In den zugehörigen q^2 -Punkten wird die Tangente an die Kurve gezogen, die q^2 -Änderung pro 5° entnommen und daraus der Reduktionsbetrag berechnet. Dieser beträgt maximal 7 Einheiten der fünften Dezimale, meistens liegt er aber unter drei Einheiten und ist oft sehr klein. In jedem Fall ist er kleiner als die vermutliche Unsicherheit der gemessenen q^2 -Werte. Das Vorzeichen wird aus dem steigenden oder sinkenden Kurvenverlauf entnommen.

Die so erhaltenen Korrekturwerte sind in Tab. 11 — zugleich mit den nunmehr für alle Farben übereinstimmenden Richtungs-cosinus ψ_1, ψ_2, ψ_3 — zusammengestellt. k_1 bedeutet die Korrektur an q_1^2 , k_2 die an q_2^2 . Da sich die Korrekturen auf die Richtung von grün I beziehen, wird für diese Farbe k_1 immer null und ist darum nicht aufgenommen.

Werden nun die errechneten k_1 - und k_2 -Werte zu den in Tab. 10 aufgeführten q^2 -Grössen hinzugezählt (unter Berücksichtigung des Vorzeichens, das, wenn negativ, in Tab. 11 je über die erste Ziffer von k_1 und k_2 gesetzt ist), so finden sich leicht die Summen, Produkte und Differenzen der beiden Geschwindigkeitsquadrate einer Fortpflanzungsrichtung. Diese sind in Tab. 11 — entsprechend Anm. 6 S. 216 als $q_1^2 + q_2^2, q_1^2 \cdot q_2^2, q_1^2 - q_2^2$ für die verschiedenen Farben aufgeführt. Es ist also wohl zu beachten, dass, trotz der unveränderten Bezeichnungsart, q^2 in Tab. 10 und Tab. 11 nicht genau das Gleiche bedeutet.

Um die Tab. 10 und 11 etwas leserlicher zu gestalten, sind bei den Kolonnen der Geschwindigkeitsquadrate und ihrer Funktionen die beiden ersten Dezimalen nicht ständig wiederholt. Sie haben also an irgend einer Stelle jenen Wert, welcher in der fraglichen Kolonne irgendwo zuvor notiert wurde.

Beim aufmerksamen Durchgehen der Kolonnen für $q_1^2 + q_2^2$ und $q_1^2 \cdot q_2^2$ stellt man mit Leichtigkeit in der vierten Dezimale verschiedene Unregelmässigkeiten fest. In den Kolonnen für $q_1^2 - q_2^2$ machen sie sich im allgemeinen erst in der fünften Dezimale geltend. Wegen der hohen Genauigkeit der Differenzen $q_1^2 - q_2^2$ wäre es verlockend, die optischen Konstanten einzig auf Grund der „Doppelbrechung“

zu finden. Leider ist das nicht angängig, weil das entsprechende Gleichungssystem (S. 222) nicht linear unabhängig ist.

Mit $q_1^2 + q_2^2$ und $q_1^2 \cdot q_2^2$ lässt sich Gl. 8 zerlegen und auf eine für die Rechnung bequemere Form bringen. Es ist nämlich:

$$L_{11}\psi_1^2 + L_{22}\psi_2^2 + L_{33}\psi_3^2 + 2L_{12}\psi_1\psi_2 + 2L_{23}\psi_2\psi_3 + 2L_{31}\psi_3\psi_1 = q_1^2 + q_2^2 \quad (9a)$$

und

$$P_{11}\psi_1^2 + P_{22}\psi_2^2 + P_{33}\psi_3^2 + 2P_{12}\psi_1\psi_2 + 2P_{23}\psi_2\psi_3 + 2P_{31}\psi_3\psi_1 = q_1^2 \cdot q_2^2 \quad (9b)$$

L_{ik} und P_{ik} sind die Unbekannten. Für die Fälle 1—54 der Tab. 11, wo überall $\psi_3 = 0$ ist, vereinfachen sich diese Gleichungen zu

$$L_{11} + (L_{22} - L_{11}) \sin^2 \psi_1 + 2L_{12} \sin \psi_1 \cos \psi_1 = q_1^2 + q_2^2 \quad (10a)$$

$$P_{11} + (P_{22} - P_{11}) \sin^2 \psi_1 + 2P_{12} \sin \psi_1 \cos \psi_1 = q_1^2 \cdot q_2^2 \quad (10b)$$

Zur Berechnung der sechs Konstanten dieser zwei Gleichungen diente das reichhaltige Zahlenmaterial der Tab. 11, L. 1—54. Es kam das Gauss'sche Ausgleichungsverfahren zur Verwendung. L. 7, 8, 9 und 38—46 wurden aber weggelassen, weil an diesen Stellen der Kurvenverlauf zu unsicher schien. Die gefundenen L_{ik} und P_{ik} sind in Tab. 12 zusammengestellt.

Tabelle 12

Die Konstanten der Wellennormalengleichung

	Gelb	Grün	Violett		Gelb	Grün	Violett
L_{11}	0,8499032	0,8435957	0,8376225	P_{11}	0,1805649	0,1778945	0,1753838
L_{22}	0,8500219	0,8437971	0,8382644	P_{22}	0,1806038	0,1779670	0,1756395
L_{33}	0,8576741	0,8505318	0,8459574	P_{33}	0,1838634	0,1808136	0,1788698
L_{12}	0,0061659	0,0063608	0,0063696	P_{12}	0,0025886	0,0026509	0,0026360
L_{23}	0,0018452	0,0015432	0,0018865	P_{23}	0,0007712	0,0006372	0,0007767
L_{31}	0,0034518	0,0032024	0,0032858	P_{31}	0,0014673	0,0013510	0,0013752

Durch diese L_{ik} und P_{ik} lassen sich alle a_{ik} bestimmen — leider nicht eindeutig. Schon BRILL (Lit. 1) hat diese Vieldeutigkeit aufgezeigt. Eindeutige Beziehungen ergeben sich, sobald Fortpflanzungsrichtungen schief zur c-Achse berücksichtigt werden. Hierfür gelten die Gleichungen 9. Schon aus 9a lassen sich die a_{ik} vollständig bestimmen. Trotzdem schien es angezeigt, auch 9b mitzubetrachten. Wiederum wurde nach dem Gauss'schen Ausgleichungsverfahren vorgegangen. Dabei wurden jedoch die bereits errechneten Werte L_{11} , L_{22} , L_{12} , P_{11} , P_{22} , P_{12} , die sich auf zwei Drittel aller Beobachtungen stützen, als richtig angenommen und in 9a bzw. 9b eingesetzt, sodass nur je ein Gleichungssystem mit drei Unbekannten zu lösen war. Auf diese Weise wurden aus den 31 Angabenreihen

für die zur c-Achse schiefen Richtungen (L. 55—85 der Tab. 11) die ebenfalls in Tab. 12 aufgenommenen Grössen L_{33} , L_{23} , L_{31} , P_{33} , P_{23} , P_{31} bestimmt.

Nach 7 a lassen sich die a_{ik} aus den L_{ik} sehr leicht finden. Aber auch die P_{ik} eignen sich für diese Berechnung. Aus der zweiten Reihe von 7 b kommt nämlich:

$$a_{11} = \frac{a_{31}a_{12} - P_{23}}{a_{23}} \quad a_{22} = \frac{a_{12}a_{23} - P_{31}}{a_{31}} \quad a_{33} = \frac{a_{23}a_{31} - P_{12}}{a_{12}} \quad (11)$$

Die Einsetzung dieser Ausdrücke in die erste Reihe von 7 b führt nach einigen Umformungen auf das symmetrische Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} P_{11}a_{31}a_{12} + P_{12}a_{12}a_{23} + P_{13}a_{23}a_{31} &= P_{31}P_{12} \\ P_{12}a_{31}a_{12} + P_{22}a_{12}a_{23} + P_{23}a_{23}a_{31} &= P_{12}P_{23} \\ P_{13}a_{31}a_{12} + P_{23}a_{12}a_{23} + P_{33}a_{23}a_{31} &= P_{23}P_{31} \end{aligned} \quad (12)$$

Da die P_{ik} bekannt sind, lassen sich die Produkte $a_{31}a_{12}$, $a_{12}a_{23}$, $a_{23}a_{31}$ eindeutig finden. Nun werden diese zu zweien multipliziert und durch das dritte dividiert. Es ergeben sich so a_{12}^2 , a_{23}^2 , a_{31}^2 , also auch die Absolutwerte a_{12} , a_{23} , a_{31} . Die Vorzeichen dieser drei a_{ik} sind durch die Gl. 11 eindeutig bestimmt, da a_{11} , a_{22} und a_{33} notwendig positive Grössen sind. So werden schliesslich alle sechs Polarisationskonstanten erhalten. Sie sind mit den vorher aus L_{ik} errechneten in Tab. 13 aufgenommen. Die Übereinstimmung beider ist z. T. recht gut. Den weiteren Rechnungen wurden die Mittelwerte (Tab. 14) zugrunde gelegt.

Tabelle 13

Die zu L_{ik} und P_{ik} gehörigen Polarisationskonstanten a_{ik}

	Gelb		Grün		Violett	
	aus L_{ik}	aus P_{ik}	aus L_{ik}	aus P_{ik}	aus L_{ik}	aus P_{ik}
a_{11}	0,4288964	0,4288477	0,4253666	0,4252933	0,4232997	0,4233044
a_{22}	0,4287777	0,4288233	0,4251652	0,4252379	0,4226578	0,4226503
a_{33}	0,4211255	0,4211687	0,4184305	0,4184902	0,4149647	0,4149483
a_{12}	0,0061659	0,0061612	0,0063608	0,0063461	0,0063696	0,0063674
a_{23}	0,0018452	0,0018477	0,0015432	0,0015460	0,0018865	0,0018841
a_{31}	0,0034518	0,0034481	0,0032024	0,0032000	0,0032808	0,0032820

Tabelle 14

Aus Tab. 13 errechnete Mittelwerte der a_{ik}

	a_{11}	a_{22}	a_{33}	a_{12}	a_{23}	a_{31}
Gelb	0,4288720	0,4288005	0,4211471	0,0061635	0,0018465	0,0034500
Grün	0,4253300	0,4252016	0,4184604	0,0063535	0,0015446	0,0032012
Violett	0,4233020	0,4226540	0,4149565	0,0063685	0,0018853	0,0032814

Eine Rückberechnung der q_1^2 und q_2^2 aus den a_{ik} in verschiedenen Richtungen zeigt, dass gegenüber den Messwerten noch erhebliche Abweichungen bestehen, die besonders stark in der Differenz der Lichtgeschwindigkeitsquadrate zur Geltung kommen. Es wurde darum versucht, die a_{ik} auf Grund der Differenzen $q_1^2 - q_2^2$, die ja bedeutend genauer sind als $q_1^2 + q_2^2$ und $q_1^2 \cdot q_2^2$, endgültig zu verbessern. Aus der Normalenfläche (Gl. 6) lässt sich für $(q_1^2 - q_2^2)^2$ der nicht gerade einfache Ausdruck 13 herleiten, falls

$$\cos \psi \equiv \psi \quad \text{und} \quad \sin \psi \equiv \Psi$$

gesetzt wird.

$$\begin{aligned} (q_1^2 - q_2^2)^2 = & a_{11}^2 \Psi_1^4 + a_{22}^2 \Psi_2^4 + a_{33}^2 \Psi_3^4 \\ & + 4 a_{12}^2 \Psi_1^2 \Psi_2^2 + 4 a_{23}^2 \Psi_2^2 \Psi_3^2 + 4 a_{31}^2 \Psi_3^2 \Psi_1^2 \\ & + 2 a_{22} a_{33} (\psi_2^2 \psi_3^2 - \psi_1^2) + 2 a_{33} a_{11} (\psi_3^2 \psi_1^2 - \psi_2^2) + 2 a_{11} a_{22} (\psi_1^2 \psi_2^2 - \psi_3^2) \\ & - 4 a_{12} a_{11} \psi_1 \psi_2 \Psi_1^2 - 4 a_{12} a_{22} \psi_1 \psi_2 \Psi_2^2 + 4 a_{12} a_{33} \psi_1 \psi_2 (1 + \psi_3^2) \quad (13) \\ & - 4 a_{23} a_{22} \psi_2 \psi_3 \Psi_2^2 - 4 a_{23} a_{33} \psi_2 \psi_3 \Psi_3^2 + 4 a_{23} a_{11} \psi_2 \psi_3 (1 + \psi_1^2) \\ & - 4 a_{31} a_{33} \psi_3 \psi_1 \Psi_3^2 - 4 a_{31} a_{11} \psi_3 \psi_1 \Psi_1^2 + 4 a_{31} a_{22} \psi_3 \psi_1 (1 + \psi_2^2) \\ & - 8 a_{12} a_{23} \psi_3 \psi_1 \Psi_2^2 - 8 a_{23} a_{31} \psi_1 \psi_2 \Psi_3^2 - 8 a_{31} a_{12} \psi_2 \psi_3 \Psi_1^2 \end{aligned}$$

Die errechneten a_{ik} seien mit den Fehlern α_{ik} behaftet. Es ist also der wahre Wert $a_{ik} = a_{ik}\text{-berechnet} + \alpha_{ik}$. Im Hinblick auf Tab. 13 scheint es zum vorneherein wahrscheinlich, dass die α_{ik} höchstens die vierte Dezimale der a_{ik} beeinflussen. Unter dieser Voraussetzung ist es ein Leichtes, bei Vernachlässigung Glieder höherer Ordnung Gl. 13 linear zu machen. Sie nimmt dann die Gestalt an:

$$\sum k_{ik} \alpha_{ik} = (q_1^2 - q_2^2)^2 - \frac{1}{2} \sum k_{ik} a_{ik}, \quad (14)$$

worin

$$\begin{aligned} k_{11} = & 2 a_{11} \Psi_1^4 + 2 a_{22} (\psi_1^2 \psi_2^2 - \psi_3^2) + 2 a_{33} (\psi_3^2 \psi_1^2 - \psi_2^2) \\ & - 4 a_{31} \psi_3 \psi_1 \Psi_1^2 - 4 a_{12} \psi_1 \psi_2 \Psi_1^2 + 4 a_{23} \psi_2 \psi_3 (1 + \psi_1^2) \\ k_{22} = & 2 a_{22} \Psi_2^4 + 2 a_{33} (\psi_2^2 \psi_3^2 - \psi_1^2) + 2 a_{11} (\psi_1^2 \psi_2^2 - \psi_3^2) \\ & - 4 a_{12} \psi_1 \psi_2 \Psi_2^2 - 4 a_{23} \psi_2 \psi_3 \Psi_2^2 + 4 a_{31} \psi_3 \psi_1 (1 + \psi_2^2) \\ k_{33} = & 2 a_{33} \Psi_3^4 + 2 a_{11} (\psi_3^2 \psi_1^2 - \psi_2^2) + 2 a_{22} (\psi_2^2 \psi_3^2 - \psi_1^2) \\ & - 4 a_{23} \psi_2 \psi_3 \Psi_3^2 - 4 a_{31} \psi_3 \psi_1 \Psi_3^2 + 4 a_{12} \psi_1 \psi_2 (1 + \psi_3^2) \\ k_{12} = & 4 a_{33} \psi_1 \psi_2 (1 + \psi_3^2) - 4 a_{11} \psi_1 \psi_2 \Psi_1^2 - 4 a_{22} \psi_1 \psi_2 \Psi_2^2 \\ & + 8 a_{12} \Psi_1^2 \Psi_2^2 - 8 a_{23} \psi_3 \psi_1 \Psi_2^2 - 8 a_{31} \psi_2 \psi_3 \Psi_1^2 \\ k_{23} = & 4 a_{11} \psi_2 \psi_3 (1 + \psi_1^2) - 4 a_{22} \psi_2 \psi_3 \Psi_2^2 - 4 a_{33} \psi_2 \psi_3 \Psi_3^2 \\ & + 8 a_{23} \Psi_2^2 \Psi_3^2 - 8 a_{31} \psi_1 \psi_2 \Psi_3^2 - 8 a_{12} \psi_3 \psi_1 \Psi_2^2 \\ k_{31} = & 4 a_{22} \psi_3 \psi_1 (1 + \psi_2^2) - 4 a_{33} \psi_3 \psi_1 \Psi_3^2 - 4 a_{11} \psi_3 \psi_1 \Psi_1^2 \\ & + 8 a_{31} \Psi_3^2 \Psi_1^2 - 8 a_{12} \psi_2 \psi_3 \Psi_1^2 - 8 a_{23} \psi_1 \psi_2 \Psi_3^2 \end{aligned}$$

In mühsamer Arbeit wurden für sämtliche 85 Richtungspaare die k_{ik} berechnet — sie vereinfachen sich wesentlich, wenn $\psi_3 = 0$, $\Psi_3^2 = 1$ ist — und die der Fehlergleichung 14 entsprechenden numerischen Ausdrücke berechnet. Mit ihnen wurde nach dem Gauss'schen Verfahren für jede Farbe das symmetrische Gleichungssystem mit den sechs Unbekannten α_{ik} aufgestellt. Als Beispiel sei das für violette Licht gefundene hergesetzt:

α_{11}	α_{22}	α_{33}	α_{12}	α_{23}	α_{31}	$A \cdot 10^{-3}$ (rechts)
0,797750	0,348880	1,146636	1,077318	1,097798	0,604190	0,579244
	1,137816	1,486695	1,023963	1,158186	0,674601	0,530390
		2,633336	2,101280	2,255990	1,278791	1,109640 (15)
			2,488908	2,276527	0,857895	0,724809
				2,592681	0,659471	0,800366
					1,083456	0,674776

System 15 ist nicht lösbar, weil $k_{11}^2 + k_{22}^2 + k_{33}^2 \equiv 0$. Diese Beziehung kann am Beispiel leicht nachgeprüft, aber auch allgemein bewiesen werden. Um ein lösbares Gleichungssystem zu erhalten, wurden zu den 85 Fehlergleichungen noch 9 weitere hinzugenommen, die sich durch Berücksichtigung möglichst zuverlässiger Punkte des oberen Kurvenzweiges von Fig. 3 ergeben. Gewählt wurden L. 1, 6, 9, 22, 29, das Mittel aus 32, 33, 34 (= senkrechter Einfall auf m), 36, 43 und 51. Da $\psi_3 = 0$, vereinfacht sich für diese Punkte Gl. 6. Wird wiederum wie vorhin die an a_{ik} anzubringende Änderung α_{ik} genannt, so folgt unter Voraussetzung kleiner Korrekturen die Fehlergleichung

$$\sum k'_{ik} \alpha_{ik} = C$$

Darin ist:

$$\begin{aligned} k'_{11} &= (q^2 - a_{33}) \psi^2 & k'_{12} &= 2(a_{33} - q^2) \psi \psi' \\ k'_{22} &= (q^2 - a_{33}) \psi'^2 & k'_{23} &= 2a_{23} \psi^2 - 2a_{31} \psi \psi' \\ k'_{33} &= q^2 - a_{22} \psi^2 - a_{11} \psi'^2 + 2a_{12} \psi \psi' & k'_{31} &= 2a_{31} \psi^2 - 2a_{23} \psi \psi' \end{aligned}$$

Die neuen Fehlergleichungen ergeben mit den 85 früheren ein symmetrisches Gleichungssystem, dessen Koeffizienten linear unabhängig sind. Als Beleg sei wieder das für violette Licht mitgeteilt.

α_{11}	α_{22}	α_{33}	α_{12}	α_{23}	α_{31}	$A \cdot 10^3$ (rechts)
0,823524	0,358460	1,142746	1,092145	1,103458	0,621690	0,587158
	1,177430	1,483126	1,048873	1,177685	0,682215	0,541591
		2,634134	2,098808	2,254279	1,276035	1,107351 (16)
			2,527229	2,291756	0,869214	0,729399
				2,602834	0,663860	0,805141
					1,095569	0,680901

Ein Vergleich der Systeme 15 und 16 zeigt, dass die einzelnen Koeffizienten durch Hinzunahme der neuen Gleichungen nicht wesentlich beeinflusst wurden. Der Hauptanteil der Korrekturen rührt also wohl noch von $q_1^2 - q_2^2$ her.

Die Auflösung der drei Systeme von der Art 16 liefert die α_{ik} für alle verwendeten Wellenlängen. Diese Werte sind in Tab. 15 zusammengestellt. Dass sie nicht alle Fehlergleichungen einzeln erfüllen, ist selbstverständlich; sie bewirken nur, dass die Summe aller Unterschiede zwischen den berechneten und beobachteten $(q_1^2 - q_2^2)^2$ -Werten den kleinsten Betrag annimmt.

Tabelle 15
Korrekturen der a_{ik} -Mittelwerte

	α_{11}	α_{22}	α_{33}	α_{12}	α_{23}	α_{31}
Gelb	0,0007512	0,0000440	0,0002917	0,0001352	0,0001311	0,0000389
Grün	0,0016275	0,0006916	0,0008955	0,0003224	0,0002285	0,0000973
Violett	0,0006202	0,0001742	0,0002783	0,0002109	0,0001051	0,0000680

An Hand der Tab. 15 lassen sich bedeutungsvolle Feststellungen machen.

a) Die α_{ik} sind, wie vorausgesetzt und erwartet, kleine Werte, die mit Ausnahme von α_{11} -grün die 4. Dezimale nie überschreiten. Gegen die Grundlagen des Systems 16 sind also keine ernsthaften Einwendungen zu machen. Immerhin lassen die verhältnismässig grossen Korrekturen für grün vermuten, dass die daraus gewonnenen Schlusswerte nicht so sicher sind, wie die der andern Farben.

b) Die grössten Korrekturen sind bei allen Farben an a_{11} anzubringen. α_{11} hat überhaupt den wesentlichsten Anteil an der Fehlerquadratsumme. Es war also offenbar verfehlt, die aus L. 1—54 gewonnenen zwei Konstantentripel L_{ik} und P_{ik} unbesehen einzusetzen, als die beiden andern Konstantentripel aus den Daten L. 55—85 errechnet wurden.

c) Die Summe der Fehlerquadrate ist für violettes Licht am kleinsten. Dies überrascht zunächst, da die gelben und grünen Punkte sich einer kontinuierlichen Kurve viel besser anpassen als die violetten. Wahrscheinlich sind beim Einstellen der gelben und grünen Spektrallinien gewisse systematische Fehler unterlaufen, wogegen die bei den violetten Linien gemachten Fehler ganz zufälliger Art sind, bedingt durch die geringere Empfindlichkeit des Auges für diese Farbe. Aus diesem Grunde wurden diese Fehler schon bei der Bestimmung der L_{ik}^i und P_{ik} relativ gut ausgeglichen, und es mussten die a_{ik} aus $(q_1^2 - q_2^2)^2$ nicht mehr so stark verbessert werden wie

für gelb und grün, wiewohl auch für violett jene Differenz bedeutend genauer ist, als die einzelnen q^2 .

Tabelle 16
Die endgültigen Werte der Polarisationskonstanten

	a_{11}	a_{22}	a_{33}	a_{12}	a_{23}	a_{31}
Gelb	0,4296232	0,4287565	0,4208554	0,0060283	0,0019776	0,0034111
Grün	0,4269575	0,4258932	0,4175649	0,0060311	0,0017731	0,0032985
Violett	0,4239222	0,4228282	0,4146782	0,0061576	0,0017802	0,0033494

Mit Hilfe der α_{ik} lassen sich aus den a_{ik} der Tab. 14 die endgültigen Polarisationskonstanten bestimmen. Sie sind in Tab. 16 zusammengestellt.

Tabelle 17
Unterschied der beobachteten ($q_1^2 - q_2^2$)-Werte (I) gegenüber den aus den unkorrigierten (II) und korrigierten (III) a_{ik} -Werten errechneten (in Einheiten der 6. Dezimalen)

		Gelb		Grün		Violett	
L	J	I-II	I-III	I-II	I-III	I-II	I-III
1	44	660	- 68	1802	-289	873	493
6	37	670	- 62	1832	-163	641	- 18
9	41	553	18	1674	-152	57	-330
22	13	301	- 36	1529	- 75	303	97
29	53	436	116	1831	204	228	26
32/34	⊥	309	- 29	1523	-179	164	- 69
36	4	308	-108	1322	-201	333	- 89
43	59	591	73	1718	-530	627	235
51	52	547	- 34	634	-136	784	-233
58	84	-375	27	- 62	-165	26	- 16
61	79	50	33	880	- 82	629	175
64	86	- 72	12	- 92	-288	209	141
67	88	-483	100	-1106	55	70	360
68	78	921	- 97	2427	-390	794	15
71	74	1023	- 81	2097	-303	576	- 82
76	67	813	39	1590	-167	419	164
79	72	496	- 4	1408	- 12	159	86
82	62	511	- 35	1302	-124	51	40
Mittel		507	54	1379	195	386	148

Um einen Einblick in die erzielte Genauigkeit der Verbesserungen zu bekommen, wurde für eine Reihe von Fortpflanzungsrichtungen die Differenz $q_1^2 - q_2^2$ sowohl aus den unkorrigierten (II) wie aus den korrigierten (III) a_{ik} zurückberechnet und von der „gemessenen“ Differenz (I) subtrahiert. Die erhaltenen Werte sind in

Einheiten der sechsten Dezimale in Tab. 17 zusammengestellt. Drei Dinge fallen sofort auf: a) Die Kleinheit der Unterschiede I/III-gelb; sie beweist die Güte der Verbesserungen. b) Die relative Grösse von I/II-grün und I/III-grün; die Zahlen I/III erhärten die Bedenken, die S. 224 gegen die Zuverlässigkeit selbst der korrigierten a_{ik} -grün geäussert wurden. c) Die schwankende Grösse von I/III-violett. Sie erklärt sich aus der schwierigen Wahrnehmbarkeit der violetten Linien. Wenn auch bei grün wie bei violett zwei Differenzen I/III grösser sind, als die entsprechenden Differenzen I/II, so bleibt doch I/III im Mittel weit hinter I/II zurück (ersteres ist durchschnittlich ein Sechstel von letzterem). Die Ausgleichung mittels der $q_1^2 - q_2^2$ brachte also eine wirkliche Verbesserung der Polarisationskonstanten.

Es wäre interessant gewesen, in System 15 oder 16 auch die Schwingungsrichtung einzelner Flächen zur Korrektur der a_{ik} heranzuziehen. Einige Vorversuche zeigten aber, dass es ohne besondere Hilfsmittel nicht möglich ist, die Schwingungsrichtungen so genau zu bestimmen, dass dadurch eine wirkliche Verbesserung der Polarisationskonstanten erzielt würde. Immerhin schien sich mit ihrer Hilfe eine Möglichkeit zu bieten, die a_{ik} unabhängig von den bis dahin ausgeführten Messungen und Berechnungen einigermaßen zu kontrollieren. Zu diesem Zwecke wurden sechs Kriställchen verwendet, bei denen zum mindesten je ein Pinakoid so gut entwickelt war, dass es die Schwingungsrichtungen zu bestimmen erlaubte.

Tabelle 18

Bestimmung der Schwingungsrichtungen einer Cu-Vitriolplatte

	c-Achse	Dunkel	Dunkel	c-Achse	Dunkel	Dunkel
1. Messung	229,4°	243,5°	334,1°	49,1°	64,4°	153,9°
2. Messung	229,3	243,8	334,6	49,4	65,1	153,7
3. Messung	229,5	243,5	334,8	49,2	64,8	153,9
Mittel	229,40	243,60	334,50	49,23	64,77	153,33
Reduktion der Winkel	229,40	243,60	244,50	229,23	244,77	243,83
Gesamtmittel		c-Achse	229,32°			
		Dunkel	244,18			
			14,86			
		Korrektur	-1,29			
Auslöschungsschiefe			13,57 ~ 13,6°			

Da beim Mikroskop Fadenkreuz und Nicolshauptschnitte nicht genau parallel waren, musste es zuerst geeicht werden. Dafür eigneten sich die Kupfervitriolkriställchen in hervorragender Weise. Die zur c-Achse parallele Kante ist meistens sehr scharf ausgebildet;

die Fläche (110) lässt sich auch recht genau auf Dunkel stellen. Indem dies für die Vorder- und Rückseite des Kristalls getan wurde, fand sich, dass das Fadenkreuz gegenüber den Nicolshauptschnitten um $1,29^\circ$ nach rechts zu drehen war. Tab. 18 zeigt an einem beliebig gewählten Beispiel aus dem Journal (Kristall Nr. 37), wie für die Bestimmung der Schwingungsrichtungen vorgegangen wurde. Als Lichtquelle diente eine Zeiss'sche Quecksilbermikroskopierlampe. Ein Gelbfilter (A) lieferte homogenes Licht von der Wellenlänge $\lambda = 5791 \text{ \AA}$. Auf diese Art wurden an allen sechs Kriställchen sorgfältige Messungen gemacht. Über die Einzelheiten und Mittel orientiert Tab. 19.

Tabelle 19

Die Auslöschungsrichtungen verschiedener Flächen des Cu-Vitriols

Kristall Nr.	Obere Fläche	Bezugskante	Auslöschungs- schiefe	Mittel
37	110	001	$13,6^\circ$	
46	110	001	13,1	
46	$\bar{1}\bar{1}0$	001	$-13,2$	
46	$\bar{1}\bar{1}0$	001	$-13,6$	
47	110	001	13,3	
50	110	001	12,9	$13,29^\circ$
50	$\bar{1}\bar{1}0$	001	$-13,7$	
51	110	001	13,1	
51	110	001	13,1	
51	$\bar{1}\bar{1}0$	001	$-13,3$	
47	$\bar{1}\bar{1}0$	001	14,5	
47	$\bar{1}\bar{1}0$	001	14,6	$14,5^\circ$
47	$\bar{1}\bar{1}0$	001	$-14,5$	
51	$\bar{1}\bar{1}0$	001	14,6	
50	$0\bar{1}0$	001	24,8	
50	$0\bar{1}0$	001	25,2	$25,0^\circ$
49	$0\bar{2}\bar{1}$	100	71,0	
49	$0\bar{2}\bar{1}$	100	70,0	$70,5^\circ$
49	$0\bar{2}\bar{1}$	100	70,4	

Der Zusammenhang zwischen Polarisationskonstanten und Schwingungsrichtungen ergibt sich in einfachster Art aus der Indikatrix (Gl. 1). Für die Fläche (110), die senkrecht zur x-Achse steht, ist

$$\varrho^2 (a_{22} \cos^2 \varphi + a_{33} \sin^2 \varphi + 2a_{23} \sin \varphi \cos \varphi) = 1$$

¹⁾ Der Unterschied gegenüber der Wellenlänge von He-gelb spielt wegen der geringen Dispersion der Schwingungsrichtungen keine Rolle. Tatsächlich ergaben Messungen mit dem Grünfilter ($\lambda = 5461 \text{ \AA}$) keine zuverlässig bestimmbaren Abweichungen.

die Gleichung der Schnittellipse, und die Lage ihrer Hauptachsen (d. h. die der gesuchten Schwingungsrichtungen) findet sich zu

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{23}}{a_{22} - a_{33}}$$

Hier ist φ von der $+c$ -Achse aus im Gegenzeigersinn genommen.

Die Schwingungsrichtungen der andern Flächen aus der c -Achsenzone werden durch eine Achsentransformation erhalten, bei der die ξ -Achse auf der betreffenden Fläche senkrecht steht, die ζ -Achse mit der c -Achse zusammenfällt und die η -Achse durch das Rechtssystem gegeben ist. Wird das transformierte Ellipsoid durch die Ebene $\xi = 0$ geschnitten, so folgt für die Schwingungsrichtungen die Gleichung:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2(a_{23} \cos \alpha + a_{31} \sin \alpha)}{a_{11} \sin^2 \alpha + a_{22} \cos^2 \alpha + 2a_{12} \sin \alpha \cos \alpha - a_{33}}$$

α ist hierin $56^\circ 58' 11''$ für die Fläche $(1\bar{1}0)$ und $-53^\circ 7' 26''$ für (010) .

Die Fläche (021) verlangt eine Transformation allgemeiner Art. Wiederum ist ξ die Flächennormale. Da die Auslöschungsrichtung gegenüber der kristallographischen a -Achse gemessen wurde, empfiehlt es sich, η hiermit zusammenfallen zu lassen; ζ ist damit bestimmt und fällt in die Ebene des Zonenkreises $[021:010]$. Es wird (Koeffizienten etwas gekürzt):

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{3846a_{11} - 7887a_{22} + 4041a_{33} + 7628a_{12} + 3711a_{23} - 11890a_{31}}{5201a_{11} - 1453a_{22} - 3748a_{33} - 12219a_{12} + 12768a_{23} - 1110a_{31}}$$

Tab. 20 enthält die gemessenen und berechneten Schwingungsrichtungen. Letztere sind sowohl für die korrigierten wie nicht korrigierten a_{ik} angegeben. Es zeigt sich im allgemeinen eine vorzügliche Übereinstimmung zwischen Messung und Berechnung, sofern dieser die korrigierten a_{ik} zugrunde gelegt werden. Einzig (021) macht eine Ausnahme. Doch dürfte gerade hier die Messung nicht sehr genau sein, da das untersuchte Pinakoid nicht besonders gut ausgebildet war. Leider fand sich kein passenderes Individuum; denn Kristalle, an denen die (021) Flächen gross genug sind, um senkrecht auffallendes Licht ungestört durchzulassen, finden sich überhaupt recht selten. Wie günstig sich übrigens die Korrekturen α_{ik} auf die Polarisationskonstanten ausgewirkt haben, ergibt sich einwandfrei aus den Zahlen der letzten Kolonne von Tab. 20.

T a b e l l e 20

Die gemessenen und berechneten Schwingungsrichtungen

Fläche	Anzahl d. Kr.	Bezugs- kante	Lage der Schwingungsrichtungen gemessen	berechnet aus	
				a_{ik} korrig.	a_{ik} nicht korr.
110	5	001	13,29°	13,29°	12,88°
$1\bar{1}0$	2	001	14,5	14,66	15,16
010	1	001	-25,0	-24,57	-30,83
021	1	100	19,5	20,72	17,02

Es erübrigt noch die Bestimmung der Indikatrixhauptachsen nach Länge und Richtung. Die Quadrate der Längen werden aus der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - x \end{vmatrix} = 0$$

erhalten. Schon WEBER (Lit. 11) hat auf die Eigenart dieser Gleichung und die erforderliche Genauigkeit der Rechnung hingewiesen. Bei vollständiger Ausmultiplikation hat der Koeffizient von x^2 sieben Dezimalstellen, der von x schon 14 und das Absolutglied sogar 21. Eine Vereinfachung dieser Zahlen, insbesondere die Abkürzung auf durchwegs gleichviele Dezimalstellen, kann nicht nur zu ungenauen, sondern u. U. zu widersinnigen x -Werten führen. Im gegebenen Falle wurde die Gleichung nach dem Annäherungsverfahren gelöst. Es zeigt sich dabei, dass wenn die Wurzeln bis auf ungefähr eine Einheit der achten Dezimale genau gerechnet werden, die Gleichung bis auf die 12. Dezimale erfüllt ist. Tabelle 21 enthält die gefundenen Werte, d. h. die Quadrate der Hauptlichtgeschwindigkeiten (a^2 , b^2 , c^2) samt ihren Differenzen wie auch die sogenannten Hauptbrechungsindizes (n_α , n_β , n_γ) mit ihren Unterschieden. Aus dem Vergleich der Variationen ergibt sich von neuem, dass die Werte für grünes Licht weniger genau sind als die andern. Der Hauptfehler liegt wahrscheinlich bei b^2 bzw. n_β ; die beiden angegebenen Zahlen sind offenbar etwas zu gross (b^2) bzw. zu klein (n_β).

Die Richtungscosinus der Hauptachsen, bezogen auf das Achsenkreuz x , y , z , sind durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda) \alpha + a_{12} \beta + a_{13} \gamma &= 0 \\ a_{12} \alpha + (a_{22} - \lambda) \beta + a_{23} \gamma &= 0 \\ a_{13} \alpha + a_{23} \beta + (a_{33} - \lambda) \gamma &= 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \end{aligned}$$

bestimmt. Darin bezeichnet λ das in Frage stehende Hauptlichtgeschwindigkeitsquadrat. Die Winkel, welche die Hauptschwingungsrichtungen n_α , n_β , n_γ mit x , y , z bilden, sind in Tab. 22 zusammengestellt. Da die Orientierungsunterschiede äusserst gering sind, wurde als Charakteristikum des Kupfervitriols noch das Mittel dieser Winkel angegeben. Es entspricht den in Fig. 6 angedeuteten Lagen.

Tabelle 21

Die Hauptlichtgeschwindigkeitsquadrate und Hauptbrechungsindizes des Cu-Vitriols

	Gelb (5876 Å)	Grün (5016 Å)	Violett (4471 Å)
a^2	0,4362005	0,4333198	0,4304178
$a^2 - b^2$	0,0128492	0,0127435	0,0129917
b^2	0,4233513	0,4205763	0,4174261
$b^2 - c^2$	0,0036680	0,0040567	0,0038414
c^2	0,4196833	0,4165196	0,4135847
$a^2 - c^2$	0,0165172	0,0168002	0,0168331
n_α	1,514108	1,519133	1,524245
$n_\beta - n_\alpha$	0,022806	0,022843	0,023539
n_β	1,536914	1,541976	1,547784
$n_\gamma - n_\beta$	0,006702	0,007491	0,007171
n_γ	1,543616	1,549467	1,554955
$n_\gamma - n_\alpha$	0,029508	0,030334	0,030710

Tabelle 22

Orientierung der Indikatrix für Cu-Vitriol

		x	y	z
Gelb	n_α	$43^\circ 52'$	$49^\circ 33' \frac{2}{3}$	$75^\circ 53' \frac{1}{6}$
	n_β	$127^\circ 25' \frac{1}{6}$	$40^\circ 27' \frac{1}{6}$	$103^\circ 9'$
	n_γ	$109^\circ 27' \frac{1}{2}$	$89^\circ 5' \frac{1}{2}$	$19^\circ 29'$
Grün	n_α	$43^\circ 10' \frac{1}{2}$	$49^\circ 45' \frac{1}{3}$	$76^\circ 58' \frac{1}{2}$
	n_β	$127^\circ 29' \frac{2}{3}$	$40^\circ 16' \frac{1}{6}$	$102^\circ 33' \frac{5}{6}$
	n_γ	$108^\circ 12' \frac{1}{2}$	$88^\circ 46' \frac{1}{8}$	$18^\circ 15' \frac{1}{6}$
Violett	n_α	$43^\circ 10' \frac{5}{6}$	$49^\circ 49' \frac{1}{2}$	$76^\circ 48' \frac{2}{3}$
	n_β	$126^\circ 55' \frac{2}{3}$	$40^\circ 15' \frac{1}{6}$	$103^\circ 45' \frac{1}{2}$
	n_γ	$109^\circ 7' \frac{1}{3}$	$87^\circ 54' \frac{5}{6}$	$19^\circ 14' \frac{2}{3}$
Mittel	n_α	$43^\circ 24' \frac{4}{9}$	$49^\circ 42' \frac{5}{6}$	$76^\circ 33' \frac{4}{9}$
	n_β	$127^\circ 16' \frac{5}{6}$	$40^\circ 19' \frac{1}{2}$	$103^\circ 9' \frac{4}{9}$
	n_γ	$108^\circ 55' \frac{7}{9}$	$88^\circ 35' \frac{5}{9}$	$18^\circ 59' \frac{11}{18}$

Für den Winkel der optischen Achsen, die in Fig. 6 ebenfalls vermerkt sind, wurden folgende Werte berechnet

	Gelb	Grün	Violett
2V	$56^\circ 13' \frac{2}{3}$	$58^\circ 52'$	$57^\circ 4' \frac{1}{3}$

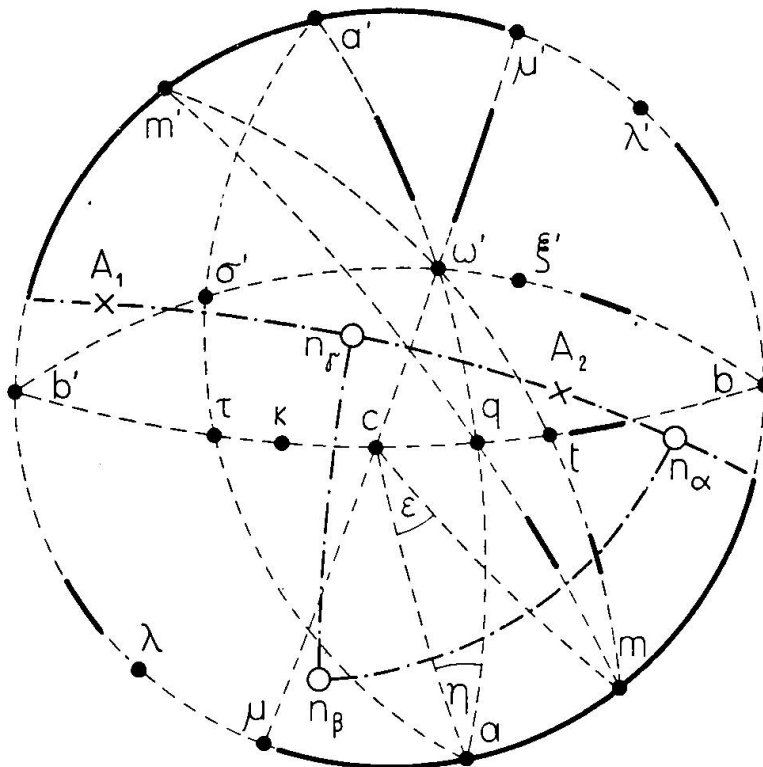


Fig. 6. Die Flächen des Kupfervitriols und die Lage der Indikatrix (n_α , n_β , n_γ) sowie der optischen Achsen (A_1 , A_2). Die fettgezogenen Zonenstücke bestimmen die Lage der erfassten Fortpflanzungsrichtungen.

Tabelle 23

Zusammenstellung der von den verschiedenen Autoren gefundenen Hauptbrechungsindizes des Cu-Vitriols

		n_α	n_β	n_γ	$n_\beta - n_\alpha$	$n_\gamma - n_\beta$	$n_\gamma - n_\alpha$
Gelb	Pape	1,51564	1,53940	1,54639	0,02376	0,00699	0,03075
	Kohlrausch	1,5140	1,5368	1,5433	0,0228	0,0065	0,0293
	Lavenir	1,51408	1,53684	1,54345	0,02276	0,00661	0,02937
	Weber	1,51203	1,53806	1,54314	0,02603	0,00508	0,03111
	Schwietring	1,51449	1,53790	1,54312	0,02341	0,00522	0,02863
	Mäder	1,51411	1,53691	1,54362	0,02280	0,00671	0,02951
Grün	Weber	1,5193	1,5448	1,5494	0,0255	0,0046	0,0301
	Mäder	1,51913	1,54198	1,54947	0,02285	0,00749	0,03034
Violett	Mäder	1,52425	1,54778	1,55496	0,02353	0,00718	0,03071

Abschliessend sind in Tab. 23 die von den verschiedenen Autoren gefundenen Hauptbrechungsindizes des Kupfervitriols samt ihren Differenzen angegeben. Beim Vergleich der Zahlen fällt sofort auf

a) dass mit der vorliegenden Arbeit zum ersten Mal der Versuch gelungen ist, die Abhängigkeit der Lichtbrechung von der

Wellenlänge mit einer gewissen Zuverlässigkeit und Vollständigkeit zu prüfen,

b) dass sich die neu gewonnenen Werte für gelbes Licht ausgezeichnet den von KOHLRAUSCH und LAVENIR durch Totalreflexion gefundenen Konstanten einfügen. Die Übereinstimmung wirkt noch überzeugender, wenn berücksichtigt wird, dass die Neubestimmungen mittels He-Licht gemacht wurden, für die älteren Werte aber Na-Licht verwendet wurde. Einiges Befremden bewirkt der Umstand, dass SCHWIETRINGS sorgfältige Messungen (Totalreflexion, Lit. 10) zu ziemlich abweichenden Zahlen führten,

c) dass hinsichtlich Doppelbrechung auffallende Unterschiede zwischen verschiedenen Autoren bestehen. Der Gedanke WEBERS, die Brechungsindizes auf Grund der Doppelbrechung zu verbessern, gewinnt hieraus vermehrte Bedeutung.

Dem Verfasser ist es eine besondere Freude, gezeigt zu haben, dass die Prismenmethode auch im allgemeinsten Fall (triklines System und unbekannte optische Orientierung) zu wertvollen Resultaten führt, sofern die Lichtgeschwindigkeit in verschiedenen Richtungen des Raums bestimmt und überdies die zugehörige Doppelbrechung in geeigneter Weise mitberücksichtigt wird.

Literaturverzeichnis

1. BRILL A., Math. Ann. 34 (1889) 297; München Sitzungsber. 13 (1883) 423.
2. GROTH P., Chemische Kristallographie II. Teil. Leipzig 1908.
3. KALB G., Die Bedeutung der Vizinalerscheinungen für die Kristallmessung. Zeitschr. f. Krist. 81, 342.
4. KOHLRAUSCH F., Über die Ermittlung von Lichtbrechungsverhältnissen durch Totalreflexion. Pogg. Ann. der Phys. 1878, 1.
5. KUPFFER A. F., Über die Krystallisation des Kupfervitriols, nebst allgemeinen Betrachtungen über das ein- und eingliedrige oder tetartoprismatische System. Pogg. Ann. d. Phys. 1826, 61 u. 215.
6. LAVENIR M. A., Sur la détermination de l'orientation optique dans un cristal quelconque. Bull. soc. franç. min. 1891, 100.
7. NIGGLI P., Lehrbuch der Mineralogie. Leipzig 1924.
8. PAPE C., Bestimmung der optischen Constanten des Kupfervitriols. Pogg. Ann. d. Phys. 1874, 35 (Erg. Bd.).
9. POCKELS, Lehrbuch der Kristalloptik, Leipzig 1906.
10. SCHWIETRING FR., Die Methode der Totalreflexion für eine beliebig orientierte Kristallfläche. Zeitschr. f. Krist. 76, 87.
11. WEBER L., Über die Prismenmethode zur Bestimmung der Brechungsindizes optisch zweiachsiger Kristalle ohne Absorptions- und Drehungsvermögen. Separatabdruck der Mitt. der Naturf. Gesellschaft in Freiburg (Schweiz), Bd. IV, 1921.

Eingegangen: August 1942.