Zeitschrift: Schweizerische mineralogische und petrographische Mitteilungen =

Bulletin suisse de minéralogie et pétrographie

Band: 22 (1942)

Heft: 2

Artikel: Kristallographie und Optik des Kupfervitriols

Autor: Mäder, Josef

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19519

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Kristallographie und Optik des Kupfervitriols

Von Josef Mäder

L. Weber hat nachgewiesen (Lit. 11), dass die optischen Konstanten eines triklinen Kristalls sich mittels eines einzigen Prismas unbekannter Orientierung bestimmen lassen, falls die Schwingungsrichtungen jener Wellen berücksichtigt werden, deren Ebenen parallel zu den Grenzflächen des Prismas sind. Die experimentelle Prüfung der Methode an Hand eines Kupfervitriolkristalls ergab dann allerdings nicht unerhebliche Abweichungen von den Werten, die Pape, Kohlrausch, Lavenir und G. Wulff (Lit. 8, 4, 6, 2) auf andere Weise gefunden hatten. Den Grund dafür sieht L. Weber vor allem darin, dass bei seinem Verfahren vom Befund in einem beschränkten Beobachtungsgebiet auf das Verhalten im Gesamtraum extrapoliert wird. In einer Schlussbemerkung meint er, dass die zusätzliche Berücksichtigung der Doppelbrechung zu besseren Resultaten führen könnte.

So schien es verlockend, die Bestimmung der optischen Konstanten eines triklinen Kristalls mit Hilfe der Prismenmethode nochmals zu versuchen. Zum vorneherein war aber die Forderung eines einzigen Prismas fallen zu lassen. Auch sollten die Lichtgeschwindigkeiten in möglichst verschiedenen Richtungen ermittelt und vor allem die Doppelbrechung herangezogen werden.

Als Untersuchungsmaterial dienten selbstgezüchtete Kupfervitriolkristalle. Diese eignen sich für die beschriebenen Zwecke besonders gut, weil sie chemisch völlig bestimmt sind und sich leicht in passender Grösse und Zahl gewinnen lassen. Überdies können die Flächen, die sich mannigfach unter spitzen Winkeln treffen, zu optischen Prismen ganz verschiedener Orientierung kombiniert werden. Die Flächen selber wurden nicht poliert, sondern in ihrem ursprünglichen Zustand belassen. Natürlich mussten die bestgeformten Kristalle ausgesucht werden.

I. Kristallographischer Teil

Die zur Untersuchung benötigten Kristalle wurden zur warmen Sommerszeit in einem temperaturkonstanten Kellervorraum gezogen.

Neben ganz grossen Individuen (2—3 cm) bildeten sich viele kleinere (etwa ½ cm Längsdurchmesser). Unter diesen allen wurden jene, die sich durch gute Flächenbeschaffenheit und klare Durchsichtigkeit auszeichneten, sorgfältig herausgelesen. An 15 Individuen, die näher geprüft und naturgetreu skizziert wurden, konnten folgende Formen festgestellt werden: a (100), b (010), m (110), q (011), t (021), α (011), μ (110), ξ (121), σ (121), τ (021), ω (111). Das Pinakoid λ (120), das mehrfach gefunden und auch für die optischen Beobachtungen verwertet wurde, ist an diesen 15 Individuen wegen seiner Kleinheit nicht mitgezählt worden. Nie beobachtet wurden α (130) und c (001).

Der Habitus dieser nach der c-Achse durchwegs gestreckten Kristalle entspricht nicht ganz den in Groths Chemischer Kristallographie (Bd. II, S. 419) abgebildeten Typen. Diese sind in der Hauptzone zu rundlich, einzig Fig. 669 zeigt eine gewisse Tafeligkeit nach m. Von den 15 in Rede stehenden Kristallen sind 12 nach m ausgesprochen tafelig; ein weiterer zeigt diese Tafeligkeit durch ungleiche Ausbildung der hintern und vorderen Fläche etwas gestört. Einmal sind a und m im Gleichgewicht. Am letzten Kristall herrscht a entschieden vor. Oberes und unteres Ende unterscheiden sich zuweilen auffallend durch Zahl und relative Grösse der ausgebildeten Flächen. ω (öfters parallel zur Kombinationskante mit ξ fein gestreift) ist immer am stärksten entwickelt, jedoch nur in einem einzigen Fall von keinen weiteren Endflächen begleitet. Im Gegensatz zu Groths Figuren sind auch q und t, einzeln oder beide zugleich, recht stark ausgedehnt. Tabelle 1 gibt über diese Grössenverhältnisse näheren Aufschluss. Es bedeutet darin: g = gross; sg = sehr gross; + = vorhanden, aber klein; ++ = verhältnismässig gross.

Tabelle 1 Grössen-Entwicklung der Endflächen an 15 Kupfervitriolkristallen

	1	2	3	4	5	6	.7	8	9	10	11	12	13	14	15
t	g			g	g	+			g		+		g	g	+
q		g	g	g		g	++						++	+	g
×		+				+							+	++	
τ		++	++	+		+	+	+							+
ξ	+	+	++	+	++	++					+	+	+	++	+
ω	g	g	sg	sg	sg	g	sg	sg	g	sg	sg	sg	g	g	g
σ		+	+	+		+	+	+							+

Fig. 1 gibt ein Idealbild des durch die Angaben von Tab. 1 festgelegten Typus des Kupfervitriols.

Zur sicheren Deutung der Kristallflächen wie auch zur Ermittelung der genauen Winkel an den brechenden Kanten mussten zahlreiche Messungen vorgenommen werden. Dabei ergaben sich für die Winkel gleicher Flächenpaare verschiedener Kristalle Abweichungen von maximal 25'. Um ähnliche Beträge weichen die Mittel meiner Messungsergebnisse von den Barker'schen Werten (Lit. 2) ab. Barker selbst erhielt zwischen Messung und Berechnung Unterschiede bis zu 32'. Der Grund für diese Unsicherheit der Winkel

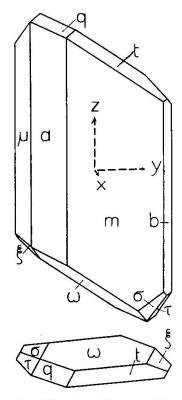


Fig. 1. Ideales Habitusbild des Kupfervitriols.

liegt in der starken Neigung des Kupfervitriols zu Vizinalflächenbildung. Flächen, die einander parallel liegen sollten, schliessen Winkel ein, die von 180° um mehrere Minuten verschieden sein können. Einzelne Flächen, besonders die breit entwickelten m-Flächen, zeigen Doppelreflexe, die bis zu 25' voneinander abstehen. Durch geeignete Schwärzung einzelner Flächenteile mit Tusche wurden Nebenreflexe zum Verschwinden gebracht. Sollen geschwärzte Kristalle für optische Zwecke gebraucht werden, so ist darauf zu achten, dass das Licht noch in möglichst verschiedenen Richtungen hindurchgehen kann. Auch ist nicht zu übersehen, dass beim Schwärzen einer vorderen und hinteren Fläche u. U. nicht zusammengehörige Teile zugedeckt werden. So wird ohne weiteres verständlich, dass

Flächen, die tadellos erscheinen und einheitliche Reflexe ergeben, zu den Gegenflächen nicht parallel sind. Ein Beispiel hierfür liefert Kr. 27.

Ablesung	Fläche ¹)	Reflex- beschaffenheit	Innen- oder Aussenwinkel	Mittel
341°12 1/8'	m	sehr gut		
$214 \ 16^{3}/_{8}$	b'	gut	$53^{\circ} 4^{1/4}$	
160 49 ¹ / ₈	m'	sehr gut	53 27 1/4	$53^{\circ}14^{-1}/_{2}$
34 13 7/8	b	verschwommen	53 24 ³ / ₄	
341 12 $\frac{1}{8}$	m		$53 1^{-3}/_{4}$	

Die Flächen m und m', die beide sehr gute Reflexe liefern, bilden einen Winkel von 180°23'. Das ist leicht verständlich, wenn man bedenkt, dass vor dem Schwärzen die eine Fläche zwei sehr gute und gleich starke Reflexe gibt, die 33' voneinander abstehen, während die maximale Signalabweichung der andern Fläche 27' ausmacht.

Bei diesem Sachverhalt, wo in der gegenseitigen Lage der Flächen doch eine gewisse Unbestimmtheit zu herrschen scheint, ist es angezeigt, die kristallographischen Konstanten des Kupfervitriols neu zu berechnen, aber nicht nach der gewöhnlichen, auch von Barker befolgten Methode, wo von fünf unabhängigen Messungen ausgegangen wird, sondern unter gleichmässiger Berücksichtigung aller überhaupt gemessenen Winkel durch Anwendung des Gauss'schen Ausgleichungsverfahrens. Allerdings werden dadurch systematische Fehler nicht weggeschafft. G. Kalb (Lit. 3) weist in seiner Arbeit über "Die Bedeutung der Vizinalerscheinungen für die Kristallmessung" mit besonderer Eindrücklichkeit darauf hin, wie sehr in solchen Fällen die zuverlässige Bestimmung des Achsenverhältnisses erschwert ist.

Tabelle 2

Gei	messene	und be	rechnete	Winkel	des K	Cupterviti	riols in	der Zoi	1e [UUI]
FI.	Kr. 14	Kr. 27	Kr. 28	Kr. 29	Kr. 30	Kr. 31	Mittlerer Meßwert	Barker	berechnet
b:m	53° 8′	53°15′	53° 5′	53° 3′	53°12′	53°11′	53° 9′	52°59′	53° 7′ 26″
b:a	79 3	79 5	78 58	79 9	79 2	79 5	79 4	79 6	79 7 40
$b:\mu$	110 8	110 15	110 9	110 10	110 11	110 11	110 11	110 8	110 6 17
b : λ	132 50	132 42	132 44	132 48	_	132 26	132 42	132 37	132 44 35

¹⁾ Der Akzent beim Buchstabenzeichen der Form bedeutet, dass die betreffende Fläche auf der Hinterseite des Kristalls gelegen ist; im Symbol ist also der erste Index negativ.

Bei der geschilderten Ausbildung der Kristalle war es gegeben, dass für die fünf Flächen aus der Zone der c-Achse besonders viele Messungen vorliegen. Es schien darum erlaubt, diese für sich auszugleichen. Tab. 2 enthält die Winkelwerte, die an sechs Kristallen durch Ausmessen der ganzen Zone gefunden wurden. Sie stellen das Mittel dar, das an jedem Kristall für den Winkel des angegebenen Flächenpaares wie auch für den Winkel der parallelen Gegenflächen aus wiederholten Messungen erhalten wurde. Kristall 31 hat jedoch eine einzige Fläche λ; bλ konnte so nicht mit der gleichen Zuverlässigkeit bestimmt werden, wie das für die übrigen Winkel der Fall ist. Vielleicht erklärt sich daraus der grosse Unterschied dieses Einzelwertes gegenüber den vier andern Angaben. Für die Ausgleichungsrechnung wurde das auf volle Minuten gekürzte Gesamtmittel der an den sechs Kristallen gemessenen Winkel verwendet (= mittlerer Messwert). Zum Vergleich sind in Tab. 2 die entsprechenden Messwerte Barkers angegeben.

Die Flächen der c-Zone seien, bei b beginnend, gemäss ihrer natürlichen Reihenfolge numeriert. Es ergibt sich so die eindeutige Zuordnung: b (1), m (2), a (3), μ (4), λ (5). Der Winkel, den die k^{te} Fläche mit b bildet, heisse φ_{1k} . Die am Beobachtungswert von φ_{1k} anzubringende Korrektur sei x_{1k} . Nach dem Gauss'schen Satz über das Doppelverhältnis vier tautozonaler Flächen ergeben sich die beiden Gleichungen (Lit. 7, S. 113):

$$\lambda_1 \cot g (\varphi_{13} + x_{13}) - \cot g (\varphi_{14} + x_{14}) = (\lambda_1 - 1) \cot g (\varphi_{12} + x_{12})$$

$$\lambda_2 \cot g (\varphi_{13} + x_{13}) - \cot g (\varphi_{15} + x_{15}) = (\lambda_2 - 1) \cot g (\varphi_{12} + x_{12})$$

Hierin sind λ_1 und λ_2 einfache Funktionen der Flächenindizes; sie haben also mit dem vorerwähnten Flächenzeichen λ für (1 $\bar{2}0$) nichts zu tun. Die kleinen Unbekannten x_{1k} sind so zu bestimmen, dass sie einerseits die beiden Gleichungen erfüllen, anderseits aber Σx_{1k}^2 zu einem Minimum werden lassen. Dazu werden die beiden trigonometrischen Beziehungen zunächst linear gemacht und hierauf nach zwei der vier Unbekannten (z. B. x_{14} und x_{15}) aufgelöst. Durch Substitution der gewonnenen Werte in Σx_{1k}^2 Min. ergibt sich Σ):

$$F(x_{12}, x_{13}) \equiv 5,73829 x_{12}^2 + 7,16512 x_{13}^2 - 10,69916 x_{12} x_{13} + 0,01701 x_{12} - 0,02056 x_{13} + 0,00002 = Min.$$

Nach üblicher Rechnungsart finden sich daraus eindeutig x_{12} und x_{13} und damit ebenso eindeutig x_{11} und x_{15} . Endgültig kommt:

bm =
$$53^{\circ}7.4'$$
 ba = $79^{\circ}7.7'$ bu = $110^{\circ}6.5'$ b λ = $132^{\circ}44.8'$

²) Diese und die spätern Ausgleichungsrechnungen wurden mit einer achtstelligen Multiplikations-Rechenmaschine ("Millionär", Egli A.G. Zürich-Wollishofen) durchgeführt.

Die Abweichung von den mittleren Messwerten (vergl. Tab. 2) ist also sehr gering und die vorzügliche Übereinstimmung mit den aus dem Achsenverhältnis zurückberechneten Werten (Tab. 2, letzte Kolonne) ebenfalls beachtenswert.

Tabelle 3
Messwerte der von den Endflächen des Kupfervitriols untereinander und mit a, m, μ gebildeten Winkel

Fl.	Kr. 28	Kr. 32	Kr. 33	Kr. 34	Kr. 35	Kr. 36	Mittel	Barker	berechnet
b : q	_	_	_			64046	64°46'	64°58'	64°46′ 1″
b' : τ	_		T		(<u> </u>	40 39	40 39	40 33	40 42 59
b:t	_	-		-		44 32	44 32	44 41	44 33 16
$b:\omega'$	76°17′	-	-	-	-	76 17	76 17	76 23	76 22 33
$b:\sigma$				_	_	40 53	40 53	40 52	40 57 48
b:5'	54 38	_	-			-	54 38	54 44	54 44 6
m:q	-				61°58′	-	61 58	61 47	61 55 17
m:t	_	53°28′		53°40′	53 24	_	53 31	53 30	53 32 23
$m:\omega$	72 4	\			**************************************	_	72 4	72 0	72 0 13
a:q	_	_		-	70 2	r 	70 2	69 59	69 52 2
a :ω	<u> </u>	59 32	59 32				59 32	59 25	59 26 37
$\mu:\omega$		52 26		-			52 26	52 27	52 26 22
q : ω'	-		1		50 28	-	50 28	50 36	50 41 25
σ' : τ		_	-		-	33 41	33 41	33 28	33 43 45

Die sechs Endflächen q, t, ξ , σ , τ , ω wurden unter sich und gegenüber den Flächen a, m, µ der Grundzone durch 14 Winkel festgelegt. Sie sind in Tab. 3 zusammengestellt. Wegen der besonderen Ausbildung der Kristalle erfolgten die Messungen nicht ringsum. Die Winkel sind also nicht durch Mittelung der Ergebnisse an einem Flächenpaar und den dazu "parallelen" Ebenen gewonnen. Auch wurden sie, von drei Fällen abgesehen, nur je an einem Kristall bestimmt. Die der Ausgleichungsrechnung zu Grunde gelegten "Mittelwerte" dürften somit weniger sicher sein als bei der c-Achsenzone. Wenn übrigens mit einer einzigen Ausnahme für Tab. 3 andere Kristalle zur Verwendung kamen als für Tab. 2 - und ähnliches gilt für die kristallographisch durchgemusterten Kristalle 1 bis 15 -, so erklärt sich das im Wesentlichen aus dem Umstand, dass beim Aufsetzen der Kristalle auf das Goniometer die Anhaftflächen teilweise verunreinigt werden und für optische Untersuchungen nicht mehr in Frage kommen.

Zwischen den Winkeln der Tab. 3 bestehen naturgemäss wiederum gewisse Widersprüche. Aufgabe der Ausgleichungsrechnung ist es, Werte zu finden, die den Beobachtungen gegenüber Unter-

schiede mit möglichst kleiner Quadratsumme ergeben. Naheliegend wäre es, die Gleichungen, denen die Verbesserungen zu genügen haben, auf Grund der stereographischen Projektion (Fig. 6) aufzustellen. Leider führt das zu höchst verwickelten trigonometrischen Ausdrücken, die beim Linearmachen Anlass zu allerlei Fehlern sind. Dieser Übelstand lässt sich bei Zugrundelegung des gnomonischen Projektionsverfahrens weitgehend vermeiden. Wir legen also im Abstand 1 vom Kristallmittelpunkt eine Ebene senkrecht zur c-Achse. Wo diese aussticht, liege der Anfangspunkt O eines neuen Bezugssystems, dessen x- und y-Achse senkrecht und parallel zum seitlichen

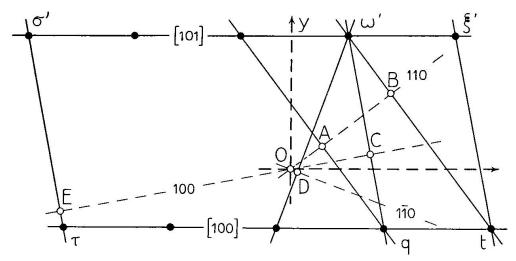


Fig. 2. Gnomonische Projektion der Endflächen des Kupfervitriols mit den Ebenenspuren (100), (110), (110). x- und y-Achse kräftig gestrichelt.

Pinakoid b (010) seien (Fig. 2). Vom Kristallmittelpunkt aus fällen wir die Senkrechten zu allen Endflächen und bringen sie mit der Projektionsebene zum Schnitt. Die Koordinaten x, y eines jeden "Flächenpols" berechnen wir aus den gemessenen Winkeln und betrachten sie als auszugleichende Beobachtungsgrössen.

Wie in Fig. 2 dargestellt, sind die Zonen [100] und [101] mit den Flächen t, q, τ bezw. ξ' , ω' , σ' zwei zur x-Achse parallele Geraden mit den Gleichungen

$$y = -tg (\beta - 90) = -0,30987$$

 $y = tg (90 - \beta') = 0,70891,$

worin β der stumpfe Winkel der kristallographischen Achsen a und c, β' aber der spitze Winkel der Kanten [001] und [101] ist.

Geeignet ausgewählte Winkel der Messungsreihe führen für die Abszissen von t, q, τ , ξ' , ω' , σ' zu den in Tab. 4 zusammengestellten Werten. Bei der Berechnung ist natürlich zu berücksichtigen, dass

die beiden Tripel tautozonaler Flächennormalen je in einer Ebene liegen, die gegenüber der Projektionsebene geneigt ist.

Tabelle 4 Numerische Lagebestimmung der in Fig. 2 vermerkten Flächenpole

Koord. und Abstände unkorrig.	Korrekturen	Koord. und Abstände korrig.	Koord. und Abstände rückberech.
$y_1 - 0,30987$	$z_1 - 0,00110$	- 0,31097	- 0,31097
y ₂ 0,70891	$z_2 = 0,00163$	0,71054	0,71054
x _q 0,49338	$z_3 = 0,00015$	0,49353	0,49353
xt 1,06410	$z_4 - 0,00044$	1,06366	1,06366
$x_{\tau} = -1,21931$	$z_5 = 0,00245$	- 1,21686	- 1,21684
$x\omega'$ 0,29920	$z_6 - 0,00186$	0,29734	0,29732
x_5' 0,87006	$z_7 - 0,00259$	0,86747	0,86743
$x\sigma' - 1,41593$	$z_8 = 0,00288$	- 1,41305	- 1,41301
Aq 0,54391	z ₉ 0,00101	0,54492	0,54491
Bt 0,88802	$z_{10} - 0,00096$	0,88706	0,88704
ω' B 0,38863	$z_{11} = 0,00132$	0,38995	0,38999
qC 0,39493	z ₁₂ 0,00355	0,39848	0,39847
Cω' 0,63946	z_{18} 0,00225	0,64171	0,64171
ω' q 1,03595	z ₁₄ 0,00423	1,04018	1,04023
ω' D 0,76972	$z_{15} - 0.00027$	0,76945	0,76948
$\tau \sigma$ 1,03874	z_{16} 0,00144	1,04018	1,04007

Die gefundenen x -Werte und Abstände sind nicht nur ungenau, sondern sogar mit gewissen Widersprüchen behaftet. Sie wären durch andere Zahlen zu ersetzen, wenn unter den gemessenen Winkeln eine andere Auswahl getroffen würde. Um Werte zu finden, die sich den Beobachtungen möglichst anpassen, werden die x und y mit Korrekturen z_i versehen (Tab. 4). Die beiden vorstehenden Gleichungen nehmen so die Gestalt an:

I.
$$y_1 = -0.30987 + z_1$$

II. $y_2 = 0.70891 + z_2$

Da zufolge der Eigentümlichkeit der gnomonischen Projektion die Bedingungen

$$\omega' \sigma' = 3 \xi' \omega'$$
 $q \tau = 3 t q$ $\omega' \xi' = q t$

bestehen (Fig. 2), so ergeben sich mit Berücksichtigung der Abszissenwerte der Tab. 4 die Fehlergleichungen:

III.
$$-4z_6 + 3z_7 + z_8 = 0,002550$$

IV. $-4z_3 + 3z_4 + z_5 = 0,000531$
V. $z_3 - z_4 - z_6 + z_7 = -0,000141$

Die Zonengeraden q ω' und t ω' stehen auf den Schnittlinien der Projektionsebene mit den Flächen a (100) bezw. m (110) senkrecht. Somit ist

$$\frac{y_2 - y_1}{x_{\omega'} - x_0} = tg(180 - ab)$$
 $\frac{y_2 - y_1}{x_{\omega'} - x_t} = tg(180 - bm),$

worin ab den bereits ausgeglichenen Winkel a:b und b m den ebenfalls feststehenden Winkel b:m bedeutet. Werden in diesen Formeln die entsprechenden Werte aus Tab. 4 eingesetzt, so folgen die Fehlergleichungen

VI.
$$-z_1 + z_2 - 5,20673 z_3 + 5,20673 z_6 = -0,007753$$

VII. $-z_1 + z_2 - 1,33301 z_4 + 1,33301 z_6 = 0,000830$.

Die durch den Ursprung verlegte m-Fläche schneidet die Projektionsebene in der Geraden

$$x \cos(bm) - y \sin(bm) = 0.$$

Aus dieser Gleichung werden durch Einsetzen der Koordinaten von q, t, ω' und ihren Korrekturen die Abstände Aq, Bt und $B\omega'$ gefunden. Diese Abstände lassen sich auch aus den gemessenen Winkeln m:q, m:t und $m:\omega'$ berechnen (Tab. 4). Das führt auf drei weitere Fehlergleichungen

VIII.
$$0.79992 z_1 - 0.60010 z_3 + z_9 = 0.000037$$

IX. $0.79992 z_1 - 0.60010 z_4 + z_{10} = -0.001580$
X. $0.79992 z_2 - 0.60010 z_6 - z_{11} = 0.001103$.

Unter gleichen Voraussetzungen wie soeben kommt für a (100) die Gleichung

$$x \cos(ab) - y \sin(ab) = 0.$$

Sie liefert mit Berücksichtigung der Winkel a:q und a': ω ' für C q und C ω ' die Fehlergleichungen

XI.
$$0.98205 z_1 - 0.18861 z_3 + z_{12} = 0.002438$$

XII. $0.98205 z_2 - 0.18861 z_6 - z_{13} = -0.000298$.

Es wurden auch die Winkel q ω' und $\tau \sigma'$ gemessen, welche die beiden charakteristischen Zonen der Endbegrenzung miteinander verknüpfen. Aus den Beziehungen (Fig. 2)

$$qC + C\omega' = q\omega'$$
 und $\tau E + E\sigma' = \tau\sigma'$

werden zwei neue Fehlergleichungen gewonnen

XIII.
$$z_{12} + z_{13} - z_{14} = 0,001566$$

XIV. $-0,98205 z_1 + 0,98205 z_2 + 0,18861 z_5$
 $-0,18861 z_8 - z_{16} = 0,001158$.

Schliesslich wurde noch μ' ω' gemessen. Wird der Ebene μ' (110) die Gleichung

$$x \cos(b \mu') + y \sin(b \mu') = 0$$

zugeordnet, so ergibt sich für den Abstand ω' D eine letzte Fehlergleichung:

XV.
$$0.93904 z_2 + 0.34379 z_6 - z_{15} = 0.001157$$

Die 13 Bedingungsgleichungen III—XV lassen sich auf eine für die Rechnung bequemere Form bringen, indem man 13 Unbekannte durch die 3 verbleibenden — gewählt wurde z_1 , z_3 , z_6 — ausdrückt. Statt das an 13 Nebenbedingungen geknüpfte Minimum von Σz_i^2 ($i=1,\ldots 15$) zu suchen, ist nurmehr der kleinste Wert einer Funktion zu finden, die zur Erzielung gleichartigerer Koeffizienten in der Form

$$\begin{split} F\left(z_{1}^{\prime},z_{3}^{\prime},z_{6}^{\prime}\right) &\equiv 6,73025\,z_{1}^{\prime\,2} \,\,+\,\,3,16889\,z_{3}^{\prime\,2} \,\,+\,\,3,41368\,z_{6}^{\prime\,2} \\ &+\,\,3,12218\,z_{1}^{\prime}\,z_{3}^{\prime}\,-\,\,6,50988\,z_{3}^{\prime}\,z_{6}^{\prime}\,-\,\,3,41972\,z_{6}^{\prime}\,z_{1}^{\prime} \\ &-\,\,5,35328\,z_{1}^{\prime}\,\,\,\,\,\,-12,72731\,z_{3}^{\prime}\,\,\,\,\,\,\,\,\,+\,13,31097\,z_{6}^{\prime} \\ &+\,\,13,74951\,=\,\,\text{Min}. \end{split}$$

geschrieben werden kann. Darin ist $\mathbf{z_1'} = \mathbf{z_1} \cdot 10^2$, $\mathbf{z'_3} = \mathbf{z_3} \cdot 10^3$ und $\mathbf{z_6'} = \mathbf{z_6} \cdot 10^3$. Mit den hierdurch bestimmten Werten berechnen sich alle $\mathbf{z_i}$ ($\mathbf{i} = 1, \ldots 15$) und schliesslich auch $\mathbf{y_1}$ und $\mathbf{y_2}$. Die Korrekturen $\mathbf{z_i}$ und die verbesserten x-Werte usw. sind in Tab. 4 zusammengestellt.

Nun wird aus y_1 direkt der Winkel β gefunden. Die korrigierten Lagen von t und q (Fig. 2) ergeben die Winkel bt und b q. Hieraus liefert der Gauss'sche Satz sofort b c. Im sphärischen Dreieck a b c (Fig. 6) sind demnach die Seiten ba und b c, sowie der Aussenwinkel β bei b bekannt. Nach geläufiger Formel errechnen sich die Aussenwinkel α und γ bei a und c. Aus diesen kommen mit Hilfe der Dreiecke a b q und b c m die Winkel ε und η . Das Achsenverhältnis ermittelt sich hernach in üblicher Weise. Es wurde erhalten

$$\underline{a:b:c = 0,56890:1:0,55494}$$

$$\underline{\alpha = 82^{\circ}22'31''} \quad \underline{\beta = 107^{\circ}16'27''} \quad \underline{\gamma = 102^{\circ}35'11''}$$

Der Unterschied gegenüber den Barker'schen Werten

a: b: c = 0,5721: 1: 0,5554

$$\alpha = 82^{\circ}5'$$
 $\beta = 107^{\circ}8'$ $\gamma = 102^{\circ}41'$

ist also nicht beträchtlich. Die Neuberechnung stützt sich auf die fünf Winkel β , b t, b q, b m, b a. Dass eine andere Winkelauswahl

— im Gegensatz zur üblichen Kristallberechnung — im wesentlichen zum gleichen Achsenverhältnis geführt hätte, ergibt sich aus der glänzenden Übereinstimmung zwischen den ausgeglichenen und den aus dem gefundenen Achsenverhältnis zurückberechneten Winkeln und übrigen Grössen (Tab. 2 und 4).

II. Optischer Teil

a) INSTRUMENT, MESSUNG, MESSERGEBNISSE

Die Messungen wurden mit einem Fuess'schen Goniometer, Modell II (Websky'scher Spalt, Ramsden'sches Okular mit 3 0 45′ Sehfeldgrösse) durchgeführt. Als Lichtquelle diente eine Heliumgasentladungsröhre. Eingestellt wurde auf die Linien 5876 (gelb), 5016 (grün) und 4471 Å (violett). Wenn infolge geringer Doppelbrechung sich die beiden Spektren teilweise überlagerten, wurden die zusammenfallenden Linien durch ein zwischen Auge und Fernrohr gehaltenes Nicol'sches Prisma voneinander getrennt.

Die Winkelablesung wurde an beiden Nonien (I und II) auf $\frac{1}{4}$ genau vorgenommen. Dabei zeigte es sich, dass je nach wechselseitiger Stellung des Limbus und der Nonien die Stelle II gegenüber I einen Unterschied von $180^{\circ} - 4\frac{1}{4}$ bis $180^{\circ} + 1\frac{1}{4}$ aufwies. Die Messungen selber wurden anfänglich in drei verschiedenen Limbusstellungen ausgeführt; von Journal-Nr. 17 ab wurde indessen hievon Umgang genommen, weil der feststellbare Einfluss auf die q^2 -Werte (q = Lichtgeschwindigkeit) zu unbedeutend war, um den erforderlichen Zeitaufwand zu rechtfertigen.

Tabelle 5 Abhängigkeit der Winkelmessung von der Auffallsrichtung des Lichtes

Krist. Nr.	28	29	31	28	36
Flächenpaar	m : b	m : b	m : b	$b:\omega$	b : q
Auffallsw. Prismenw.	30°31 ′ 53 19	32°59 ′ 53 3 ³/ ₈	$30^{\circ}34$, $53 \ 12 \ ^{1}/_{24}$	$12^{\circ}30$, 76 17 $^{1}/_{3}$	11°54 64 47 ¹ / ₁₂
Auffallsw. Prismenw.	46 27 53 18 ⁵ / ₆	$\begin{array}{ccc} 43 & 3 \\ 53 & 3 & {}^{13}/_{24} \end{array}$	43 8 53 11 ² / ₃	43 54 76 17 ¹ / ₈	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
Auffallsw. Prismenw.	77 24 53 18 ⁷ / ₂₄	66 17 53 4	62 51 53 11 7/12	68 58 76 17 ¹ / ₃	77 17 64 46 ¹ / ₆
Mittelwert	53018 17/24	530 3 23/36'	53°11 55/72′	76° 17 19/72'	64046 55/72'

Für den Prismenwinkel fanden sich nicht gänzlich übereinstimmende Werte, falls der Lichteinfall variiert wurde, d. h. Kollimator und Fernrohr in verschiedene gegenseitige Stellungen gebracht wur-

den. Die Prismenwinkel wurden daher bei kleinem, mittlerem und grossem Lichtauffallswinkel gemessen und als Mittel der so erhaltenen Grössen berechnet. Tab. 5 gibt einige Beispiele. Die Zuund Abnahme des Prismenwinkels ändert sich mit der Grösse des Auffallswinkels nicht einsinnig. Die grösste beobachtete Schwankung beträgt $1\frac{1}{2}$ Minuten. Dabei ist zu beachten, dass sämtliche Einzelwerte bereits die Mittel je dreier, wohl selten mehr als $\pm \frac{1}{2}$ voneinander abweichender Messungen sind. Die kleinen Schwankungen des Prismenwinkels sind nicht bloss durch Konstruktionsmängel des Instrumentes bedingt, sondern dürften — wie schon im kristallographischen Teil angedeutet wurde — aus der Flächenbeschaffenheit der benutzten Kristalle zu erklären sein.

Tabelle 6
Orientierung der für die optische Untersuchung benutzten Prismen und Zahl der verschiedenen Einfallsrichtungen

Flächen-	Brech.					Kri	stall	num	mer				
Paar	Kante	14	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
a:m	001		9	9		2							
$a:\mu$	001					5							
b : m	001				7	5	2	2					
b : λ	001				1								
$\mathbf{b}:\mu$	001				3	2							
$m:\mu$	001	3	2	2									
m:q	111											3	
m:t	$1\overline{1}2$										3		
b : q	100												6
b : ξ	101				2								
$b:\omega$	101				3								
$\mu:\omega$	110								5				
a : ω	$01\overline{1}$								4	4			

Das optische Verhalten des Kupfervitriols wurde an zwölf verschiedenen Kristallen geprüft. Zur Untersuchung gelangten insgesamt 22 Prismen. Ihre brechenden Kanten gehören 7 Richtungen an; die begrenzenden Ebenen entsprechen 13 natürlichen Flächenpaaren. Die Einzelheiten sind aus Tab. 6 ersichtlich. Darin geben die vermerkten Zahlen an, für wieviele verschiedene Einfallsrichtungen die Ablenkungen gemessen wurden. Die Addition ergibt, dass für jede der drei Wellenlängen die Lichtgeschwindigkeiten in je 85 Richtungspaaren bestimmt wurden. Über welche Bereiche sie sich verteilen, erhellt aus den fetten Kreislinienzügen der Fig. 6.

	Tab	ell	e 8.	Endmittel de	er Prismen-,	Eintritts- un	d Ablenkun	gswinkel.
L.	J.	K.	E:A	Prisma	Eintritt	Gelb	Grün	Violett
0	45	29	b:μ	69°50′10 "	49°52′50 "	57°37′45 ″	59°19′32,5″	61° 9′ 55 ″
1	44	29	b : μ	69 50 10	52 23 15	54 37 2,5 58 42 40	55 45 57,5 60 21 40	56 54 15 62 8 0
2	36	28	$b:\mu$	69 49 2,5	55 9 43,8	52 48 15 56 6 47,5	53 43 7,5 57 16 47,5	54 36 50 58 26 0
3	39	28	b:λ	47 8 15	57 55 12,5	31 26 25 32 27 15	31 44 42,5 32 46 40	31 59 20 33 4 0
4	43	29	$\mathtt{b}:\mu$	69 50 10	59 50 43,8	51 45 27,5 54 30 10	52 31 32,5 55 25 12,5	53 14 40 56 17 30
5	38	28	$b:\mu$	69 49 2,5	66 31 21,3	52 21 37,5 54 48 57,5	53 0 57,5 55 34 5	53 37 40 56 17 30
6	37	28	$b:\mu$	69 49 2,5	76 55 36,3	56 47 50 59 7 15	57 22 57,5 59 47 55	57 55 45 60 24 10
7	40	29	a: μ	31 3 15	47 18 28,8	19 18 50 20 18 12,5	19 30 0 20 29 57,5	19 39 27,5 20 40 45
8	46	29	a:μ	31 3 2,5	40 29 11,3	18 2 47,5 19 0 20	18 12 22,5 19 10 40	18 22 15 19 22 10
9	41	29	a:μ	31 3 0	33 31 40	17 12 0 18 9 27,5	17 22 0 18 20 37,5	17 32 22,5 18 31 0
10	47	29	a :μ	31 3 2,5	24 30 48,8	16 47 20 17 45 22,5	16 57 35 17 56 37,5	17 7 17,5 18 7 42,5
11	6	26	$m:\mu$	57 10 19,2	83 6 31,7	50 57 34,1 52 58 43,3	51 19 46,7 53 23 13,3	51 40 54,6 53 46 25
12	7	26	$m:\mu$	57 10 19,2	80 59 55	49 15 33,3 51 16 28,3	49 37 52,5 51 41 25,8	49 58 43,3 52 4 29,2
13	26	14	m : μ	57 9 17,5	78 42 57,5	47 30 40 49 31 40	47 53 5 49 56 55	48 12 55 50 19 5
14	22	27	$\mathbf{m}:\boldsymbol{\mu}$	57 16 7,5	76 1 47,5	45 40 25 47 41 52,5	46 3 12,5 48 7 22,5	46 25 5 48 29 42,5
15	42	29	a : μ	31 3 0	17 50 32,5	16 59 17,5 17 58 52,5	17 9 35 18 10 20	17 20 25 18 22 30
16	3	26	m : a	26 9 56,7	67 42 31,3	23 59 12,5 24 55 27,5	24 9 34,2 25 6 58,3	24 19 20,8 25 17 41,7
17	17	27	m:a	26 2 16,7	67 45 58,8	23 58 35 24 54 10	24 8 2,5 25 5 15	24 18 17,5 25 15 15
18	18	27	m:a	26 2 16,7	54 32 32,5	18 40 10 19 29 22,5	18 49 47,5 19 39 52,5	18 59 42,5 19 50 40
19	21	27	m : μ	57 13 25	52 21 0	36 16 30 38 19 57,5	36 40 10 38 47 17,5	37 1 15 39 10 42,5
20	28	14	$m:\mu$	57 9 17,5	47 30 31,3	35 51 5 37 58 12,5	36 15 57,5 38 26 35	36 39 5 38 52 57,5
21	5	26	a: m	26 9 42,5	0 0 0	15 48 35,8 16 41 31,7	15 59 31,7 16 53 49,2	16 10 55,8 17 5 44,2
22	13	27	a:m	26 2 16,7	0 0 0	15 42 44,2 16 35 3,3	15 53 6,7 16 46 41,7	16 2 48,3 16 57 30
23	27	14	$\mathbf{m}:\boldsymbol{\mu}$	57 9 17,5	34 31 41,3	38 30 52,5 41 15 40	39 5 52,5 41 57 7,5	39 39 22,5 42 37 12,5
24	54	29	m:a	26 5 12,5	32 0 5	14 32 22,5 15 11 7,5	14 41 5 15 20 35	14 48 52,5 15 29 10
25	15	27	m:a	26 2 16,7	30 53 58,7	14 24 50,8 15 3 25	14 33 50,8 15 13 9,2	14 43 10,8 15 22 36,7
26	1	26	m:a	26 10 29,2	29 34 27,5	14 22 26,7 15 0 47,5	14 30 40,8 15 9 40	14 39 0,8 15 18 47,5
27	14	27	m:a	26 2 16,7	25 4 58,3	14 6 5 14 42 36,7	14 15 11,7 14 52 20	14 24 49,2 15 2 10
28	10	26	m:a	26 10 10,8	19 59 56,2	14 6 0,8 14 41 51,7	14 15 0,8 14 51 10	14 23 38,3 15 0 5,8

							0 "	***-1-4
L.	J.	K.	E : A	Prisma	Eintritt	Gelb	Grün	Violett
29	53	29	m:a	26° 5′ 12,5″	15° 57′ 25 ″	14° 8′ 55 ″ 14 43 35	14°17′57,5″ 14 53 17,5	14°27′ 10 ′′ 15 2 32,5
30	19	27	m:a	26 2 16,7	12 22 12,5	14 19 20 14 53 2,5	14 29 0 15 3 10	14 39 0 15 13 30
31	11	26	m:a	26 10 10,8	11 42 20,8	14 27 8,3 15 0 54,2	14 36 23,3 15 10 48,3	14 45 40 15 21 1,7
32	2	26	m:a	26 10 1,7	0 0 0	16 7 43,3	16 18 56,6	16 28 52,1
33	12	27	m:a	26 2 16,7	0 0 0	16 40 32,5 16 0 52,5	16 52 27,5 16 12 45	17 3 44,2 16 25 13,3
34	16	27	m:a	26 2 16,7	0 0 0	16 33 1,7 16 0 46,7	16 45 41,7 16 13 1,7	16 58 22,5 16 24 45
35	20	27	m:a	26 2 16,7	-14 9 28,7	16 33 20 21 45 30	16 46 0 22 5 47,5	16 58 9,2 22 22 50
36	4	26	m:a	26 9 45	-15 45 44,6	22 25 0 23 17 25	22 46 2,5 23 37 33,3	23 4 22,5 23 58 30,8 24 43 48,3
37	8	26	m:a	26 9 50,8	-17 59 37,9	24 0 2,5 25 38 34,2 26 28 55,8	24 22 19,2 26 3 20,8 26 55 22,5	26 26 39,2 27 19 40,8
38	9	26	a : m	26 8 43,3	78 41 41,7	31 21 46,7 31 43 20	31 33 35 31 55 35	31 44 5 32 6 27,5
39	30	28	m:b	53 19 3,8	31 2 13,8	35 55 27,5 36 40 52,5	36 25 7,5 37 13 0	36 55 35 37 43 35
40	55	30	m:b	53 16 31,7	32 19 10	35 27 2,5 36 9 0	35 57 42,5 36 40 55	36 26 20 37 10 40
41	48	29	m:b	53 3 38,3	35 1 10	34 24 52,5	34 53 15 35 29 35	35 20 0 35 56 35
42	34	28	b: m	53 18 57,5	48 58 32,5	34 59 57,5 34 2 0 34 29 22,5	34 26 12,5 34 54 5	34 48 40 35 16 12,5
43	59	31	m:b	53 11 45,8	40 27 2,5	33 46 12,5 34 14 45	34 12 22,5 34 41 2,5	34 36 5 35 7 10
44	49	29	m : b	53 3 38,3	43 0 5	33 34 22,5 33 59 47,5	33 59 5 34 25 17,5	34 22 35 34 48 47,5
45	29	28	m:b	53 19 3,8	45 20 41,3	33 49 12,5 34 13 2,5	34 12 10 34 37 7,5	34 34 37,5 34 59 42,5
46	33	28	b:m	53 19 18,8	38 54 13,8	34 4 32,5 34 29 45	34 30 52,5 34 56 32,5	34 56 42,5 35 22 7,5
47	50	29	m:b	53 3 38,3	50 59 32,5	34 16 10 34 36 50	34 39 30 35 0 17,5	35 0 25 35 22 30
48	35	28	b:m	53 18 57,5	33 2 20	35 26 47,5 35 52 15	35 57 30 36 24 30	36 26 7,5 36 53 37,5
49	56	30	m:b	53 16 31,7	56 44 40	35 41 52,5	36 4 7,5 36 23 50	36 25 25 36 45 32,5
50	60	31	m:b	53 11 45,8	57 59 16,3	36 1 25	36 24 17,5	36 45 12,5
51	52	29	m:b	53 3 38,3	62 29 0	36 20 2,5 37 28 47,5	36 43 12,5 37 50 45	37 4 12,5 38 11 2,5
52	32	28	b:m	53 19 18,8	26 59 38,8	37 46 45 38 42 45	38 9 40 39 23 17,5	38 30 35 39 58 5
53	51	29	m:b	53 3 38,3	71 48 22,5	39 14 27,5 42 0 10	39 57 27,5 42 22 20	40 35 22,5 42 42 30
54	31	28	m:b	53 18 5	76 58 2,5	42 17 50 45 28 30 45 47 2,5	42 41 0 45 50 22,5 46 10 2,5	43 2 0 46 10 15 46 30 25
 55	83	35	q:m	61°58′ 19,2″	65°50′55 ″	44° 47′ 7,5″	45°16′ 7,5″	45°40′ 47,5″
56	85	35	m : q	61 58 19,2	51 28 7,5	45 59 5 41 54 42,5 43 16 57,5	46 30 22,5 42 27 15 43 52 45	46 58 25 42 57 25 44 25 22,5

		**	- 1	D :	F: / '''	0.11	0."	377-1-44
L.	J.	K.	E : A	Prisma	Eintritt	Gelb	Grün	Violett
57	82	35	q : m	61°58′ 19,2″	48°24′40 ′′	42° 6′ 50 ′′ 43 32 22,5	42°42′ 2,5″ 44 11 7,5	43°14′45 ′′ 44 46 35
58	84	35	m : q	61 58 19,2	72 48 33,8	48 1 25 49 6 15	48 29 25 49 36 2,5	48 53 27,5 50 2 37,5
59	81	34	t : m	53°40′ 7,5″	57° 0′ 58,8″	35°42′32,5″ 36 30 25	36° 4′ 50 ″ 36′ 53′ 32,5	36°24′35″ 37 15 32,5
60	80	34	m:t	53 40 7,5	43 0 5	33 53 17,5 34 42 40	34 17 12,5 35 8 12,5	34 40 55 35 32 25
61	79	34	m:t	53 40 7,5	46 57 55	34 2 5 34 47 22,5	34 25 35 35 12 15	34 46 22,5 35 35 52,5
62	87	36	b:q	64°46′45,8″	44° 8′ 53,8″	49° 54′ 52,5′′ 50 53 12,5	50°56′ 25 ′′ 51 59 22,5	51°56′ 10 ′′ 53 4 57,5
63	90	36	b:q	64 46 45,8	64 10 41,3	47 26 15 47 55 5	47 59 10 48 28 47,5	48 30 0 49 0 45
64	86	36	b:q	64 46 45,8	54 27 28,8	46 5 27,5 46 35 37,5	46 43 25 47 15 7,5	47 18 52,5 47 52 22,5
65	91	36	q:b	64 46 45,8	50 50 15	46 31 7,5 47 1 35	47 13 15 47 45 2,5	47 52 55 48 26 22,5
66	89	36	q:b	64 46 45,8	45 50 20	48 31 0 49 7 10	49 23 55 50 2 30	50 14 35 50 55 52,5
67	88	36	b:q	64 46 45,8	77 33 31,3	53 50 30 54 11 5	54 20 40 54 41 55	54 48 47,5 55 11 5
68	78	28	b: §	54°37′ 47,5″	47°36′36,3″	34°53′ 22,5″ 35 34 57,5	35°17′45 ″ 36 0 25	35°38′40″ 36 23 32,5
69	77	28	b : ξ	54 37 47,5	54 6 50	35 46 7,5	36 8 22,5	36 29 37,5
70	75	28	ω:b	76 17 15,8	77 13 56,3	36 24 27,5 67 11 0 69 6 22,5	36 48 7,5 68 10 52,5 70 14 42,5	37 10 55 69 8 0 71 20 22,5
71	74	28	ω :b	76 17 15,8	68 53 50	65 48 20 68 37 22,5	67 11 12,5 70 23 52,5	68 34 52,5 72 17 22,5
72	76	28	b:∞	76 17 15,8	81 13 26,3	69 7 30 71 1 50	70 23 52,5 70 4 45 72 5 25	70 59 17,5 73 6 22,5
73	69	32	ω:μ	52°25′52,5″	73° 4′ 15 ′′	41° 0′ 40 ″	41°20′ 37,5″	41°39′ 7,5″
74	65	32	μ : ω	52 25 52,5	27 16 40	42 42 22,5 34 46 25	43 4 37,5 35 17 35	43 24 52,5 35 45 52,5
75	68	32	ω : μ	52 25 52,5	41 53 45	37 25 27,5 31 38 32,5 33 23 2,5	38 2 32,5 32 0 45 33 48 2,5	38 37 7,5 32 19 30 34 10 42,5
76	67	32	$\mu:\omega$	52 25 52,5	49 59 58,8	32 18 35	32 39 42,5	32 58 5
77	66	32	μ:ω	52 25 52,5	70 27 36,3	33 54 52,5 39 34 55 41 2 37,5	34 18 5 39 54 35 41 24 42,5	34 39 42,5 40 12 32,5 41 44 25
78	61	32	ω:a	59°31′ 58,3″	74°33′ 53,8″	46° 14′ 15″	46°38′40 ″ 48 42 0	47° 0′ 57,5″ 49 6 2,5
79	72	33	ω:a	59 32 10	63 58 17,5	48 15 2,5 40 57 30	41 22 0	41 44 25
80	64	32	a:ω	59 31 58,3	43 31 2,5	43 0 50 38 22 40 40 59 50	43 28 17,5 38 54 27,5 41 37 2,5	43 53 5 39 24 12,5 42 10 52,5
81	70	33	a:ω	59 32 10	50 25 33,8	38 0 17,5	38 27 7,5	38 52 15
82	62	32	ω:a	59 31 58,3	42 14 17,5	40 16 37,5 38 37 32,5 41 16 42,5	40 46 25 39 10 12,5 41 54 22,5	41 14 35 39 39 32,5 42 29 0
83	73	33	a:ω	59 32 10	59 2 52,5	39 23 37,5	39 47 35 41 54 35	40 10 42,5 42 20 42,5
84	63	32	a:ω	59 31 58,3	61 31 37,5	41 27 7,5 40 3 40 42 5 7,5	40 29 52,5 42 34 15	42 20 42,5 40 53 10 42 59 37,5
85	71	33	a:ω	59 32 10	77 35 56,3	48 14 52,5 50 9 25	48 39 2,5 50 37 10	48 59 35 50 59 37,5

Leere Seite Blank page Page vide

Tabelle 7 Einfalls- und Ablenkungsmessungen an den Nonien I und II, sowie Differenzbildung w, δ

		1. Messung	2. Mess.	3. Mess.	Teilmittel	Gesamtmittel	$\underline{\mathbf{w}}$ und δ
Reflekt.	I II	228°11 1/4′ 48 8	$10 \frac{3}{4}$, $7 \frac{1}{2}$		228° 10 8/12′ 48 7 5/13	228° 9 1/24′	
Direkt	I II	327 16 147 13 ³ / ₄	16 14	16 14	327 16 147 13 11/12	327 14 28/24	990 522/24
Gelb		$\begin{array}{ccc} 361 & 1 & \frac{3}{4} \\ 181 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}$	$\frac{1}{0}^{3}/_{4}$	2 ¹ / ₄	$\begin{array}{ccc} 361 & 1^{11}/_{12} \\ 181 & 0^{-5}/_{12} \end{array}$	361 1 4/24	33 46 5/24
Grün		$361 \ 27 \ \frac{3}{4}$ $181 \ 26 \ \frac{1}{2}$	$\frac{27^{1}}{26^{1}}$	$\frac{28^{-1}}{27^{-1}}$	$\begin{array}{ccc} 361 & 27^{11}/_{12} \\ 181 & 26^{-9}/_{12} \end{array}$	361 27 ⁸ / ₂₄	34 12 9/24
Violett		361 52 181 50 ³ / ₄	50 ¹ / ₂ 49	$52 \frac{1}{2}$ $51 \frac{1}{2}$	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	361 51 1/24	34 36 ² / ₂₄
Gelb		361 30 181 29	30 ¹ / ₄ 29	30 ⁸ / ₄ 29 ¹ / ₄	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	361 29 ¹⁷ / ₂₄	34 14 18/24
Grün	I II	361 56 ¹ / ₉ 181 55	$55 \frac{1}{2}$ $54 \frac{1}{2}$	57 ⁸ / ₄ 56 ⁸ / ₄	$361 \ 56 \ {}^{7}/_{12}$ $181 \ 55 \ {}^{5}/_{12}$	361 56	34 41 1/24
Violett	I II	362 23 182 21 ¹ / ₂	23 ¹ / ₂ 22	22 20 ³ / ₄	$362 \ 22^{10}/_{12}$ $182 \ 21^{-5}/_{12}$	362 22 ⁸ / ₂₄	35 7 4/24

Im allgemeinen wurde der Lichtdurchgang in verschiedenen Stellungen des Prismas gemessen. Eintritts- und Austrittsflächen wurden öfters vertauscht (Tab. 8). Stets wurde in folgender Reihe vorgegangen: reflektiert \rightarrow direkt \rightarrow gelb, grün, violett I \rightarrow gelb, grün, violett II, dann zurück und schliesslich nochmals im ersten Sinn. Es liessen sich in der Weise Mittelwerte aus jeweils drei Messungen finden. Tab. 7 bietet ein Beispiel für die Durchführung dieser Messungen (Journ.-Nr. 59). Wie ersichtlich, weichen die Einzelmessungen maximal $1\frac{1}{2}$ voneinander ab. Die letzte Kolonne enthält als Differenzen den Winkel w (zwischen reflektiert und direkt) sowie die Ablenkung δ für die sechs Linien. Aus w berechnet sich nach der selbstverständlichen Formel (180 — w): 2 der Einfallswinkel i_1 .

Die so bestimmten Endmittel aller i_1 - und δ -Werte sämtlicher Messungsreihen sind in Tab. 8 zusammengestellt. Ausser der laufenden Nummer (L) enthält sie auch die Journal- (J) und Kristallnummer (K) und lässt erkennen, welche Flächen zu Ein- und Austrittsebenen (E und A) gewählt wurden. Ob es sich dabei im Einzelfall um eine vordere oder hintere Fläche gehandelt habe, konnte Raumes halber nicht näher vermerkt werden, ist aber wegen der Zentrosymmetrie des Vorganges belanglos. Dass jedes optische Prisma von einer vorderen und einer hinteren Fläche gebildet war, ist eine Selbstverständlichkeit. Zu jedem Einfallswinkel gehören drei

Ablenkungswinkel des einen und drei des anderen Spektrums. Einzig an Kristall Nr. 29 war bei der Messung L. 0 nur das weniger abgelenkte Spektrum zu sehen.

In Tab. 8 sind die Werte, die zu bestimmten Zonen gehören, durch feine Linien voneinander geschieden. Es entsprechen

L.	0 - 54	der	Zone	[001]
	55-58			$[1\overline{1}1]$
	5961			[112]
	6267			[100]
	68-72			$[10\bar{1}]$
	73—77			[110]
	78—85			$[01\bar{1}]$

Zum Einfallswinkel i_1 findet sich der Austrittswinkel i_2 nach der bekannten Beziehung $i_2 = \gamma + \delta - i_1$. Da überdies $r_2 = \gamma - r_1$ ist, liefert das Brechungsgesetz

$$q = \frac{\sin r_1}{\sin i_1} = \frac{\sin r_2}{\sin i_2}$$

für r₁ die Beziehung

$$tg r_1 = \frac{\sin i_1 \sin \gamma}{\sin i_2 + \sin i_1 \cos \gamma} = \frac{Z}{N}$$

Diese Formel wurde mit Hilfe siebenstelliger Logarithmen ausgewertet; es sollte dadurch verhütet werden, dass sich durch die Rechnung Fehler einschleichen, die u. U. grösser sind als jene, die sich aus den Messungen als unvermeidlich ergeben. Die Produkte $\sin i_1 \sin \gamma$ und $\sin i_1 \cos \gamma$ sind für alle sechs Linien einer Messungsreihe konstant und wurden für sich berechnet. Wie sich die übrigen Rechnungen tabellarisch durchführen lassen, ist aus Tab. 9 ersichtlich, wo die Daten der Tabelle 7 ausgewertet sind. log q ergibt sich zweifach. Die beiden Grössen weichen um kaum mehr als fünf Einheiten der letzten Dezimale voneinander ab und erlauben dadurch eine angenehme Kontrolle. Für den endgültigen Wert q^2 wurde vom arithmetischen Mittel ausgegangen. Von log q und log q^2 ist überall in Tab. 9 die Grösse 1 abzuziehen.

Alle auf diese Weise errechneten q^2 -Werte sind in Tab. 10 zusammengestellt. Der Index 1 ist immer der rascheren, also schwächer abgelenkten Welle zugeordnet. Durch den Winkel χ ist die Fortpflanzungsrichtung gegeben. Für Wellen, deren Ebenen parallel zur c-Achse sind (L. 0—54), wird χ von (110) aus über (010) hin positiv gemessen und ergibt sich sowohl aus r_1 wie aus r_2 unter Berück-

Tabelle 10. Richtungen und Geschwindigkeitsquadrate der Wellennormalen.

	Gelb			G	rün	Grün			Violett					
Nr.	χ_{1}	q_1^2	χ_2	q_2^2	χ_1	q_1^2	χ_2	q_2^2	χ	1	q_1^2	χ_2	q_2^2	Nr.
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 12 22 32 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 44 50 51 52 35 54	-96° 52′ 16″ -95° 39′ 49″ -94	4291275 4293640 97792 4301418 01131 06720 12499 60009 57642 59967 58329 59202 59122 60537 63900 54830 58845 53416 53282 53142 49234 46597 45755 38766 34734 35987 38608 29269 25395 19213 12478 12300 4294207 94943 95216 74113 69567 6956	-96° 3′ 53″ -94° 34 6 -93° 23 17 -92° 52° 20 -90° 13 57 -87° 33 48 -54° 30 56 -50° 57° 8 -47° 2 59 -41° 40° 2 18 -39° 47° 35 -30° 50 46 -31° 55 -36° 50 46 -31° 52 1 -30° 52 43 -28° 33° 22 -19° 26° 53 -18° 40° 18 -15° 57° 17 -12° 48° 49° 10° 16° 16° 16° 16° 16° 16° 16° 16° 16° 16	4194973 95232 97449 95584 95891 95615 96067 95497 96807 97080 98816 99007 4200152 03220 4196563 4200783 4196924 4200986 01669 01026 02513 02220 02274 02266 03643 07503 04268 05201 05044 04223 05205 05864 07615 06799 07723 06416 05120 05184 09600 05008 05775 10242 06449 06509 09478 09538 06685 09026 07835 07700 07221 03569	-96° 59′ 22′ -95° 47′ 14′ -94 15 33 -93 3 54 -92 31 42 -89 49 44 -87 5 1 -55 0 9 -51 22 32 -47 23 53 -40 47 1 -40 31 45 -40 11 21 -39 42 4 -37 42 38 -37 30 10 -37 30 22 -32 22 54 -31 22 18 -28 59 13 -26 9 43 -26 2 17 -21 50 29 -20 20 45 -19 41 23 -18 54 22 -16 8 8 -12 57 6 -10 22 26 -8 3 27 -7 37 47 0 0 0 0 0 0 0 9 9 51 10 11 15 11 35 53 13 28 7 19 34 50 20 18 50 20 18 50 20 15 28 23 59 26 24 53 37 26 15 23 27 29 23 27 29 23 29 16 50 30 15 0 32 36 55 32 49 51 38 0 18 38 8 44		-96° 11' 45" -94 42 17 -93 32 0 -93 1 18 -90 23 35 -87 44 34 -54 23 57 -50 51 47 -46 58 11 -41 37 7 -39 51 33 -39 36 43 -39 16 49 -38 48 28 -37 29 29 -36 41 12 -36 41 25 -31 43 58 -30 44 53 -28 26 3 -26 2 17 -21 28 22 -20 0 50 -19 22 12 -18 36 13 -15 53 30 -12 46 0 -10 13 50 -7 57 15 -7 31 57 0 0 0 0 0 9 5 31 10 6 31 11 30 48 13 8 54 19 28 11 20 12 18 21 45 35 24 7 59 24 47 0 26 8 40 27 22 32 29 22 20 30 8 14 32 41 10 32 42 36 33 13 2 34 57 42 36 16 48 37 51 48 38 59 29	4162912 63460 65094 63228 64079 63299 64661 67214 66193 66970 67538 67151 67905 70742 67289 69195 66445 69358 69727 69648 70361 71521 70821 70847 71204 78012 71941 74647 74142 73337 74651 74722 74722 74722 74722 74722 74723 74727 74501 74651 74651 74651 74647 74727 74727 74727 74501 74651 74651 74651 74651 74627 74727 74727 74501 74651 74651 74651 74651 74727 74727 74659 74651 74727 74659 74651 74651 74727 74727 74659 74651 74729 7472	-26	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	4232717 4235103 39382 44665 42318 48169 54367 4302093 01780 01008 01741 00725 00851 03646 4297537 4301535 4297224 91980 96849 91775 84664 89602 79744 77580 72321 81203 64440 65617 58473 48748 52963 36886 28501 29769 11296 08626 07791 00643 4195524 87654 83738 84434 80481 77570 81578 77796 74491 74520 73781 71115 72744 74232 73781 71115	-96° 19' 3" -94 49 50 -93 39 42 -93 9 28 -90 32 35 -87 53 58 -54 17 33 45 -39 41 23 -39 26 47 -39 7 22 -38 39 9 -37 26 55 -36 32 14 -30 38 17 -28 19 39 -26 2 17 -21 23 36 -19 56 35 -19 17 40 -18 32 4 -15 49 42 -12 43 18 -10 11 40 - 7 55 25 - 7 30 15 0 0 0 0 0 9 3 35 10 4 19 11 28 32 12 59 29 19 24 41 20 7 55 21 40 50 24 14 40 24 41 26 2 44 27 16 24 29 27 45 30 1 5 32 45 40 33 35 12 34 49 15 36 19 37 37 42 20 38 50 0	4133232 34220 36540 33799 34388 35151 36070 36163 38058 37658 38277 38075 39938 42653 36593 40056 39177 37155 42808 41023 39640 43397 41470 42630 46108 44709 40755 43520 451520 451520 45173 44463 447657 42995 50745 44338 44463 44799 45171 4463 44743 44657 44869 44790 47177 46138 44869 45354 46671 44665 44869 45354 46671 44625 42650	0 1 2 2 3 4 4 5 6 6 7 8 9 10 11 12 13 14 4 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 43 35 36 37 38 39 40 40 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54
55 56 57 58	25° 20′ 56″ 30 45 49 32 41 21 38 40 50	4274220 75361 76763 79841	25° 44′ 31″ 30 27 16 32 58 21 38 17 18	4195472 98117 4201531 06718	25°30′ 33′ 30 38 22 32 48 28 38 30 35	4242089 44283 45237 47948	25°54′31″ 30 19 29 33 5 45 38 6 43	4162233 65838 68949 73971	30 3 32 5	8' 37" 1 36 4 56 1 53	4215181 16080 16656 20942	26° 3′ 19″ 30 12 33 33 12 22 37 57 25	4132956 37100 39930 45191	55 56 57 58
59 60 61	20° 27′ 26″ 26 25 27 28 28 30	4263731 57495 54670	20°45′ 10″ 26 12 57 28 15 26	4196697 95367 95128	20°35′45′ 26 19 21 28 21 41	4232273 27134 23550	20°53′35″ 26 6 37 28 8 23	4165015 64062 63193	20°4 26 1 28 1	3′ 2″ 3 23 5 43	4204758 4197534 96422	21° 1′ 29″ 26 0 43 28 1 47	4135290 34906 33356	59 60 61
62 63 64 65 66 67	26°56′37″ 28 55 56 31 57 45 34 28 47 36 56 51 39 27 58	4232038 32614 32465 34036 35517 36792	26°50′28″ 29 3 59 31 51 28 34 34 11 37 1 26 39 20 54	4202257 05180 07656 11327 14133 15660	26°50′ 8′ 29 5 7 31 49 51 34 36 13 37 3 31 39 17 39	4200672 01334 01332 02766 04463 05901	26°43′54″ 29°13°14 31°43°24 34°41°41 37°8°11 39°10°28	4170582 73713 75953 79818 82751 84440	29 1 31 4 34 4 37	2 39	4172066 72596 72987 74220 76111 77551	26°37′49″ 29 21 51 31 36 0 34 48 36 37 14 23 39 0 44	4141347 44472 46852 50811 53982 55387	62 63 64 65 66 67
68 69 70 71 72	28° 48′ 1″ 31 54 52 36 42 54 38 43 26 40 14 28	4254722 57685 66793 70235 72678	28°36′ 14″ 31 41 56 37 1 56 39 1 42 39 53 43	4201769 06319 09724 11290 11822	28°41′ 5′ 31 47 20 36 53 0 38 52 50 40 3 51	4223505 27720 36496 39898 41536	28°29′ 9″ 31 34 4 37 12 22 39 11 26 39 42 57	4170072 75220 78465 79995 80276	31 4 37	1 27	4197116 99471 4208958 12080 13116	28°22′49″ 31 26 36 37 21 49 39 20 18 39 33 8	4141746 45709 50175 51492 51548	68 69 70 71 72
73 74 75 76 77	13°16′53″ 17 35 17 26 17 33 30 21 4 38 24 52	4355339 55046 52260 51041 46958	14° 5′ 51″ 17 17 21 26 45 6 29 48 40 37 43 33	4203420 05111 11035 11663 15610	13° 26′ 40′ 17 32 24 26 23 33 30 13 49 38 15 27	4324885 24053 21365 19700 16962	14°16′15″ 17 13 16 26 51 27 29 41 6 37 33 25	4171252 72990 78769 79372 83498	17 2 26 2 30	5' 40'' 8 57 8 33 7 34 6 56	4296941 96611 95661 92795 89853	14°25′38″ 17 9 33 26 57 7 29 34 8 37 24 28	4142310 43963 50005 49722 55170	73 74 75 76 77
78 79 80 81 82 83 84 85	20° 0' 16" 23 8 27 27 3 9 30 35 53 33 10 13 34 29 19 35 29 52 40 8 59	4359628 60326 62653 60834 63627 59525 63557 58487	20°49′ 14″ 23 52 7 26 32 49 30 1 6 33 39 2 33 49 32 34 48 37 39 21 22	4209565 10629 12888 12408 17010 13265 17357 15717	20° 10′ 24′ 23 17 20 26 56 46 30 28 49 33 16 23 34 21 24 35 20 45 39 58 43	4328526 29740 30958 30551 32099 30294 31122 27669	20° 59′ 47″ 24 1 29 26 26 5 29 53 51 33 45 24 33 41 2 34 39 6 39 10 12	4177353 78723 79900 81730 84814 82206 83830 82373	23 2 26 5 30 2 33 2 34 1 35 1	2 18 1 48	4300474 02129 01952 02677 04432 02477 02711 01764	21° 9′ 5″ 24′ 9′ 49 26′ 20′ 6 29′ 47′ 7 33′ 51′ 7 33′ 33′ 3 34′ 30′ 56 39′ 1′ 17	4149010 50349 50688 53284 56028 53133 55088 55737	78 79 80 81 82 83 84 85

Leere Seite Blank page Page vide

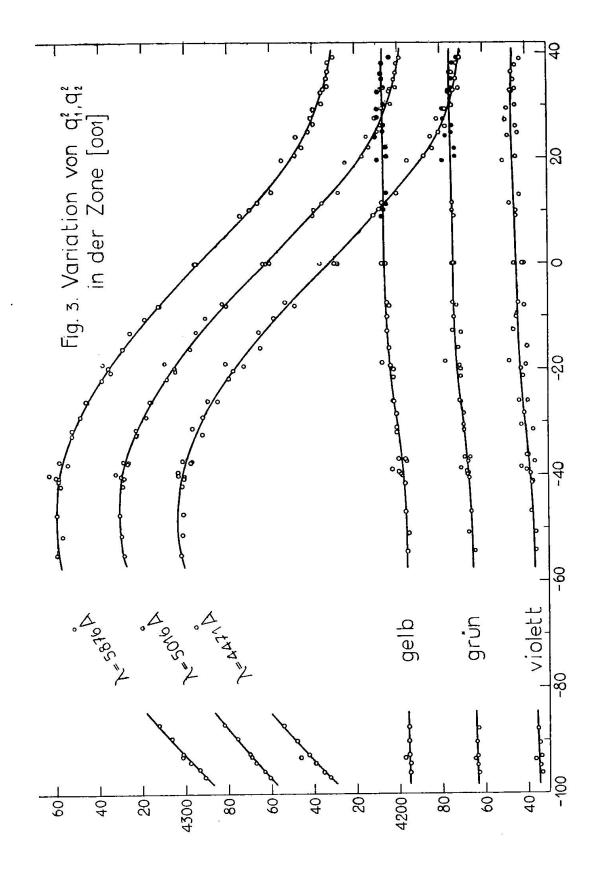
sichtigung des Winkels, den die entsprechenden Flächen des optischen Prismas mit (110) bilden. Die übrigen χ -Werte gehören zu Prismen, die von einer vertikalen und einer schiefen Ebene gebildet sind, z. B. F_1 und F_2 der Fig. 5. S bedeutet darin die Fortpflanzungsrichtung der fraglichen Welle. Unter χ ist der Winkel F S verstanden, wo F die Gegenfläche von F_1 ist. Auch hier ergibt sich χ aus r_1 und r_2 durch gleiche Überlegungen wie im Fall der Zone [001].

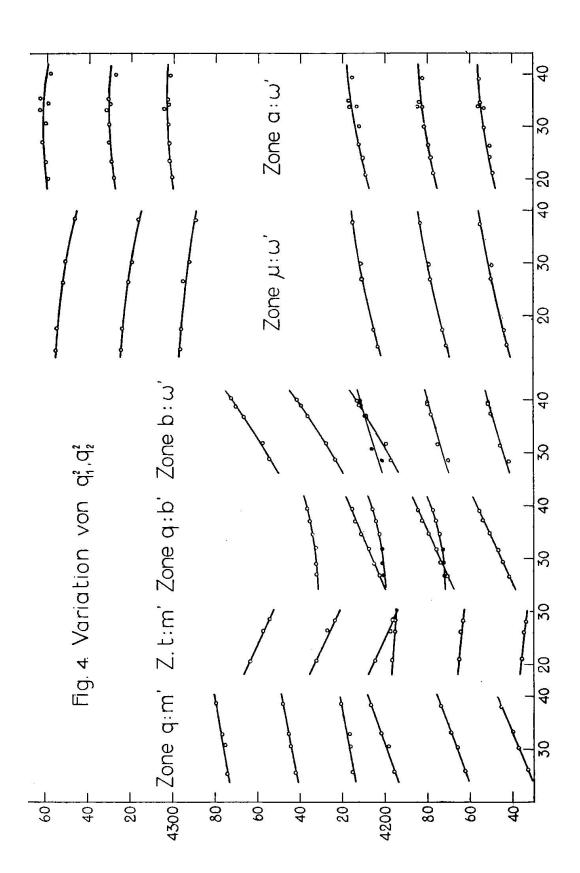
 $\label{eq:constraint} T\,a\,b\,e\,l\,l\,e\,\,9$ Rechnungsschema zur Bestimmung von $r_i\,$ und $\,q_i^2$

	.,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,	ociiciiia zui			41	
	Gelb	Grün	Violett	Gelb	Grün	Violett
γ	53°11°5/72′	5301155/72	53° 11 55/72'	$53^{0}11^{55}/_{72}{}'$	53°1155/72′	53° 11 55/72′
δ	$33 \ 46^{15}/_{72}$	$34 \ 12^{27}/_{72}$	34 36 6/72	34 1454/72	34 41 3/72	$35 \frac{7^{12}}{7^2}$
$\gamma + \delta$	86 5770/72	$87 \ 24^{10}/_{72}$	$87 \ 47^{61}/_{72}$	$87 \ 26^{37}/_{72}$	$87 \ 52^{58}/_{72}$	$88 \ 18^{67}/_{72}$
$\mathbf{i_1}$	40 27 3/72	40 27 8/72	40 27 3/72	40 27 3/72	40 27 3/72	40 27 3/72
$_{2}=\gamma+\delta-\mathrm{i}_{1}$	$46\ 30^{67}/_{72}$	46 57 7/72	$47 \ 20^{58}/_{72}$	$46\ 59^{34}/_{72}$	$47 \ 25^{55}/_{72}$	$47 51^{64}/_{72}$
og sin i2	9,8606737	9,8637851	9,8665636	9,8640653	9,8671399	9,8701485
sin i ₂	0,7255607	0,7307773	0,7354676	0,7312490	0,7364442	0,7415637
$in i_1 \cdot cos \gamma$	0,3886784	0,3886784	0,3886784	0,3886784	0,3886784	0,3886784
$ in i_2 + \sin i_1 \cos \gamma $	1,1142391	1,1194557	1,1241460	1,1199274	1,1251226	1,1302421
og(Z)	9,7155710	9,7155710	9,7155710	9,7155710	9,7155710	9,7155710
og (N)	0,0469784	0,0490069	0,0508227	0,0491898	0,0511998	0,0531715
og tg r ₁	9,6685926	9,6665641	9,6647483	9,6663812	9,6643712	9,6623995
$\mathbf{r_1}$	24°59′45,5″	24°53′37,0″	24°48′ 8,2″	24°53′ 3,9″	24°47′ 0′′	24°41′4,2″
og sin r ₁	9,6258828	9,6242147	9,6227197	9,6240645	9,6224088	9,6207826
og sin i ₁	9,8121065	9,8121065	9,8121065	9,8121065	9,8121065	9,8121065
og q	0,8137763	0,8121082	0,8106132	0,8119580	0,8103023	0,8086761
$_{2} = \gamma - r_{1}$	28°12′0,3″	28°18′8,8″	28°23′37,6″	28°18′41,9″	28°24′45,8″	28°30′41,6″
og sin $(\gamma - r_1)$	9,6744496	9,6758936	9,6771767	9,6760229	9,6774422	9,6788241
og sin ig	9,8606737	9,8637851	9,8665636	9,8640653	9,8671399	9,8701485
og q	0,8137759	0,8121085	0,8106131	0,8119576	0,8103023	0,8086756
og q (mittel)	0,8137761	0,8121083	0,8106131	0,8119578	0,8103023	0,8086758
og q²	0,6275522	0,6242166	0,6212262	0,6239156	0,6206046	0,6173516
q^2	0,4241820	0,4209365	0,4180481	0,4206449	0,4174501	0,4143350

Die Werte der Tab. 10 sind in Fig. 3 und Fig. 4 aufgetragen: χ wurde zur Abszisse und q^2 zur Ordinate gewählt. Zwischen den Punkten 3) hindurch sind in möglichster Annäherung kontinuierliche

³) Im Gebiet, wo sich zwei Kurvenäste kreuzen, sind die q²-Werte, welche dem weniger steilen oder weniger gekrümmten Ast entsprechen, durch ausgefüllte Kreischen gekennzeichnet. Die Verteilung der Kurven von Fig. 4 auf die verschiedenen Farben macht keine Schwierigkeit; q²₁ und q²₂ unterscheiden sich hinreichend durch den Kurvenverlauf.





Kurven gezogen. Für gelb und grün ist die Streuung der Punkte ungefähr gleich. Sie beträgt maximal etwa fünf Einheiten der vierten Dezimale, d. h. ungefähr $^{1}/_{1000}$ des 2 -Wertes. Für violett macht sie etwas mehr aus — wohl deshalb, weil die violetten Linien vom Auge weniger scharf gesehen werden.

Die Streuung hat im einzelnen verschiedene Gründe. Bedeutungsvoll ist vorab die Ungenauigkeit des Prismenwinkels, der sich infolge gekrümmter oder vizinaler Flächenausbildung mit dem wechselnden Lichteinfall etwas zu ändern scheint (Tab. 5). Gerade dieser Umstand dürfte für die Streuung im Gebiete von 200-400 der c-Achsenzone massgebend sein. Es liegen Messungen an vier verschiedenen Kristallen mit gleich orientierten Prismen vor. Die Ergebnisse von drei Kristallen schmiegen sich den Kurven gut an; die vom vierten Kristall gelieferten Punkte stimmen nur in einem mittleren Gebiete, also bei relativ symmetrischem Durchgang der Wellen, befriedigend mit den Kurven überein, entfernen sich aber davon umso mehr, je stärker der Wellendurchgang vom Minimum der Ablenkung abweicht. Da Reflex und Spektrum durchwegs schön sind, so zeigt sich daraus überzeugend, dass einzelne Messungen, selbst wenn sie noch so gut erscheinen, Fehlschlüsse veranlassen können. Ob innere Reflexionen in diesem Fallel mitspielen, konnte nicht entschieden werden.

Die Flächenbeschaffenheit der Eintrittsebene beeinflusst den Gang des reflektierten Lichtes auch etwas. Ist sie nicht besonders gut, so treten selbst bei nicht zu grossen Einfallswinkeln Verbreiterungen des Spaltbildes auf, und das erschwert die genaue Bestimmung von i_1 . Dass die abgelenkte Welle bei angenähert symmetrischem Durchgang die genauesten Messungen gestattet, ist längst bekannt. Wird der Einfallswinkel grösser, so werden die Spaltbilder nicht nur schmäler, sondern rücken sich auch stetig näher. Ein kleinster Messungsfehler von δ wirkt sich demnach unverhältnismässig stark auf q^2 aus. Umgekehrt werden die Spaltbilder der abgelenkten Wellen bei sehr kleinem oder gar negativem Einfallswinkel überaus in die Breite gezogen, so dass die genaue Einstellung abermals erschwert ist.

Die Grösse des Prismenwinkels selber spielt auch eine gewisse Rolle. Ist dieser Winkel beträchtlich, so tritt eine starke Ablenkung auf und die Messungsfehler wirken sich relativ wenig aus. Grosse Prismenwinkel sind aber insofern nachteilig, als dann infolge des baldigen Eintretens der Totalreflexion nur ein kleines Durchgangsgebiet erfasst wird. Es sei hier auf Journ.-Nr. 45 (L. 0) verwiesen, wo das stärker abgelenkte Spektrum, wie schon erwähnt, nicht mehr austritt 4).

Die grosse Streuung in der c-Achsenzone bei $-37^{\,0}$ und $+12^{\,0}$ erklärt sich aus dem Zusammenwirken äusserster Lagen mit kleinem Prismenwinkel, während sie bei $-97^{\,0}$ bis $-87^{\,0}$ eben darum sehr klein ist, weil es sich um Prismenwinkel von $47^{\,0}$ und $70^{\,0}$ handelt. Die ansehnliche Streuung bei $-39^{\,0}$ (Prismenwinkel $=57^{\,0}$) ist aus der extremen Lage des Wellendurchganges begreiflich. Bei anderem Durchgang ergibt das gleiche Prisma sehr gut mit der Kurve übereinstimmende Werte 5).

Aus dem genauen Studium der in Fig. 3 und Fig. 4 dargestellten Kurven zeigt sich sofort, dass die Differenz $D = q_1^2 - q_2^2$ viel genauer ermittelt werden kann als die q^2 -Werte selber. Liegt q_1^2 unteroder oberhalb der gezeichneten Kurve, so befindet sich q_2^2 zumeist fast ebensoviel unter oder über dem andern Kurvenast. Dieses Verhalten stimmt im allgemeinen für alle drei Farben bestens überein. Begründet ist diese grössere Genauigkeit von D dadurch, dass für die drei zusammengehörigen q^2 -Paare Einfalls- und Prismenwinkel unverändert bleiben, sodass die davon herrührenden Fehler in der Differenz wegfallen.

Hier sei noch darauf hingewiesen, dass aus den Kurvenästen der c-Achsenzone die Hauptlichtgeschwindigkeiten angenähert abgelesen werden können. Das Minimum der unteren Kurven, bei ca. — 55°, entspricht dem c²-Wert jeder Farbe, das Maximum der oberen Äste gibt bei fast gleichem Azimut wie soeben je a². Zur mittleren Hauptlichtgeschwindigkeit b² gehört jeweils das Maximum der untern oder das Minimum der oberen Zweige. Wo b² wirklich liegt, kann aus dem Kurvenverlauf nicht erschlossen werden. Da aber in jenem Gebiete, ungefähr bei + 35°, auch die Schwingungsrichtungen mit einem Nicol geprüft und für die unteren Kurven annähernd parallel der c-Achse gefunden wurden, so ist b² das Minimum der oberen Kurven. Es ergeben sich so die Näherungswerte (vgl. Tab. 21):

⁵) Gemäß diesen Feststellungen ist es ratsam, bei solchen Arbeiten äusserste Wellendurchgänge nicht einzubeziehen, d.h. auf eine gewisse Gedrängtheit der Kurvenpunkte zu verzichten — zumal wenn die Flächen weniger gut ausgebildet sind und weder gründlich gereinigt noch vollkommen geschliffen werden können.



⁴) Die Messungen für das weniger stark abgelenkte Spektrum wurden trotzdem durchgeführt, weil die so erhaltenen Punkte für den Verlauf der oberen Kurvenäste wichtig erschienen.

	Gelb	Grün	Violett
a^2	0,4361	0,4330	0,4301
b^2	0,4231	0,4200	0,4172
C^2	0,4195	0,4163	0,4133

Aus diesen Feststellungen und aus dem fast horizontalen Verlauf des unteren Kurvenastes folgt, dass die Schwingungsrichtung n_{γ} nicht allzu stark zur c-Achse geneigt ist.

b) AUSWERTUNG DER MESSERGEBNISSE

Um die Messergebnisse zur Ermittlung der optischen Konstanten auszuwerten, gehen wir vom Indexellipsoid (= Indikatrix) aus. Wir beziehen diese Fläche auf ein Rechtssystem, dessen

x-Achse die Aussennormale zu (110) ist

y- " nach rechts hin zeigt

z- " der positiven c-Achse des Kristalls parallel verläuft (Fig. 1).

Die Gleichung der Indikatrix werde in der Form

$$I(x,y,z) \equiv a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2a_{12} xy + 2a_{23} yz + 2a_{31} zx = 1$$
 (1) geschrieben. Die Fortpflanzungsrichtung sei durch die Richtungscosinus ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 festgelegt. Die zugehörigen Geschwindigkeiten ⁶) q_1 und q_2 sind die Reziproken der Hauptachsen jener Ellipse, in der $I(x,y,z) = 1$ von der zu ψ_1,ψ_2,ψ_3 senkrechten Ebene

$$E(x,y,z) \equiv \psi_1 x + \psi_2 y + \psi_3 z = 0$$
 (2)

geschnitten wird. Es muss also das Abstandsquadrat

$$\frac{1}{a^2} \equiv x^2 + y^2 + z^2 \tag{3}$$

ein Extremum werden und die Koordinaten müssen überdies Gl. 1 und Gl. 2 erfüllen. Mithin gilt:

$$F\left(x,y,z\right)\equiv x^{_{2}}+y^{_{2}}+z^{_{2}}-\lambda_{_{1}}I\left(x,y,z\right)-\lambda_{_{2}}E\left(x,y,z\right)=Extremum.$$

Hierin bedeuten λ_1 und λ_2 noch zu bestimmende Konstanten. Durch partielle Differentiation von F nach x, y und z ergeben sich (Lit. 9) folgende Gleichungen:

$$x - \lambda_{1}(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) - \lambda'_{2}\psi_{1} = 0$$

$$y - \lambda_{1}(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) - \lambda'_{2}\psi_{2} = 0$$

$$z - \lambda_{1}(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) - \lambda'_{2}\psi_{3} = 0$$
(4)

 $^{^6}$) Im Gegensatz zur bisherigen Schreibweise bezeichnen q_1 und q_2 die beiden einer bestimmten Fortpflanzungsrichtung zugeordneten Lichtgeschwindigkeiten.

Aus Symmetriegründen ist für a_{ik} auch a_{ki} gesetzt. Nebstdem ist $2\lambda_2' = \lambda_2$. Werden nun die Gleichungen 4 der Reihe nach mit x, y und z multipliziert und hernach addiert, so kommt:

$$x^{2} + y^{2} + z^{2} - \lambda_{1} I(x, y, z) - \lambda_{2}' E(x, y, z) = 0$$

Mit Berücksichtigung von 1, 2 und 3 folgt hieraus:

$$\lambda_1 = \frac{1}{q^2}$$

Demnach lassen sich die Gl. 4 auf die Form bringen:

$$(q^{2} - a_{11}) x - a_{12} y - a_{13} z = \lambda'_{2} q^{2} \psi_{1}$$

$$- a_{21} x + (q^{2} - a_{22}) y - a_{23} z = \lambda'_{2} q^{2} \psi_{2}$$

$$- a_{31} x - a_{32} y + (q^{2} - a_{33}) z = \lambda'_{2} q^{2} \psi_{3}$$
(5)

Das System 5 wird nach x, y, z aufgelöst. Nach Eintragung der gefundenen Werte in die Gl. 2 kommt für die sogen. Wellennormalenfläche der Ausdruck:

$$q^{4} - q^{2} \left[(a_{22} + a_{33}) \psi_{1}^{2} + (a_{33} + a_{11}) \psi_{2}^{2} + (a_{11} + a_{22}) \psi_{3}^{2} - 2 a_{12} \psi_{1} \psi_{2} - 2 a_{23} \psi_{2} \psi_{3} - 2 a_{31} \psi_{3} \psi_{1} \right]$$

$$+ \left[(a_{22} a_{33} - a_{23}^{2}) \psi_{1}^{2} + (a_{33} a_{11} - a_{31}^{2}) \psi_{2}^{2} + (a_{11} a_{22} - a_{12}^{2}) \psi_{3}^{2} \right]$$

$$- 2 (a_{12} a_{33} - a_{23} a_{31}) \psi_{1} \psi_{2} - 2 (a_{23} a_{11} - a_{31} a_{12}) \psi_{2} \psi_{3}$$

$$- 2 (a_{31} a_{22} - a_{12} a_{23}) \psi_{3} \psi_{1} \right] = 0$$

Abkürzend sei für die auftretenden Funktionen der sechs Polarisationskonstanten $a_{ik} = a_{ki}$ gesetzt:

$$a_{22} + a_{33} = L_{11}$$
 $a_{33} + a_{11} = L_{22}$ $a_{11} + a_{22} = L_{33}$ $-a_{12} = L_{12}$ $-a_{23} = L_{23}$ $-a_{31} = L_{31}$ (7a)

und

$$a_{22}a_{33} - a_{23}^2 = P_{11} \quad a_{33}a_{11} - a_{31}^2 = P_{22} \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = P_{33} a_{23}a_{31} - a_{12}a_{33} = P_{12} \quad a_{31}a_{12} - a_{23}a_{11} = P_{23} \quad a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22} = P_{31}$$
 (7b)

Gl. 6 nimmt so die vereinfachte Gestalt an:

$$\frac{q^{4} - q^{2} \left[L_{11} \psi_{1}^{2} + L_{22} \psi_{2}^{2} + L_{33} \psi_{3}^{2} + 2 L_{12} \psi_{1} \psi_{2} + 2 L_{23} \psi_{2} \psi_{3} + 2 L_{31} \psi_{3} \psi_{1} \right]}{+ \left[P_{11} \psi_{1}^{2} + P_{22} \psi_{2}^{2} + P_{33} \psi_{3}^{2} + 2 P_{12} \psi_{1} \psi_{2} + 2 P_{23} \psi_{2} \psi_{3} + 2 P_{31} \psi_{3} \psi_{1} \right] = 0}$$
(8)

Zur Bestimmung der Richtungscosinus ψ_i ist zu beachten, dass jede Wellenrichtung entweder der Grundzone selber angehört, oder aber einer Zone, die ausser einer schiefen Endfläche F_2 auch eine Ebene F_1 = (hk0) enthält. Die Gegenfläche der letzteren sei F (Fig. 5). Es sei nun φ der über (010) gemessene Winkel (110): F, χ (wie bereits S. 211 vermerkt) der Winkel F: S und endlich ω der Winkel, den die Grundzone mit der Zone F_1F_2 im angedeuteten Sinne

218 Josef Mäder

einschliesst. Für diesen allgemeineren Fall lassen sich aus den in Fig. 5 sofort ersichtlichen sphärischen Dreiecken folgende Beziehungen aufstellen:

$$\cos \psi_1 = \cos \varphi \cos \chi - \sin \varphi \sin \chi \cos \omega$$
$$\cos \psi_2 = \sin \varphi \cos \chi + \cos \varphi \sin \chi \cos \omega$$
$$\cos \psi_3 = \sin \chi \sin \omega$$

Liegt die Wellennormale in der Grundzone, so wird $\chi = 0$. Die Formeln vereinfachen sich daher zu:

$$\cos \psi_1 = \cos \varphi$$
 $\cos \psi_2 = \sin \varphi$ $\cos \psi_3 = 0$

In Tabelle 10 wurde der die Fortpflanzungsrichtung bestimmende Winkel einheitlich und darum auch für die Grundzone χ genannt. Der

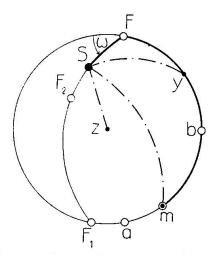


Fig. 5. Festlegung der Wellennormale S im xyz-System. m ist zugleich Ausstichpunkt der x-Achse.

jetzigen Schreibweise zufolge wäre für L. 0—54 χ durch φ oder ψ zu ersetzen.

Leider ist es nicht möglich, für eine beliebige Fortpflanzungsrichtung die beiden zusammengehörigen q²-Werte durch Ablenkungsmessungen direkt zu bekommen. Hingegen zeigt ein Blick auf die Kurven und das Zahlenmaterial, dass die "beobachteten" Geschwindigkeitsquadrate mit den hier in Rede stehenden nahezu übereinstimmen. Es schien deshalb erlaubt, durch Auswertung der Kurven die beobachteten q²-Werte je auf die gleiche Richtung zu reduzieren. Zur Vereinfachung späterer Rechnungen war es angezeigt, diese Reduktion für alle drei Farben auf eine einzige Richtung vorzunehmen. So wurden alle zusammengehörigen, d. h. aus dem gleichen Einfallswinkel erhaltenen q² auf die Richtung von grün I umgerechnet. Hierdurch werden die erforderlichen Korrekturen z. T. positiv, z. T. ne-

Tabelle 11. Reduktion der zu einem i₁-Wert gehörigen Licht-

geschwindigkeitsquadrate auf eine einzige Fortpflanzungsrichtung.

			Gelb				Grün			Violett								
Nr.	$\cos\psi_{1}$	$\cos\psi_2$	$\cos \psi_{\rm 3}$	\mathbf{k}_{1}	k_2	$q_{1}^{2}+q_{2}^{2} \\$	$q_1^2\cdotq_2^2$	$q_{1}^{2}-q_{2}^{2} \\$	k_2	$q_{1}^{2}+q_{2}^{2}$	$q_1^2\cdotq_2^2$	$q_{\rm 1}^{\rm 2}-q_{\rm 2}^{\rm 2}$	$\mathbf{k_1}$	k_2	$q_{1}^{2}+q_{2}^{2}$	$q_1^2\cdotq_2^2$	$q_{1}^{2}-q_{2}^{2} \\$	Nr.
1 2 3 3 4 5 6 6 7 8 9 10 11 1 12 13 14 4 15 6 17 18 19 20 21 22 22 24 22 5 26 27 28 29 30 31 32 33 33 34 4 4 4 4 5 6 4 7 4 8 4 4 9 5 10 5 1 5 2 3 5 3 5 4	1007669 0743986 0534979 0442006 0029089 0508835 5735764 6241070 6768759 7439229 7571852 7600281 7639857 7910456 7933535 8444837 8538537 8747608 8975152 8985390 9282696 9375857 9415685 9460852 9606178 9745661 9811384 1,0 1,0 1,0 9872293 9842470 9795752 9725056 9421550 9377880 9279447 9795752 9725056 9421550 9377880 9279447 9795752 9725056 842293 8871451 8722116 8638356 842253 8402513 8354877 8183168 8067885 7880107 7754957	9949100 9972286 9985679 9990226 9989058 9987045 8191521 7813389 7360971 6682654 6532003 6498903 6452354 6387678 6117572 6087614 5355811 5205130 4845551 4409838 4388939 3719079 3477540 3368214 3239174 2778773 2241007 1799469 1400372 1400372 100 0 0 0 1593069 1767984 2010779 2328796 3351775 3472085 3727179 4064708 4210358 4422887 4614905 4821971 5495090 5747672 5908404 6156615 61313528	0000000	280 320 360 330 350 23 17 0 15 60 60 67 23 120 133 128 140 0 0 0 133 120 100 77 73 0 0 0 83 83 120 120 120 120 120 120 120 120	$\begin{array}{c} 57\\ 63\\ 63\\ 67\\ 00\\ \hline \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ $	8488390 92767 98610 96422 8502281 07745 56099 53069 56704 55344 57733 57849 60419 66838 51333 59283 50100 54032 54564 50090 49110 47975 40850 36858 39469 44147 16611 17406 00071 02558 82015 8481922 76089 71077 64449 63856 53175 51049 57485 48400 45970 50349 49228 42111 44538 42669 39047 40349 40548 39928 33600	1801077 02916 05391 04453 06914 09204 29499 28217 29763 29197 30225 30277 31375 34121 27506 30908 26993 28707 28940 27053 26663 26182 23188 21510 22626 25400 20078 18862 16202 13369 06085 07147 06911 1798465 96002 93886 91099 90872 86358 85467 88192 84355 83333 85185 84714 81710 82738 81948 80421 80971 81055 80793 78123	0098330 0102177 03586 05120 10499 16553 63965 62249 63230 61284 60551 60255 60828 58281 58137 56518 52266 51475 48098 44084 43535 36416 32396 32283 31032 24910 20121 14079 08191 07031 0088343 87328 88417 66470 63231 60827 54081 44656 43159 37003 32952 31393 31052 28741 26486 27001 26519 25879	42 90 47 48 0 103 187 275 183 177 245 163 110 0 0 747 133 147 149 149 149 149 149 149 149 149	8426094 31114 34877 335131 40149 45180 93195 97106 96986 96021 96348 95711 97711 8503455 8493944 98200 92626 92186 92734 88710 86432 88075 78937 75230 75695 87884 69455 69541 64281 33525 36430 34870 13214 13969 10229 8398890 8403930 8403930 8389684 86548 86747 7679 79776 79390 74267 76205 75519 74976	1774726 76822 78405 77825 80589 82672 1802688 04357 04291 03902 04044 03772 04618 07058 03062 04843 02477 02340 02571 800660 1796837 95292 95490 1800669 1792897 92969 90763 86263 87791 79904 79140 78481 6945 69767 68206 63452 65599 59623 583155 60501 57203 56244 59358 58179 54618 55497 55336 53191 54002 53716 53488 51374	0100186 04014 04595 06979 11991 19116 63873 62884 64774 62207 61821 61959 62359 62421 59510 60300 60062 53730 53563 49689 45710 45033 33413 331980 25653 19863 16381 08363 07869 0088956 88146 88196 66066 64709 60769 57052 43210 39900 37271 34857 33255 32232 30216 28361 27462 27431 26467 26837 26113 26578 27739	257 257 280 270 293 330 0 0 7 33 60 30 53 60 107 90 0 150 0 158 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80	$\begin{array}{c} 53\\ 57\\ 48\\ 62\\ 2\\ 33\\ 0\\ 0\\ \hline 100\\ 3\\ \hline 3\\ \hline 3\\ \hline 2\\ 2\\ 1\\ \hline 2\\ 5\\ \hline 3\\ \hline 3\\ \hline 3\\ \hline 2\\ 2\\ 1\\ \hline 5\\ 7\\ \hline 7\\ \hline 3\\ \hline 3\\ \hline 6\\ 6\\ 0\\ 0\\ \hline 9\\ \hline 9\\ \hline 6\\ 8\\ 0\\ 0\\ \hline 7\\ \hline 4\\ \hline 4\\ 7\\ \hline 7\\ \hline 7\\ \hline 7\\ \hline 9\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 12\\ 2\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\$	8368645 73916 81605 76514 82922 89881 8438143 37943 38966 39333 38732 38661 43084 46051 34097 41434 36271 29085 39566 32815 24304 32999 21257 20287 12405 29272 04162 11778 03245 8389527 96537 82406 69638 71482 55686 53298 55380 43308 43169 32743 23724 22320 31169 26312 19199 21722 19862 15931 18045 20923 16673 18045	1750595 52784 55989 53854 56510 59395 79368 79286 79739 79885 79642 79609 81471 82743 77702 80790 78640 75636 80061 77239 73697 77352 72460 72074 68775 75871 65358 68592 65039 59312 62246 44338 45219 40188 41413 35454 33834 35253 31499 351849 40188 41413 35454 33834 35832 32075 31499 351849 40188 41413 35454 338344 335832 32075 31499 351849 40188 41413 35454 338344 35832 32075 31499 351849 351849 40188 41413 35454 338344 35832 32075 31499 351849 351849 351849 351849 351849 351849 351849 351849 351849	05362 08357 08727 14002 19513 66003 65617 63050 64163 62811 63161 63725 61341 61017 61822 58297 55089 54204 46205 38522 35139 32542 33374 24985 19666 13861 08100 09542	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 33 33 33 34 44 44 45 46 47 48 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47
55 56 57 58	8604458	0877990 1038533 1104093 1269255	4988463	50	186 148 148 266	8469506 73576 78205 86723	1793158 94889 96857 1800479	0078934 77046 75439 72755	320 284 288 478	8404002 10405 13898 22397	1765521 68220 69695 73284	0080176 78161 76576 73499	0 33 42 160	513 405 398 696	8347624 53618 56146 66989	1741900 44419 45481 50021	0082738 78608 77082 75215	55 56 57 58
59 60 61	9360596 8963576 8799251	1946744 2452961 2628802		152 126 147	$ \begin{array}{c} 0 \\ \hline{2}8 \\ \hline{3}1 \end{array} $	8460276 52960 49914	1789295 86216 84937	0066882 62282 59720	0 <u>5</u> 1 66	8397288 91145 86677	1762748 60183 58318	0067258 63123 60423	$\frac{1}{1}$ 17 $\frac{1}{1}$ 14 $\frac{1}{1}$ 20	$\begin{array}{c} \underline{60} \\ \overline{81} \\ \overline{100} \end{array}$	8340225 32245 29558	1738863 35560 34439	0069525 62595 63046	59 60 61
62 63 64 65 66 67	6426945 6398857 6351136 6288366 6220035 6148220	6124582 5856260 5572702 5308917	5036594 5422310	22 40 40 37 56 103	4 20 32 41 38 47	8434269 37854 40049 45441 49744 52302	1778400 79916 80845 83124 84943 86024	0029763 27454 24801 22705 21402 21076	114 162 129 109 89 96	8371368 74885 77414 82475 87125 90437	1751973 53448 54511 56634 58585 59974	0029976 27783 25250 23057 21801 21365	$ \begin{array}{r} 10 \\ \hline 37 \\ 42 \\ \hline 68 \\ \hline 81 \\ 143 \\ \end{array} $	214 307 277 248 192 254	8313637 16724 20158 24715 29820 33335	1727891 29177 30609 32508 34635 36100	0030515 28394 25900 23589 22240 22053	62 63 64 65 66 67
68 69 70 71 72	3040553 2660520 2018894 1762626 1609970	8630597 8484541	3912531 4293540 4892514 5117085 5247037	188 320 298	$\begin{array}{c} 114 \\ \underline{104} \\ \underline{113} \\ \overline{112} \\ 128 \end{array}$	8456444 63920 76724 81711 84292	1787717 90883 96289 98397 99489	0052678 51074 57502 59355 60392	238 221 161 143 139	8393815 8403161 14800 19750 21951	1761333 65260 70137 72215 73138	0053195 52279 58192 60046 61121	128 173 245 230 258	365 367 384 321 308	8339355 45720 58504 63021 65230	1738545 41204 46528 48411 49332	0055133 53568 58922 60679 61518	68 69 70 71 72
73 74 75 76 77	5231621 5107806 4750688 4560540 4098031	8199183 8052678 7595067 7340225 6702625	3010768 4443639		392 150 179 210 319	8558367 60320 63072 62974 63012	1830561 31416 32655 32628 32699	0152311 49798 41360 39228 31154	496 191 233 276 420	8495641 97234 99901 99348 8500880	1803804 04506 05698 05483 06182	0154129 50872 42829 40052 33044	0 12 25 51 85	590 230 236 331 510	8438661 40792 45455 42797 45448	1779673 80594 82610 81512 82690	0155221 52406 45917 42691 34088	73 74 75 76 77
78 79 80 81 82 83 84 85	7844208 7576441 7232788 6873599 6572181 6450630 6336381 5782404	5419722 5504735 5565338 5598187 5607405	4169493 4666976 5046459 5190992 5322759	9 0 12 20 26 30	455 324 160 138 77 106 107 100	8568772 70640 75701 73392 80540 72922 81051 74355	1835030 35834 38007 37026 40104 36841 40327 37480	0150552 50030 49605 48300 46674 46180 46123 42721	572 411 206 175 97 108 140 81	\$505307 08052 11064 12456 16816 12608 15092 10123	1807931 09100 10386 10995 12861 11065 12128 10028	0151745 51428 50852 48646 47382 47980 47152 45215	50 40 10 0 0 8 0 29	688 525 244 250 117 242 167 96	8448736 51913 52894 56211 60343 55844 57966 57568	1783950 85291 85715 87132 88884 86977 87886 87729	0152092 52265 51030 49143 48521 49094 47456 45902	81 82 83 84

Leere Seite Blank page Page vide

gativ und haben in der Gesamtheit zumeist die geringsten Absolutwerte. Die Umrechnung liess sich leicht durchführen. Die q^2 -Kurven wurden in grossem Masstab aufgetragen (eine Einheit der vierten Dezimale = 1 mm; 1^0 = 4 mm). Die Korrektur der Winkel ergibt sich aus Tab. 10 als Differenz der Fortpflanzungsrichtung χ von grün I und jener χ -Werte, die den zu ändernden q^2 -Grössen entsprechen. In den zugehörigen q^2 -Punkten wird die Tangente an die Kurve gezogen, die q^2 -Änderung pro p^2 0 entnommen und daraus der Reduktionsbetrag berechnet. Dieser beträgt maximal 7 Einheiten der fünften Dezimale, meistens liegt er aber unter drei Einheiten und ist oft sehr klein. In jedem Fall ist er kleiner als die vermutliche Unsicherheit der gemessenen q^2 -Werte. Das Vorzeichen wird aus dem steigenden oder sinkenden Kurvenverlauf entnommen.

Die so erhaltenen Korrekturwerte sind in Tab. 11 — zugleich mit den nunmehr für alle Farben übereinstimmenden Richtungscosinus ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 — zusammengestellt. k_1 bedeutet die Korrektur an q_1^2 , k_2 die an q_2^2 . Da sich die Korrekturen auf die Richtung von grün I beziehen, wird für diese Farbe k_1 immer null und ist darum nicht aufgenommen.

Werden nun die errechneten k_1 - und k_2 -Werte zu den in Tab. 10 aufgeführten q^2 -Grössen hinzugezählt (unter Berücksichtigung des Vorzeichens, das, wenn negativ, in Tab. 11 je über die erste Ziffer von k_1 und k_2 gesetzt ist), so finden sich leicht die Summen, Produkte und Differenzen der beiden Geschwindigkeitsquadrate einer Fortpflanzungsrichtung. Diese sind in Tab. 11 — entsprechend Anm. 6 S. 216 als $q_1^2 + q_2^2$, $q_1^2 \cdot q_2^2$, $q_1^2 - q_2^2$ für die verschiedenen Farben aufgeführt. Es ist also wohl zu beachten, dass, trotz der unveränderten Bezeichnungsart, q^2 in Tab. 10 und Tab. 11 nicht genau das Gleiche bedeutet.

Um die Tab. 10 und 11 etwas leserlicher zu gestalten, sind bei den Kolonnen der Geschwindigkeitsquadrate und ihrer Funktionen die beiden ersten Dezimalen nicht ständig wiederholt. Sie haben also an irgend einer Stelle jenen Wert, welcher in der fraglichen Kolonne irgendwo zuvor notiert wurde.

Beim aufmerksamen Durchgehen der Kolonnen für $q_1^2 + q_2^2$ und $q_1^2 \cdot q_2^2$ stellt man mit Leichtigkeit in der vierten Dezimale verschiedene Unregelmässigkeiten fest. In den Kolonnen für $q_1^2 - q_2^2$ machen sie sich im allgemeinen erst in der fünften Dezimale geltend. Wegen der hohen Genauigkeit der Differenzen $q_1^2 - q_2^2$ wäre es verlockend, die optischen Konstanten einzig auf Grund der "Doppelbrechung"

zu finden. Leider ist das nicht angängig, weil das entsprechende Gleichungssystem (S. 222) nicht linear unabhängig ist.

Mit $q_1^2 + q_2^2$ und $q_1^2 \cdot q_2^2$ lässt sich Gl. 8 zerlegen und auf eine für die Rechnung bequemere Form bringen. Es ist nämlich:

$$L_{11}\psi_1^2 + L_{22}\psi_2^2 + L_{33}\psi_3^2 + 2L_{12}\psi_1\psi_2 + 2L_{23}\psi_2\psi_3 + 2L_{31}\psi_3\psi_1 = q_1^2 + q_2^2 \quad (9a)$$
 und

$$P_{11}\psi_1^2 + P_{22}\psi_2^2 + P_{33}\psi_3^2 + 2P_{12}\psi_1\psi_2 + 2P_{23}\psi_2\psi_3 + 2P_{31}\psi_3\psi_1 = q_1^2 \cdot q_2^2 \quad (9b)$$

 L_{ik} und P_{ik} sind die Unbekannten. Für die Fälle 1—54 der Tab. 11, wo überall $\psi_3 = 0$ ist, vereinfachen sich diese Gleichungen zu

$$L_{11} + (L_{22} - L_{11}) \sin^2 \psi_1 + 2 L_{12} \sin \psi_1 \cos \psi_1 = q_1^2 + q_2^2 \quad (10a)$$

$$P_{11} + (P_{22} - P_{11}) \sin^2 \psi_1 + 2P_{12} \sin \psi_1 \cos \psi_1 = q_1^2 \cdot q_2^2$$
 (10b)

Zur Berechnung der sechs Konstanten dieser zwei Gleichungen diente das reichhaltige Zahlenmaterial der Tab. 11, L. 1—54. Es kam das Gauss'sche Ausgleichungsverfahren zur Verwendung. L. 7, 8, 9 und 38—46 wurden aber weggelassen, weil an diesen Stellen der Kurvenverlauf zu unsicher schien. Die gefundenen L_{ik} und P_{ik} sind in Tab. 12 zusammengestellt.

Tabelle 12
Die Konstanten der Wellennormalengleichung

	Gelb	Grün	Violett		Gelb	Grün	Violett
\mathbf{L}_{11}	0,8499032	0,8435957	0,8376225	P_{11}	0,1805649	0,1778945	0,1753838
L_{22}	0,8500219	0,8437971	0,8382644	$\mathbf{P_{22}}$	0,1806038	0,1779670	0,1756395
L_{33}	0,8576741	0,8505318	0,8459574	P_{33}	0,1838634	0,1808136	0,1788698
$\mathbf{L_{12}}$	Ō,00616 5 9	0,0063608	0,0063696	P_{12}	$\bar{0},0025886$	0,0026509	0,0026360
L_{23}	$\bar{0},0018452$	0,0015432	0,0018865	P_{23}	$\bar{0},0007712$	$\bar{0},0006372$	0,0007767
L_{31}	0,0034518	$\bar{0},0032024$	$\bar{0},0032858$	$\mathbf{P_{31}}$	0,0014673	0,0013510	$\bar{0},0013752$

Durch diese L_{ik} und P_{ik} lassen sich alle a_{ik} bestimmen — leider nicht eindeutig. Schon Brill (Lit. 1) hat diese Vieldeutigkeit aufgezeigt. Eindeutige Beziehungen ergeben sich, sobald Fortpflanzungsrichtungen schief zur c-Achse berücksichtigt werden. Hierfür gelten die Gleichungen 9. Schon aus 9 a lassen sich die a_{ik} vollständig bestimmen. Trotzdem schien es angezeigt, auch 9 b mitzuberücksichtigen. Wiederum wurde nach dem Gauss'schen Ausgleichungsverfahren vorgegangen. Dabei wurden jedoch die bereits errechneten Werte L₁₁, L₂₂, L₁₂, P₁₁, P₂₂, P₁₂, die sich auf zwei Drittel aller Beobachtungen stützen, als richtig angenommen und in 9 a bezw. 9 b eingesetzt, sodass nur je ein Gleichungssystem mit drei Unbekannten zu lösen war. Auf diese Weise wurden aus den 31 Angabenreihen

für die zur c-Achse schiefen Richtungen (L. 55—85 der Tab. 11) die ebenfalls in Tab. 12 aufgenommenen Grössen L_{33} , L_{23} , L_{31} , P_{33} , P_{23} , P_{31} bestimmt.

Nach 7 a lassen sich die a_{ik} aus den L_{ik} sehr leicht finden. Aber auch die P_{ik} eignen sich für diese Berechnung. Aus der zweiten Reihe von 7 b kommt nämlich:

$$a_{11} = \frac{a_{31}a_{12} - P_{23}}{a_{23}} \quad a_{22} = \frac{a_{12}a_{23} - P_{31}}{a_{31}} \quad a_{33} = \frac{a_{23}a_{31} - P_{12}}{a_{12}} \quad (11)$$

Die Einsetzung dieser Ausdrücke in die erste Reihe von 7b führt nach einigen Umformungen auf das symmetrische Gleichungssystem:

$$P_{11} a_{31} a_{12} + P_{12} a_{12} a_{23} + P_{13} a_{23} a_{31} = P_{31} P_{12}$$

$$P_{12} a_{31} a_{12} + P_{22} a_{12} a_{23} + P_{23} a_{23} a_{31} = P_{12} P_{23}$$

$$P_{13} a_{31} a_{12} + P_{23} a_{12} a_{23} + P_{33} a_{23} a_{31} = P_{23} P_{31}$$
(12)

Da die P_{ik} bekannt sind, lassen sich die Produkte $a_{31}a_{12}$, $a_{12}a_{23}$, $a_{23}a_{31}$ eindeutig finden. Nun werden diese zu zweien multipliziert und durch das dritte dividiert. Es ergeben sich so a_{12}^2 , a_{23}^2 , a_{31}^2 , also auch die Absolutwerte a_{12} , a_{23} , a_{31} . Die Vorzeichen dieser drei a_{ik} sind durch die Gl. 11 eindeutig bestimmt, da a_{11} , a_{22} und a_{33} notwendig positive Grössen sind. So werden schliesslich alle sechs Polarisationskonstanten erhalten. Sie sind mit den vorher aus L_{ik} errechneten in Tab. 13 aufgenommen. Die Übereinstimmung beider ist z. T. recht gut. Den weiteren Rechnungen wurden die Mittelwerte (Tab. 14) zugrunde gelegt.

 $\label{eq:tabelle} Tabelle~13$ Die zu L ik und P ik gehörigen Polarisationskonstanten a ik

	Ge	lb	Gr	ün	Violett			
	aus L _{ik}	aus Pik	aus L_{ik}	aus P_{ik}	aus L_{ik}	aus P_{ik}		
a ₁₁	0,4288964	0,4288477	0,4253666	0,4252933	0,4232997	0,4233044		
a_{22}	0,4287777	0,4288233	0,4251652	0,4252379	0,4226578	0,4226503		
a_{33}	0,4211255	0,4211687	0,4184305	0,4184902	0,4149647	0,4149483		
a ₁₂	0,0061659	0,0061612	0,0063608	0,0063461	0,0063696	0,0063674		
a_{23}	0,0018452	0,0018477	0,0015432	0,0015460	0,0018865	0,0018841		
a_{31}	0,0034518	0,0034481	0,0032024	0,0032000	0,0032808	0,0032820		

Tabelle 14 Aus Tab. 13 errechnete Mittelwerte der a_{ik}

	$\mathbf{a_{11}}$	$\mathbf{a_{22}}$	a ₃₈	a_{12}	a_{23}	a_{31}
Gelb	0,4288720	0,4288005	0,4211471	0,0061635	0,0018465	0,0034500
Grün	0,4253300	0,4252016	0,4184604	0,0063535	0,0015446	0,0032012
Violett	0,4233020	0,4226540	0,4149565	0,0063685	0,0018853	0,0032814

Eine Rückberechnung der q_1^2 und q_2^2 aus den a_{ik} in verschiedenen Richtungen zeigt, dass gegenüber den Messwerten noch erhebliche Abweichungen bestehen, die besonders stark in der Differenz der Lichtgeschwindigkeitsquadrate zur Geltung kommen. Es wurde darum versucht, die a_{ik} auf Grund der Differenzen $q_1^2 - q_2^2$, die ja bedeutend genauer sind als $q_1^2 + q_2^2$ und $q_1^2 \cdot q_2^2$, endgültig zu verbessern. Aus der Normalenfläche (Gl. 6) lässt sich für $(q_1^2 - q_2^2)^2$ der nicht gerade einfache Ausdruck 13 herleiten, falls

$$\cos \psi \equiv \psi$$
 und $\sin \psi \equiv \Psi$

gesetzt wird.

$$\begin{aligned} (q_1^2 - q_2^2)^2 &= a_{11}^2 \, \Psi_1^4 + a_{22}^2 \, \Psi_2^4 + a_{33}^2 \, \Psi_3^4 \\ &+ 4 \, a_{12}^2 \, \Psi_1^2 \, \Psi_2^2 + 4 \, a_{23}^2 \, \Psi_2^2 \, \Psi_3^2 + 4 \, a_{31}^2 \, \Psi_3^2 \, \Psi_1^2 \\ &+ 2 \, a_{22} \, a_{33} \, (\psi_2^2 \psi_3^2 - \psi_1^2) + 2 \, a_{33} \, a_{11} \, (\psi_3^2 \psi_1^2 - \psi_2^2) + 2 \, a_{11} \, a_{22} \, (\psi_1^2 \psi_2^2 - \psi_3^2) \\ &- 4 \, a_{12} \, a_{11} \, \psi_1 \, \psi_2 \, \Psi_1^2 - 4 \, a_{12} \, a_{22} \, \psi_1 \, \psi_2 \, \Psi_2^2 + 4 \, a_{12} \, a_{33} \, \psi_1 \, \psi_2 \, (1 + \psi_3^2) \\ &- 4 \, a_{23} \, a_{22} \, \psi_2 \, \psi_3 \, \Psi_2^2 - 4 \, a_{23} \, a_{33} \, \psi_2 \, \psi_3 \, \Psi_3^2 + 4 \, a_{23} \, a_{11} \, \psi_2 \, \psi_3 \, (1 + \psi_1^2) \\ &- 4 \, a_{31} \, a_{33} \, \psi_3 \, \psi_1 \, \Psi_3^2 - 4 \, a_{31} \, a_{11} \, \psi_3 \, \psi_1 \, \Psi_1^2 + 4 \, a_{31} \, a_{22} \, \psi_3 \, \psi_1 \, (1 + \psi_2^2) \\ &- 8 \, a_{12} \, a_{23} \, \psi_3 \, \psi_1 \, \Psi_2^2 - 8 \, a_{23} \, a_{31} \, \psi_1 \, \psi_2 \, \Psi_3^2 - 8 \, a_{31} \, a_{12} \, \psi_2 \, \psi_3 \, \Psi_1^2 \end{aligned}$$

Die errechneten a_{ik} seien mit den Fehlern α_{ik} behaftet. Es ist also der wahre Wert $a_{ik} = a_{ik}$ -berechnet $+ \alpha_{ik}$. Im Hinblick auf Tab. 13 scheint es zum vorneherein wahrscheinlich, dass die α_{ik} höchstens die vierte Dezimale der a_{ik} beeinflussen. Unter dieser Voraussetzung ist es ein Leichtes, bei Vernachlässigung Glieder höherer Ordnung Gl. 13 linear zu machen. Sie nimmt dann die Gestalt an:

$$\Sigma k_{ik} \alpha_{ik} = (q_1^2 - q_2^2)^2 - \frac{1}{2} \Sigma k_{ik} a_{ik},$$
 (14)

worin

$$\begin{array}{l} k_{11} &= 2\,a_{11}\,\,\mathcal{H}_{1}^{4} + 2\,a_{22}\,(\psi_{1}^{2}\psi_{2}^{2} - \psi_{3}^{2}) + 2\,a_{33}\,(\psi_{3}^{2}\psi_{1}^{2} - \psi_{2}^{2}) \\ &\quad - 4\,a_{31}\,\psi_{3}\,\psi_{1}\,\,\mathcal{H}_{1}^{2} - 4\,a_{12}\,\psi_{1}\,\psi_{2}\,\,\mathcal{H}_{1}^{2} + 4\,a_{23}\,\psi_{2}\,\psi_{3}\,(1 + \psi_{1}^{2}) \\ k_{22} &= 2\,a_{22}\,\,\mathcal{H}_{2}^{4} + 2\,a_{33}\,(\psi_{2}^{2}\psi_{3}^{2} - \psi_{1}^{2}) + 2\,a_{11}\,(\psi_{1}^{2}\psi_{2}^{2} - \psi_{3}^{2}) \\ &\quad - 4\,a_{12}\,\psi_{1}\,\psi_{2}\,\,\mathcal{H}_{2}^{2} - 4\,a_{23}\,\psi_{2}\,\psi_{3}\,\,\mathcal{H}_{2}^{2} + 4\,a_{31}\,\psi_{3}\,\psi_{1}\,(1 + \psi_{2}^{2}) \\ k_{33} &= 2\,a_{33}\,\,\mathcal{H}_{3}^{4} + 2\,a_{11}\,(\psi_{3}^{2}\psi_{1}^{2} - \psi_{2}^{2}) + 2\,a_{22}\,(\psi_{2}^{2}\psi_{3}^{2} - \psi_{1}^{2}) \\ &\quad - 4\,a_{23}\,\psi_{2}\,\psi_{3}\,\,\mathcal{H}_{3}^{2} - 4\,a_{31}\,\psi_{3}\,\psi_{1}\,\,\mathcal{H}_{3}^{2} + 4\,a_{12}\,\psi_{1}\,\psi_{2}\,(1 + \psi_{3}^{2}) \\ k_{12} &= 4\,a_{33}\,\psi_{1}\,\psi_{2}\,(1 + \psi_{3}^{2}) - 4\,a_{11}\,\psi_{1}\,\psi_{2}\,\,\mathcal{H}_{1}^{2} - 4\,a_{22}\,\psi_{1}\,\psi_{2}\,\,\mathcal{H}_{2}^{2} \\ &\quad + 8\,a_{12}\,\,\mathcal{H}_{1}^{2}\,\mathcal{H}_{2}^{2} - 8\,a_{23}\,\psi_{3}\,\psi_{1}\,\,\mathcal{H}_{2}^{2} - 8\,a_{31}\,\psi_{2}\,\psi_{3}\,\,\mathcal{H}_{1}^{2} \\ k_{23} &= 4\,a_{11}\,\psi_{2}\,\psi_{3}\,(1 + \psi_{1}^{2}) - 4\,a_{22}\,\psi_{2}\,\psi_{3}\,\,\mathcal{H}_{2}^{2} - 4\,a_{33}\,\psi_{2}\,\psi_{3}\,\,\mathcal{H}_{3}^{2} \\ &\quad + 8\,a_{23}\,\,\mathcal{H}_{2}^{2}\,\mathcal{H}_{3}^{2} - 8\,a_{31}\,\psi_{1}\,\psi_{2}\,\,\mathcal{H}_{3}^{2} - 8\,a_{12}\,\psi_{3}\,\psi_{1}\,\,\mathcal{H}_{2}^{2} \\ k_{31} &= 4\,a_{22}\,\psi_{3}\,\psi_{1}\,(1 + \psi_{2}^{2}) - 4\,a_{33}\,\psi_{3}\,\psi_{1}\,\,\mathcal{H}_{3}^{2} - 4\,a_{11}\,\psi_{3}\,\psi_{1}\,\,\mathcal{H}_{1}^{2} \\ &\quad + 8\,a_{31}\,\,\mathcal{H}_{3}^{2}\,\mathcal{H}_{1}^{2} - 8\,a_{12}\,\psi_{2}\,\psi_{3}\,\,\mathcal{H}_{1}^{2} - 8\,a_{23}\,\psi_{1}\,\psi_{2}\,\mathcal{H}_{3}^{2} \end{array}$$

In mühsamer Arbeit wurden für sämtliche 85 Richtungspaare die k_{ik} berechnet — sie vereinfachen sich wesentlich, wenn $\psi_3=0$, $\Psi_3{}^2=1$ ist — und die der Fehlergleichung 14 entsprechenden numerischen Ausdrücke berechnet. Mit ihnen wurde nach dem Gauss'schen Verfahren für jede Farbe das symmetrische Gleichungssystem mit den sechs Unbekannten α_{ik} aufgestellt. Als Beispiel sei das für violettes Licht gefundene hergesetzt:

System 15 ist nicht lösbar, weil $k_{11}^2 + k_{22}^2 + k_{33}^2 \equiv 0$. Diese Beziehung kann am Beispiel leicht nachgeprüft, aber auch allgemein bewiesen werden. Um ein lösbares Gleichungssystem zu erhalten, wurden zu den 85 Fehlergleichungen noch 9 weitere hinzugenommen, die sich durch Berücksichtigung möglichst zuverlässiger Punkte des oberen Kurvenzweiges von Fig. 3 ergeben. Gewählt wurden L. 1, 6, 9, 22, 29, das Mittel aus 32, 33, 34 (= senkrechter Einfall auf m), 36, 43 und 51. Da $\psi_3 = 0$, vereinfacht sich für diese Punkte Gl. 6. Wird wiederum wie vorhin die an a_{ik} anzubringende Änderung α_{ik} genannt, so folgt unter Voraussetzung kleiner Korrekturen die Fehlergleichung

$$\Sigma k'_{ik} \alpha_{ik} = C$$

Darin ist:

$$\begin{split} k'_{11} &= (q^2 - a_{33}) \, \, \Psi^2 & k'_{12} &= \, 2 \, (a_{33} - q^2) \, \psi \, \Psi \\ k'_{22} &= (q^2 - a_{33}) \, \psi^2 & k'_{23} &= \, 2 \, a_{23} \, \psi^2 - 2 \, a_{31} \, \psi \, \Psi \\ k'_{33} &= \, q^2 - a_{22} \, \psi^2 - a_{11} \, \, \Psi^2 + 2 \, a_{12} \, \psi \, \Psi & k'_{31} &= \, 2 \, a_{31} \, \Psi^2 - 2 \, a_{23} \, \psi \, \Psi \end{split}$$

Die neuen Fehlergleichungen ergeben mit den 85 früheren ein symmetrisches Gleichungssystem, dessen Koeffizienten linear unabhängig sind. Als Beleg sei wieder das für violettes Licht mitgeteilt.

Ein Vergleich der Systeme 15 und 16 zeigt, dass die einzelnen Koeffizienten durch Hinzunahme der neuen Gleichungen nicht wesentlich beeinflusst wurden. Der Hauptanteil der Korrekturen rührt also wohl noch von $q_1^2 - q_2^2$ her.

Die Auflösung der drei Systeme von der Art 16 liefert die α_{ik} für alle verwendeten Wellenlängen. Diese Werte sind in Tab. 15 zusammengestellt. Dass sie nicht alle Fehlergleichungen einzeln erfüllen, ist selbstverständlich; sie bewirken nur, dass die Summe aller Unterschiede zwischen den berechneten und beobachteten $(q_1^2 - q_2^2)^2$ -Werten den kleinsten Betrag annimmt.

Tabelle 15 Korrekturen der a_{ik}-Mittelwerte

	a_{11}	a_{22}	a_{33}	a_{12}	a_{23}	a_{31}
Gelb	0,0007512	$\bar{0},0000440$	$\bar{0},0002917$	0,0001352	0,0001311	0,0000389
Grün	0,0016275	0,0006916	$\bar{0},0008955$	$\bar{0},0003224$	0,0002285	0,0000973
Violett	0,0006202	0,0001742	$\bar{0},0002783$	$\bar{0},0002109$	0,0001051	0,0000680

An Hand der Tab. 15 lassen sich bedeutungsvolle Feststellungen machen.

- a) Die α_{ik} sind, wie vorausgesetzt und erwartet, kleine Werte, die mit Ausnahme von α_{11} -grün die 4. Dezimale nie überschreiten. Gegen die Grundlagen des Systems 16 sind also keine ernsthaften Einwendungen zu machen. Immerhin lassen die verhältnismässig grossen Korrekturen für grün vermuten, dass die daraus gewonnenen Schlusswerte nicht so sicher sind, wie die der andern Farben.
- b) Die grössten Korrekturen sind bei allen Farben an a_{11} anzubringen. α_{11} hat überhaupt den wesentlichsten Anteil an der Fehlerquadratsumme. Es war also offenbar verfehlt, die aus L. 1—54 gewonnenen zwei Konstantentripel L_{ik} und P_{ik} unbesehen einzusetzen, als die beiden andern Konstantentripel aus den Daten L. 55—85 errechnet wurden.
- c) Die Summe der Fehlerquadrate ist für violettes Licht am kleinsten. Dies überrascht zunächst, da die gelben und grünen Punkte sich einer kontinuierlichen Kurve viel besser anpassen als die violetten. Wahrscheinlich sind beim Einstellen der gelben und grünen Spektrallinien gewisse systematische Fehler unterlaufen, wogegen die bei den violetten Linien gemachten Fehler ganz zufälliger Art sind, bedingt durch die geringere Empfindlichkeit des Auges für diese Farbe. Aus diesem Grunde wurden diese Fehler schon bei der Bestimmung der L^i_k und P_{ik} relativ gut ausgeglichen, und es mussten die a_{ik} aus $(q_1{}^2-q_2{}^2)^2$ nicht mehr so stark verbessert werden wie

für gelb und grün, wiewohl auch für violett jene Differenz bedeutend genauer ist, als die einzelnen q².

Tabelle 16
Die endgültigen Werte der Polarisationskonstanten

	a ₁₁	a ₂₂	a_{33}	$\mathbf{a_{12}}$	$\mathbf{a_{23}}$	a_{31}
Gelb	0,4296232	0,4287565	0,4208554	0,0060283	0,0019776	0,0034111
Grün	0,4269575	0,4258932	0,4175649	0,0060311	0,0017731	0,0032985
Violett	0,4239222	0,4228282	0,4146782	0,0061576	0,0017802	0,0033494

Mit Hilfe der α_{ik} lassen sich aus den a_{ik} der Tab. 14 die endgültigen Polarisationskonstanten bestimmen. Sie sind in Tab. 16 zusammengestellt.

Tabelle 17 Unterschied der beobachteten $(q_1^2 - q_2^2)$ -Werte (I) gegenüber den aus den unkorrigierten (II) und korrigierten (III) a_{ik} -Werten errechneten (in Einheiten der 6. Dezimalen)

		Ge	Gelb		in	Vio	lett
L	J	I - II	I - III	I - II	I - III	I - II	I – III
1	44	660	- 68	1802	-289	873	493
6	37	670	- 62	1832	-163	641	- 18
9	41	553	18	1674	-152	57	-330
22	13	301	- 36	1529	- 75	303	97
29	53	436	116	1831	204	228	26
32/34	1	309	- 29	1523	-179	164	- 69
36	4	308	-108	1322	-201	333	- 89
43	59	591	73	1718	-530	627	235
51	52	547	- 34	634	-136	784	-233
58	84	-375	27	- 62	-165	26	- 16
61	79	50	33	880	- 82	629	175
64	86	- 72	12	- 92	-288	209	141
67	88	-483	100	-1106	55	70	360
68	78	921	- 97	2427	-390	794	15
71	74	1023	- 81	2097	-303	576	- 82
76	67	813	39	1590	-167	419	164
79	72	496	- 4	1408	- 12	159	86
82	62	511	- 35	1302	-124	51	40
Mittel		507	54	1379	195	386	148

Um einen Einblick in die erzielte Genauigkeit der Verbesserungen zu bekommen, wurde für eine Reihe von Fortpflanzungsrichtungen die Differenz $q_1^2 - q_2^2$ sowohl aus den unkorrigierten (II) wie aus den korrigierten (III) a_{ik} zurückberechnet und von der "gemessenen" Differenz (I) subtrahiert. Die erhaltenen Werte sind in

Einheiten der sechsten Dezimale in Tab. 17 zusammengestellt. Drei Dinge fallen sofort auf: a) Die Kleinheit der Unterschiede I/III-gelb; sie beweist die Güte der Verbesserungen. b) Die relative Grösse von I/II-grün und I/III-grün; die Zahlen I/III erhärten die Bedenken, die S. 224 gegen die Zuverlässigkeit selbst der korrigierten a_{ik} -grün geäussert wurden. c) Die schwankende Grösse von I/III-violett. Sie erklärt sich aus der schwierigen Wahrnehmbarkeit der violetten Linien. Wenn auch bei grün wie bei violett zwei Differenzen I/III grösser sind, als die entsprechenden Differenzen I/II, so bleibt doch I/III im Mittel weit hinter I/II zurück (ersteres ist durchschnittlich ein Sechstel von letzterem). Die Ausgleichung mittels der $q_1^2 - q_2^2$ brachte also eine wirkliche Verbesserung der Polarisationskonstanten.

Es wäre interessant gewesen, in System 15 oder 16 auch die Schwingungsrichtung einzelner Flächen zur Korrektur der a_{ik} heranzuziehen. Einige Vorversuche zeigten aber, dass es ohne besondere Hilfsmittel nicht möglich ist, die Schwingungsrichtungen so genau zu bestimmen, dass dadurch eine wirkliche Verbesserung der Polarisationskonstanten erzielt würde. Immerhin schien sich mit ihrer Hilfe eine Möglichkeit zu bieten, die a_{ik} unabhängig von den bis dahin ausgeführten Messungen und Berechnungen einigermassen zu kontrollieren. Zu diesem Zwecke wurden sechs Kriställchen verwendet, bei denen zum mindesten je ein Pinakoid so gut entwickelt war, dass es die Schwingungsrichtungen zu bestimmen erlaubte.

Tabelle 18
Bestimmung der Schwingungsrichtungen einer Cu-Vitriolplatte

	c-Achse	Dunkel	Dur	ikel	c-Achse	Dunkel	Dunkel
1. Messung	229,4 °	243,50	334	4,1 °	49,1 0	64,4 °	153,9 0
2. Messung	229,3	243,8	334	1,6	49,4	65,1	153,7
3. Messung	229,5	243,5	334	1,8	49,2	64,8	153,9
Mittel	229,40	243,60	334	1,50	49,23	64,77	153, 33
Reduktion der Winkel	229,40	243,60	244	4,50	229,23	244,77	243,83
G	esamtmitte	l c-Ach Dunk		229,32 244,18	0		
				14,86			
		Korre	ktur	-1,29			
A	uslöschung	sschiefe		13,57	\sim 13,6 $^{\rm o}$		

Da beim Mikroskop Fadenkreuz und Nicolshauptschnitte nicht genau parallel waren, musste es zuerst geeicht werden. Dafür eigneten sich die Kupfervitriolkriställchen in hervorragender Weise. Die zur c-Achse parallele Kante ist meistens sehr scharf ausgebildet; die Fläche (110) lässt sich auch recht genau auf Dunkel stellen. Indem dies für die Vorder- und Rückseite des Kristalls getan wurde, fand sich, dass das Fadenkreuz gegenüber den Nicolshauptschnitten um $1,29^{\circ}$ nach rechts zu drehen war. Tab. 18 zeigt an einem beliebig gewählten Beispiel aus dem Journal (Kristall Nr. 37), wie für die Bestimmung der Schwingungsrichtungen vorgegangen wurde. Als Lichtquelle diente eine Zeiss'sche Quecksilbermikroskopierlampe. Ein Gelbfilter (A) lieferte homogenes Licht von der Wellenlänge 7) $\lambda = 5791$ Å. Auf diese Art wurden an allen sechs Kriställchen sorgfältige Messungen gemacht. Über die Einzelheiten und Mittel orientiert Tab. 19.

Tabelle 19 Die Auslöschungsrichtungen verschiedener Flächen des Cu-Vitriols

Kristall Nr.	Obere Fläche	Bezugskante	Auslöschungs- schiefe	Mittel
37	110	001	13,6°	
46	110	001	13,1	
46	<u>110</u>	001	- 13,2	
46	110	001	- 13,6	
47	110	001	13,3	
50	110	001	12,9	13,290
50	110	001	- 13,7	
51	110	001	13,1	
51	110	001	13,1	
51	$\overline{1}\overline{1}0$	001	- 13,3	
47	110	001	14,5	
47	110	001	14,6	14,50
47	<u>1</u> 10	001	- 14,5	
51	110	001	14,6	
50	$0\overline{1}0$	001	24,8	25,00
50	010	001	25,2	25,0
49	$0\overline{2}\overline{1}$	100	71,0	
49	$0\overline{2}\overline{1}$	100	70,0	70,5°
49	$0\overline{2}\overline{1}$	100	70,4	

Der Zusammenhang zwischen Polarisationskonstanten und Schwingungsrichtungen ergibt sich in einfachster Art aus der Indikatrix (Gl. 1). Für die Fläche (110), die senkrecht zur x-Achse steht, ist

$$\varrho^{2} (a_{22} \cos^{2} \varphi + a_{33} \sin^{2} \varphi + 2 a_{23} \sin \varphi \cos \varphi) = 1$$

⁷) Der Unterschied gegenüber der Wellenlänge von He-gelb spielt wegen der geringen Dispersion der Schwingungsrichtungen keine Rolle. Tatsächlich ergaben Messungen mit dem Grünfilter ($\lambda = 5461$ Å) keine zuverlässig bestimmbaren Abweichungen.

die Gleichung der Schnittellipse, und die Lage ihrer Hauptachsen (d. h. die der gesuchten Schwingungsrichtungen) findet sich zu

$$\lg 2\varphi = \frac{2a_{23}}{a_{22} - a_{33}}$$

Hier ist φ von der + c-Achse aus im Gegenzeigersinn genommen.

Die Schwingungsrichtungen der andern Flächen aus der c-Achsenzone werden durch eine Achsentransformation erhalten, bei der die ξ -Achse auf der betreffenden Fläche senkrecht steht, die ζ -Achse mit der c-Achse zusammenfällt und die η -Achse durch das Rechtssystem gegeben ist. Wird das transformierte Ellipsoid durch die Ebene $\xi=0$ geschnitten, so folgt für die Schwingungsrichtungen die Gleichung:

$$tg \, 2 \, \varphi = \frac{2 \, (a_{23} \cos \alpha + a_{31} \sin \alpha)}{a_{11} \sin^2 \alpha + a_{22} \cos^2 \alpha + 2 \, a_{12} \sin \alpha \cos \alpha - a_{33}}$$

 α ist hierin 56 0 58′ 11″ für die Fläche (110) und — 53 0 7′ 26″ für (010).

Die Fläche (021) verlangt eine Transformation allgemeinster Art. Wiederum ist ξ die Flächennormale. Da die Auslöschungsrichtung gegenüber der kristallographischen a-Achse gemessen wurde, empfiehlt es sich, η hiermit zusammenfallen zu lassen; ζ ist damit bestimmt und fällt in die Ebene des Zonenkreises [021:010]. Es wird (Koeffizienten etwas gekürzt):

$$\operatorname{tg} 2\,\varphi = \frac{3846}{5201} \frac{a_{11} - 7887\,a_{22} + 4041\,a_{33} + 7628\,a_{12} + 3711\,a_{23} - 11890\,a_{31}}{a_{11} - 1453\,a_{22} - 3748\,a_{33} - 12219\,a_{12} + 12768\,a_{23} - 1110\,a_{31}}$$

Tab. 20 enthält die gemessenen und berechneten Schwingungsrichtungen. Letztere sind sowohl für die korrigierten wie nicht korrigierten a_{ik} angegeben. Es zeigt sich im allgemeinen eine vorzügliche Übereinstimmung zwischen Messung und Berechnung, sofern dieser die korrigierten a_{ik} zugrunde gelegt werden. Einzig (021) macht eine Ausnahme. Doch dürfte gerade hier die Messung nicht sehr genau sein, da das untersuchte Pinakoid nicht besonders gut ausgebildet war. Leider fand sich kein passenderes Individuum; denn Kristalle, an denen die (021) Flächen gross genug sind, um senkrecht auffallendes Licht ungestört durchzulassen, finden sich überhaupt recht selten. Wie günstig sich übrigens die Korrekturen α_{ik} auf die Polarisationskonstanten ausgewirkt haben, ergibt sich einwandfrei aus den Zahlen der letzten Kolonne von Tab. 20.

Tabelle 20 Die gemessenen und berechneten Schwingungsrichtungen

	Anzahl	Bezugs- kante	Lage der Schwingungsrichtungen			
Fläche	d. Kr.		gemessen	berechnet aus		
				aik korrig.	aik nicht korr.	
110	5	001	13,290	13,29 °	12,88°	
110	2	001	14,5	14,66	15,16	
010	1	001	- 25,0	- 24,57	-30,83	
021	1	100	19,5	20,72	17,02	

Es erübrigt noch die Bestimmung der Indikatrixhauptachsen nach Länge und Richtung. Die Quadrate der Längen werden aus der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - x \end{vmatrix} = 0$$

erhalten. Schon Weber (Lit. 11) hat auf die Eigenart dieser Gleichung und die erforderliche Genauigkeit der Rechnung hingewiesen. Bei vollständiger Ausmultiplikation hat der Koeffizient von x2 sieben Dezimalstellen, der von x schon 14 und das Absolutglied sogar 21. Eine Vereinfachung dieser Zahlen, insbesondere die Abkürzung auf durchwegs gleichviele Dezimalstellen, kann nicht nur zu ungenauen, sondern u. U. zu widersinnigen x-Werten führen. Im gegebenen Falle wurde die Gleichung nach dem Annäherungsverfahren gelöst. Es zeigt sich dabei, dass wenn die Wurzeln bis auf ungefähr eine Einheit der achten Dezimale genau gerechnet werden, die Gleichung bis auf die 12. Dezimale erfüllt ist. Tabelle 21 enthält die gefundenen Werte, d. h. die Quadrate der Hauptlichtgeschwindigkeiten (a2, b2, c2) samt ihren Differenzen wie auch die sogenannten Hauptbrechungsindizes (n_α, n_β, n_γ) mit ihren Unterschieden. Aus dem Vergleich der Variationen ergibt sich von neuem, dass die Werte für grünes Licht weniger genau sind als die andern. Der Hauptfehler liegt wahrscheinlich bei b² bezw. n_β; die beiden angegebenen Zahlen sind offenbar etwas zu gross (b2) bezw. zu klein (n3).

Die Richtungscosinus der Hauptachsen, bezogen auf das Achsenkreuz x, y, z, sind durch das Gleichungssystem

$$(a_{11} - \lambda) \alpha + a_{12} \beta + a_{13} \gamma = 0$$

$$a_{12} \alpha + (a_{22} - \lambda) \beta + a_{23} \gamma = 0$$

$$a_{13} \alpha + a_{23} \beta + (a_{33} - \lambda) \gamma = 0$$

$$\alpha^{2} + \beta^{2} + \gamma^{2} = 1$$

230 Josef Mäder

bestimmt. Darin bezeichnet λ das in Frage stehende Hauptlichtgeschwindigkeitsquadrat. Die Winkel, welche die Hauptschwingungsrichtungen n_{α} , n_{β} , n_{γ} mit x, y, z bilden, sind in Tab. 22 zusammengestellt. Da die Orientierungsunterschiede äusserst gering sind, wurde als Charakteristikum des Kupfervitriols noch das Mittel dieser Winkel angegeben. Es entspricht den in Fig. 6 angedeuteten Lagen.

Tabelle 21

Die Hauptlichtgeschwindigkeitsquadrate und Hauptbrechungsindizes des Cu-Vitriols

	Gelb (5876 Å)	Grün (5016 Å)	Violett (4471 Å)
a²	0,4362005	0,4333198	0,4304178
$a^2 - b^2$	0,0128492	0,0127435	0,0129917
b²	0,4233513	0,4205763	0,4174261
$b^2 - c^2$	0,0036680	0,0040567	0,0038414
C ²	0,4196833	0,4165196	0,4135847
a^2-c^2	0,0165172	0,0168002	0,0168331
n_{α}	1,514108	1,519133	1,524245
$n_{\beta} - n_{\alpha}$	0,022806	0,022843	0,023539
n_{β}	1,536914	1,541976	1,547784
$n_{\gamma} - n_{\beta}$	0,006702	0,007491	0,007171
n,	1,543616	1,549467	1,554955
$n_{\gamma} - n_{\alpha}$	0,029508	0,030334	0,030710

Tabelle 22 Orientierung der Indikatrix für Cu-Vitriol

		x	у	z
	n_a	43°52 ′	49°33 ² / ₃ ′	75°53 ½'
Gelb	n_B^{α}	127 25 ¹ / ₆	40 27 ¹ / ₆	103 9
	n_{γ}	$109\ 27^{1/2}$	89 5 $\frac{1}{2}$	19 29
	n_a	43 10 1/2	49 45 1/3	76 58 ¹ / ₂
Grün	n_{B}	$127 \ 29^{2}/_{3}$	40 16 ¹ / ₆	102 33 5/6
	n_{γ}^{ν}	$108 \ 12^{1}/_{2}$	88 46 ¹ / ₈	18 15 ¹ / ₆
	n_a	43 10 ⁵ / ₆	49 49 1/2	76 48 ² / ₃
Violett	n_B	126 55 ² / ₃	$40\ 15\ {}^{1}/_{6}$	$103\ 45\frac{1}{2}$
	n_{γ}^{μ}	109 7 1/3	87 54 ⁵ / ₆	$19 \ 14^{2}/_{3}$
	n_a	43 24 4/9	49 42 5/6	76 33 ⁴ / ₉
Mittel	$n_{\mathcal{B}}$	127 16 ⁵ / ₆	$40\ 19\ 1/_{2}$	$103 9^{4}/_{9}$
	n_{ν}^{\prime}	108 55 7/9	88 35 ⁵ / ₉	18 59 ¹¹ / ₁₈

Für den Winkel der optischen Achsen, die in Fig. 6 ebenfalls vermerkt sind, wurden folgende Werte berechnet

	Gelb	Grün	Violett
2 V	$56^{\circ}13^{\circ}2/_{3}'$	58°52′	$57^{\circ}4^{1/3}$

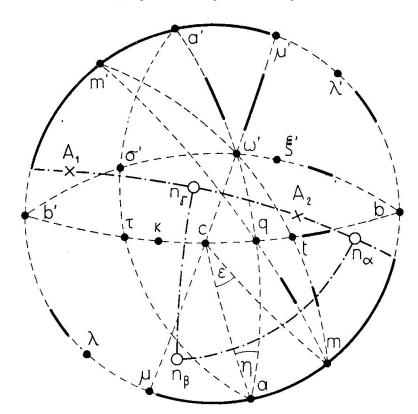


Fig. 6. Die Flächen des Kupfervitriols und die Lage der Indikatrix $(n_{\alpha}, n_{\beta}, n_{\gamma})$ sowie der optischen Achsen (A_1, A_2) . Die fettgezogenen Zonenstücke bestimmen die Lage der erfassten Fortpflanzungsrichtungen.

Tabelle 23

Zusammenstellung der von den verschiedenen Autoren gefundenen Hauptbrechungsindizes des Cu-Vitriols

		n_a	$n_{oldsymbol{eta}}$	$n_{\scriptscriptstyle \mathcal{V}}$	$n_{\beta} - n_{\alpha}$	$n_{\gamma} - n_{\beta}$	$n_{\gamma} - n_{\alpha}$
	Pape	1,51564	1,53940	1,54639	0,02376	0,00699	0,03075
	Kohlrausch	1,5140	1,5368	1,5433	0,0228	0,0065	0,0293
Galb	Lavenir	1,51408	1,53684	1,54345	0,02276	0,00661	0,02937
Gelb	Weber	1,51203	1,53806	1,54314	0,02603	0,00508	0,03111
	Schwietring	1,51449	1,53790	1,54312	0,02341	0,00522	0,02863
	Mäder	1,51411	1,53691	1,54362	0,02280	0,00671	0,02951
Grün	Weber Mäder	1,5193 1,51913	1,5448 1,54198	1,5494 1,54947	0,0255 0,02285	0,0046 0,00749	0,0301 0,03034
Violett	Mäder	1,52425	1,54778	1,55496	0,02353	0,00718	0,03071

Abschliessend sind in Tab. 23 die von den verschiedenen Autoren gefundenen Hauptbrechungsindizes des Kupfervitriols somt ihren Differenzen angegeben. Beim Vergleich der Zahlen fällt sofort auf

a) dass mit der vorliegenden Arbeit zum ersten Mal der Versuch gelungen ist, die Abhängigkeit der Lichtbrechung von der

Wellenlänge mit einer gewissen Zuverlässigkeit und Vollständigkeit zu prüfen,

- b) dass sich die neu gewonnenen Werte für gelbes Licht ausgezeichnet den von Kohlrausch und Lavenir durch Totalreflexion gefundenen Konstanten einfügen. Die Übereinstimmung wirkt noch überzeugender, wenn berücksichtigt wird, dass die Neubestimmungen mittels He-Licht gemacht wurden, für die älteren Werte aber Na-Licht verwendet wurde. Einiges Befremden bewirkt der Umstand, dass Schwietrings sorgfältige Messungen (Totalreflexion, Lit. 10) zu ziemlich abweichenden Zahlen führten,
- c) dass hinsichtlich Doppelbrechung auffallende Unterschiede zwischen verschiedenen Autoren bestehen. Der Gedanke Webers, die Brechungsindizes auf Grund der Doppelbrechung zu verbessern, gewinnt hieraus vermehrte Bedeutung.

Dem Verfasser ist es eine besondere Freude, gezeigt zu haben, dass die Prismenmethode auch im allgemeinsten Fall (triklines System und unbekannte optische Orintierung) zu wertvollen Resultaten führt, sofern die Lichtgeschwindigkeit in verschiedenen Richtungen des Raums bestimmt und überdies die zugehörige Doppelbrechung in geeigneter Weise mitberücksichtigt wird.

Literaturverzeichnis

- 1. Brill A., Math. Ann. 34 (1889) 297; München Sitzungsber. 13 (1883) 423.
- 2. GROTH P., Chemische Kristallographie II. Teil. Leipzig 1908.
- 3. Kalb G., Die Bedeutung der Vizinalerscheinungen für die Kristallmessung. Zeitschr. f. Krist. 81, 342.
- 4. Kohlrausch F., Über die Ermittlung von Lichtbrechungsverhältnissen durch Totalreflexion. Pogg. Ann. der Phys. 1878, 1.
- 5. Kupffer A. F., über die Krystallisation des Kupfervitriols, nebst allgemeinen Betrachtungen über das ein- und eingliedrige oder tetartoprismatische System. Pogg. Ann. d. Phys. 1826, 61 u. 215.
- 6. LAVENIR M. A., Sur la détermination de l'orientation optique dans un cristal quelconque. Bull. soc. franç. min. 1891, 100.
- 7. Nigoli P., Lehrbuch der Mineralogie. Leipzig 1924.
- 8. Pape C., Bestimmung der optischen Constanten des Kupfervitriols. Pogg. Ann. d. Phys. 1874, 35 (Erg. Bd.).
- 9. Pockels, Lehrbuch der Kristalloptik, Leipzig 1906.
- 10. Schwietring Fr., Die Methode der Totalreflexion für eine beliebig orientierte Kristallfläche. Zeitschr. f. Krist. 76, 87.
- 11. Weber L., Über die Prismenmethode zur Bestimmung der Brechungsindizes optisch zweiachsiger Kristalle ohne Absorptions- und Drehungsvermögen. Separatabdruck der Mitt. der Naturf. Gesellschaft in Freiburg (Schweiz), Bd. IV, 1921.

Eingegangen: August 1942.