

Zeitschrift: Schweizerische mineralogische und petrographische Mitteilungen =
Bulletin suisse de minéralogie et pétrographie

Band: 5 (1925)

Heft: 1

Artikel: Die Bedeutung der Kristallpolyeder in der Lehre der regelmässigen
Punktsysteme

Autor: Weber, Leonhard

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-7340>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die Bedeutung der Kristallpolyeder in der Lehre der regelmäßigen Punktsysteme.

Mit 63 Textfiguren.

Von Leonhard Weber, Zürich.

Inhaltsübersicht.

	Seite
Einleitung und Problemstellung	2
Anschauliche Darstellung der 230 Raumgruppen	5
I. Trikline Abteilung	5
A. Hemiedrische Klasse C_1	5
B. Holoedrische Klasse C_i	6
II. Monokline Abteilung	7
A. Hemiedrische Klasse C_s	7
B. Hemimorphe Klasse C_2	8
C. Holoedrische Klasse C_{2h}	9
III. Rhombische Abteilung	10
A. Hemimorphe Klasse C_{2v}	10
B. Hemiedrische Klasse V	15
C. Holoedrische Klasse V_h	16
IV. Hexagonale Abteilung	21
IV ₁ . Trigonal-rhomboedrische Abteilung.	22
A. Tetartoedrische Klasse C_3	22
B. Paramorphe Klasse C_{31}	22
C. Hemimorphe Klasse C_{3v}	23
D. Enantiomorphe Klasse D_3	24
E. Holoedrische Klasse D_{3d}	25
IV ₂ . Rein trigonale Abteilung	27
A. Paramorphe Klasse C_{3h}	27
B. Holoedrische Klasse D_{3h}	27
IV ₃ . Rein hexagonale Abteilung	27
A. Tetartoedrische Klasse C_6	27
B. Paramorphe Klasse C_{6h}	28
C. Hemimorphe Klasse C_{6v}	29
D. Enantiomorphe Klasse D_6	29
E. Holoedrische Klasse D_{6h}	30

	Seite
V. Tetragonale Abteilung	31
A. Tetartoedrische Klasse I. Art C_4	31
B. Tetartoedrische Klasse II. Art S_4	33
C. Hemimorphe Klasse C_{4v}	33
D. Paramorphe Klasse C_{4h}	36
E. Enantiomorphe Klasse D_4	38
F. Hemiedrische Klasse II. Art V_d	40
G. Holoedrische Klasse D_{4h}	41
VI. Kubische Abteilung	44
A. Tetartoedrische Klasse T	44
B. Paramorphe Klasse T_h	45
C. Hemimorphe Klasse T_d	46
D. Enantiomorphe Klasse O	47
E. Holoedrische Klasse O_h	49
Numerierung der 230 Raumgruppen und Reihenfolge, in der sie im Vorstehenden besprochen wurden	51
Allgemeine Beziehungen zwischen Kristalpolyedern und Diskontinuum	52
Zusammengehörige Koordinatenwerte (P. Niggli) und ihr Zusammenhang mit den Miller'schen Symbolen der einfachen Kristallformen Vier Sätze	54
Anwendung der viergliedrigen Punktsymbole im Diskontinuum	58
Allgemeine und spezielle Gitter	64
Zusammenfassung	66

Einleitung und Problemstellung.

P. Niggli hat durch ümfangreiche statistische Untersuchung die Beziehung zwischen Morphologie und Struktur der Kristalle klargelegt: *Die Hauptbindungsrichtungen der Atome bestimmen die für den Kristall charakteristischen Zonen.* Damit ist die Strukturlehre für den Kristallographen zum unentbehrlichen Hilfsmittel geworden. Zwar hat man in kristallographischen Kreisen seit Hauy's Spaltversuch eine ständige Vorliebe für strukturelle Fragen gehabt, und die Kristallographie darf es sich für alle Zeiten zur großen Ehre anrechnen, daß einer ihrer bedeutendsten Vertreter, E. Fedorow, gleichzeitig wie der Mathematiker A. Schoenflies, aber unabhängig von diesem, die Strukturlehre in exakter Form abgeleitet hat. Daß aber trotzdem die *Großzahl* der Kristallographen für die abstrakten Sätze der Strukturlehre wenig Interesse hat, ist bedauerliche Tatsache, da gerade die Kristallographen mit ihrem angeborenen Sinn für Symmetrie berufen wären, an der Bereicherung und Vertiefung der Strukturlehre mitzuwirken.

Der Kristallograph, der mehr wie irgend ein anderer die Raumanschauung pflegt, findet in der Strukturlehre zu viel formelhafte

Mathematik, zu wenig greifbare Anschaulichkeit. Auch wünschte er, daß der Zusammenhang mit dem, was ihn alle Tage beschäftigt, stärker hervortrete, denn schließlich sind es doch die gleichen Begriffe, um die sich hier wie dort alles dreht.

Es wird kaum Sache eines einzelnen sein, der Strukturlehre das für den Kristallographen anschaulichste Gepräge zu geben. Es werden die verschiedensten Richtungen daran mitzuwirken haben. Einseitigkeiten müssen die vermittelnden Übergänge finden, grobe Vorstellungen sind zu vergeistigen, abstrakte Gedankengänge durch konkrete Beispiele zu beleben.

Ein bescheidener Versuch in dieser Richtung möchten die folgenden Seiten sein. Die Vorstellungen, von denen ausgegangen wird, sind nebst den allen Kristallographen vertrauten 26 Arten von Kristallformen die 14 Bravais'schen Raumgitter, und das Ziel, die Veranschaulichung der Symmetrieverhältnisse und geometrischen Beziehungen der 230 Raumgruppen, soll dadurch erreicht werden, daß die *Gitterpunkte* durch geeignete *Kristallformen* verbildlicht werden. Schon Bravais ist diesen Weg z. T. gegangen, als er bei seinem Versuch, die 14 Raumgitter den Symmetrieverhältnissen der 32 Kristallklassen anzupassen, verlangte, daß die Gitterpunkte etwa in Gestalt der für die betreffende Klasse charakteristischen Kristallform zu denken seien. Natürlich werden die Gitterpunkte im Modell, das eine bestimmte Raumgruppe veranschaulichen soll, nur mit einerlei Kristallformen besetzt. Darin stimmt der hier vorliegende Versuch vollständig mit Bravais' Gedanke überein; er unterscheidet sich dann aber von ihm in doppelter Hinsicht. Einmal werden hier die Kristallformen nicht ausschließlich in Parallelstellung mit den Gitterpunkten verbunden (denn dann blieben wir beim Raumgitter), sondern sie erscheinen in mannigfältigsten Stellungen, jedoch immer so, daß ausgezeichnete Richtungen der Form zu ausgezeichneten Richtungen des Komplexes werden. Die Orientierung ist, wenn auch nicht parallel gleich, so doch gesetzmäßig. Der zweite Unterscheidungspunkt liegt darin, daß die Symmetrie der Bausteine auch niedriger sein kann als die resultierende Symmetrie des Komplexes, wenngleich in der Ableitung überall das Bestreben zum Ausdruck kommt, möglichst hochsymmetrische Gebilde zu verwenden.

Rein mathematisch gesprochen handelt es sich also um die Ermittlung von *raumgitterartigen*, für die 230 Raumsysteme charakteristischen Komplexen. Diese raumgitterartigen Komplexe sind in der geometrischen Kristallographie von P. Niggli stark betont,

nicht daß alle überhaupt möglichen hervorgehoben und durch Koordinatentripel definiert wären, es gehört aber doch zum eigen-tümlichen Charakterzug der dort gewählten Einzelbeschreibung der 230 Raumgruppen, daß immer und immer wieder auf solche Komplexe aufmerksam gemacht wird. P. Niggli's Buch ist daher vor-züglichste Quelle für den nachstehenden Versuch.

Begreiflicherweise kann es sich nicht darum handeln, die 230 Komplexe bloß zu beschreiben und abzubilden; es müssen auch ihre gegenseitigen genetischen Beziehungen betont werden. Das genetische Moment war von jeher in der Kristallographie beliebt und viel verwendet, sei es im Sinne des Aufbaues, sei es im Sinne des Abbaues. Beide haben ihre Berechtigung; die Vollkommenheit besteht in der Beherrschung beider. Im vorliegenden Fall scheint der Abbau der gegebene Weg zu sein. Denn für jede Symmetrie-klasse leuchten gewisse Strukturschemata, die symmorphen, un-mittelbar ein, und es ist ein Leichtes, hieraus eine Menge anderer Schemata dadurch abzuleiten, daß die Gitterpunkte in regelmäßiger Verteilung mit kristallographisch deutbaren Teilflächnern jenes Polyeders ersetzt werden, welches für ein symmorphe Struktur-schema verwendet wurde.

Es ist überaus reizvoll, unter diesem Gesichtspunkt die 230 Raumgruppen einmal durchzudenken. Natürlich muß es mit mög-lichst viel bildlichem Beiwerk geschehen, wenn es auch nicht nötig ist, jeden gedanklichen Schritt durch Figuren oder Modelle zu er-läutern. Die zahlreichen Figuren, die den folgenden Ausführungen beigegeben sind, erscheinen mir als ein Mindestmaß, und es ist rein äußerer Gründen zuzuschreiben, wenn sie nicht um ein Be-deutendes vermehrt sind. Da die bildliche Darstellung von raum-gitterartigen Verhältnissen manchen Schwierigkeiten begegnet, ist es kaum möglich, alles nach dem gleichen Schema durchzuführen. Dies mag die eine und andere Figur entschuldigen.

Wie schon gesagt, schließt sich die Darstellung eng an die „geometrische Kristallographie des Diskontinuums“ von P. Niggli an. Immerhin lassen sich mehrfache Abweichungen nicht umgehen. Vor allem ist die Reihenfolge wesentlich anders wie in der „ana-lytisch-geometrischen Darstellung“ der einzelnen Raumgruppen. Es hängt dies mit der hier gewählten genetischen Darstellungs-weise zusammen. Auch P. Niggli weicht von jenem durch die Schönflies'sche Numerierung festgelegten Gang in seinem „Schema der speziellen Ableitung aller möglichen Raumgruppen“ vielfach ab. Zur Erleichterung der Auffindung einer bestimmten Raum-

gruppe sind am Rand die Raumgruppen entsprechend der Reihenfolge ihrer Ableitung fortlaufend nummeriert, und am Schluß werden in einer eigenen Tabelle (pag. 51) die Raumgruppensymbole der entsprechenden Nummer gegenübergestellt.

Bei Raumgruppen, die sich in mehrfacher Weise veranschaulichen lassen, wird regelmäßig jene vorgezogen, für die P. Niggli die Koordinatendarstellung gegeben hat. Die verschiedenen Veranschaulichungen unterscheiden sich übrigens nur durch eine andere Wahl des Nullpunktes und damit verbundene abweichende Zusammenfassung einzelner Flächen zu einer Form. Es gehört zum Anregendsten, die Symmetrieverhältnisse von Strukturen, die sich aus Analogie zu andern ergeben müßten, etwa mit Nigglis Haupttabelle I (l. c., pag. 125—131) zu deuten. Diesbezügliche Hinweise und Bemerkungen sind im Text zahlreich eingestreut. Da und dort wird das eine oder andere Beispiel sogar mit einer gewissen Ausführlichkeit behandelt.

Auf die Symmetrieverhältnisse der einzelnen Schemata wird im allgemeinen nicht eingegangen. Dem aufmerksamen Betrachter der Figuren zwingen sie sich unmittelbar auf — sicherlich viel leichter als bei den üblichen Kugelmodellen. Das Zurücktreten des Symmetriemoments läßt eine gewisse Analogie erblicken zur Naumann'schen Behandlungsart der Kristallographie. An und für sich ist das freilich eine Einseitigkeit, ja Unvollkommenheit, aber es ist dies mit dem gesteckten Ziel mehr oder weniger gegeben.

Anschauliche Darstellung der 230 Raumgruppen.

I. Trikline Abteilung.

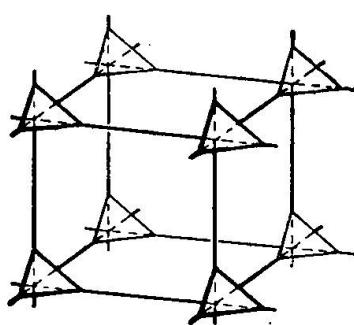
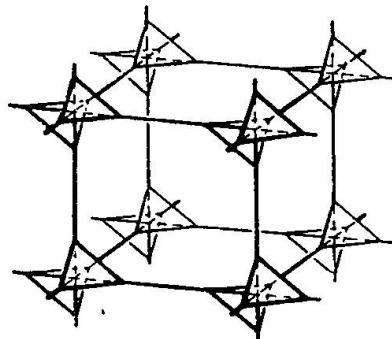
A. Hemiedrische Klasse. C_1 .

Ein anschauliches und allgemeinstes Strukturschema triklin-hemiedrischer Symmetrie ergibt sich in Übereinstimmung mit den Bravais'schen Ideen, wenn den einzelnen Gitterpunkten eines beliebigen¹⁾ Raumgitters je ein asymmetrisches Pedion,²⁾ also jene Kristallform zugeordnet wird, welche für diese Symmetrieklasse eigentlich ist. In *Fig. 1* ist dieses Pedion durch den von den Achsenebenen erzeugten Ausschnitt der an und für sich unbe-

¹⁾ Geometrisch gesprochen ist jedes der 14 Raumgitter zulässig, physikalisch kommt aber nur das trikline — allgemein ein solches in Frage, welches für die betreffende Abteilung charakteristisch ist.

²⁾ Bekanntlich kommt das Pedion als Kristallform in zehn Symmetrieklassen vor. In jeder einzelnen ist es durch eine besondere Flächensymmetrie ausgezeichnet.

grenzten Pedionsfläche dargestellt. Der unregelmäßig dreiseitige Umriß des Flächenstückes soll die Asymmetrie des Pedions besonders hervorheben. Daß die Pedien zueinander nur parallel orientiert sind, liegt darin begründet, daß dem Komplex einzig Translationen als Deckoperationen zukommen dürfen. Diese Translationen haben dann aber zur weiteren Folge, daß alle Pedien von den ihnen zugeordneten Gitterpunkten gleichen Abstand besitzen.

Fig. 1 ³) C_1 .Fig. 2. C_2 .

Welches im übrigen Lage und Orientierung des Pedions sein mögen, der Komplex ist immer von derselben Art; Spezialfälle, die durch irgendwelche besonderen Merkmale hervorstechen, sind ausgeschlossen. Es gibt daher nur *ein* Raumsystem triklin-hemiedrischer Symmetrie. Dasselbe wird mit C_i bezeichnet und ist symmorph, d. h. die Symmetrie des Komplexes fällt mit der Symmetrie der einzelnen Bausteine überein.

B. Holoedrische Klasse. C_i .

Auch der triklinen Holoedrie kommt nur ein einziges, ebenfalls symmorphes Raumsystem zu. Es wird mit C_i bezeichnet und kann bildlich etwa dadurch charakterisiert werden, daß mit jedem Gitterpunkt des zu Grunde liegenden triklinen Raumgitters ein Pinakoid verbunden wird. Die beiden Flächen dieses Pinakoides sind einzeln genommen asymmetrisch, stehen aber gegenseitig im Verhältnis der Inversion. Jeder Gitterpunkt ist also Zentrum der Symmetrie. Symmetriezentren sind übrigens auch die sieben folgenden Punktlagen:

$$\left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{smallmatrix} \right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{smallmatrix} \right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{smallmatrix} \right], \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{smallmatrix} \right], \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{smallmatrix} \right], \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{smallmatrix} \right].$$

Alle diese Beziehungen sind aus *Fig. 2* schön ersichtlich.

Wenn eine der Pinakoidflächen durch ein Symmetriezentrum geht, so rückt auch die zweite Fläche des nämlichen Pinakoides,

³⁾ Die Erklärung zu den Figuren ist im Text vorab an jener Stelle zu suchen, wo die betreffende Figurnummer kursiv gedruckt ist.

oder aber eine mit ihr gleichartige von einem anderen Pinakoid in diesen nämlichen Punkt herein, und durch dieses Zusammenfallen der zwei inversen Flächen entsteht eine einzige Fläche zentrosymmetrischer Qualität. Während es nun im allgemeinen Fall auf jedes Parallelepiped des Raumgitters zwei zueinander inverse, asymmetrische Flächen, also ein Pinakoid trifft, enthält in den acht Sonderfällen jedes Parallelepiped nur ein Flächenstück, aber nicht mehr von asymmetrischer, sondern nunmehr zentrosymmetrischer Beschaffenheit. Sagt man von einem Komplex der ersten Art, er sei zweizählig, so heißen die acht anderen einzählig.

Die Erscheinung, daß durch Verminderung der Zähligkeit die Symmetrie der Fläche erhöht wird, gilt allgemein, doch sollen solche spezielle Gitter hier nicht weiter interessieren.

II. Monokline Abteilung.

A. Hemiedrische Klasse. C_s .

Da es zwei Arten von monoklinen Raumgittern gibt, die als pinakoidal und basiszentriert gewählt werden können, lassen sich sofort zwei symmorphe Raumsysteme konstruieren. Es sind zu

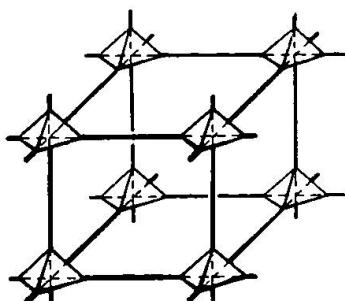


Fig. 3. C_s^1 .

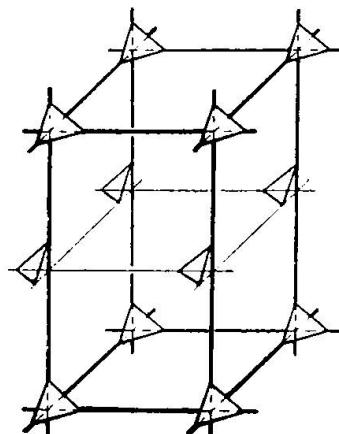


Fig. 4. C_s^2 .

dem Zweck die Gitterpunkte einfach mit identischen und parallel gestellten Domen, d. h. den für die monokline Hemiedrie charakteristischen Formen in Beziehung zu bringen. *Fig. 3* zeigt den auf das pinakoidale Gitter bezogenen Fall und entspricht dem Raumsystem C_s^1 . Das analog besetzte basiszentrierte Gitter, dessen Abbildung überflüssig erscheint, würde das Raumsystem C_s^3 veranschaulichen.

Weitere Strukturschemata ergeben sich dadurch, daß die beiden Flächen des Domas auseinandergezogen und mit verschiedenen Gitterpunkten verbunden werden. *Fig. 4* zeigt eine Anordnungs-

möglichkeit im pinakoidalen Gitter: parallel zu {001} alternieren Netzebenen, deren Gitterpunkte je durch rechte Domenhälften besetzt sind, mit solchen, denen nur linke Domenhälften angehören⁵ (\mathbb{C}_s^2). Ganz ähnlich könnte man mit dem basiszentrierten Gitter verfahren und bekäme ein Bild für die Symmetrieverhältnisse des⁶ Raumsystems \mathbb{C}_s^4 .

Durch diese Besetzung des pinakoidalen und basiszentrierten Gitters, das modellartig mit festen Dimensionen ein für alle Mal als gegeben zu denken ist, hat sich die Translationskonstante der c-Richtung verdoppelt. Solchen Verdoppelungen, allgemein Vervielfachungen der ursprünglichen Translationskonstante, werden wir häufig begegnen. Wir drücken dies dann gelegentlich so aus, daß wir sagen, die a-, b-, c-Achse sei verdoppelt, verdreifacht u. s. w. worden.

Die beiden zuletzt beschriebenen Anordnungen von Ebenensegmenten in den monoklinen Raumgittern sind nur zwei willkürlich gewählte Fälle aus einer unübersehbaren Mannigfaltigkeit; die Domenhälften in den beiden Raumgittern hätten nämlich auch anders verteilt werden können, ohne daß dadurch der Symmetriecharakter der Anordnung prinzipiell verändert worden wäre. Hervorgehoben sei besonders, daß ein basiszentriertes Gitter, dessen „Eckpunkte“ durchgehends mit den einen Domenhälften und dessen „Basismitten“ ebenso regelmäßig mit den anderen Domenhälften besetzt würden, einen mit \mathbb{C}_s^2 identischen Komplex ergibt — von Stellung und Lage des Nullpunktes abgesehen.

B. Hemimorphe Klasse. C_2 .

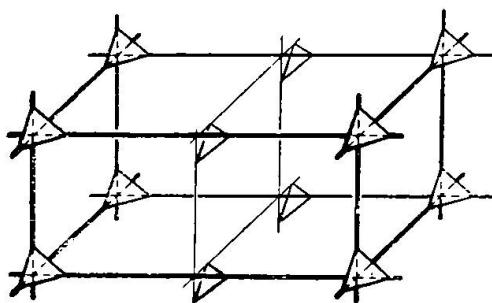
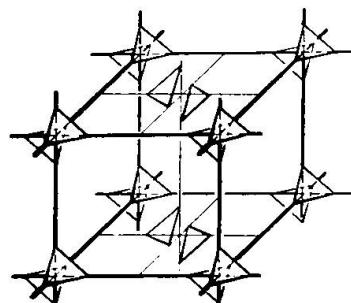
Charakteristische Form ist das Sphenoid, das in Verknüpfung mit dem pinakoidalen oder basiszentrierten Gitter die Verbildlichung der beiden symmorphen Raumgruppen ergibt. Nach dem unter Nr. 1, 2, 3 und 4 Gesagten⁴⁾ bedürfen sie keiner weiteren Erklärung mehr. Auch Figuren sind überflüssig. Daß die Digyre des Sphenoids der b-Richtung des Gitters parallel sein muß, ist selbstverständlich. Bemerkt sei bloß, daß sich \mathbb{C}_2^1 vom pinakoidalen, \mathbb{C}_2^3 vom basiszentrierten Gitter ableitet.

Für weitere Komplexe ist in Analogie zur Hemiedrie das Sphenoid auseinanderzuziehen. Wurde im Falle der Hemiedrie die Spiegelebene des Domas zu einer Gleitspiegelebene, so tritt in der Hemimorphie an Stelle der Digyre des Sphenoides eine Diheliko-

⁴⁾ Diese und die weiteren No.-Verweise beziehen sich auf die kleinen, am Rand stehenden Zahlen.

gyre. Die Anordnung der beiden Sphenoidhälften hat daher längs Geraden zu erfolgen, die der b-Achse parallel sind, ähnlich wie bei \mathfrak{C}_s^2 und \mathfrak{C}_s^4 die Domenhälften längs Geraden gereiht waren, die zur b-Achse senkrecht standen. — Es gibt nur einen Komplex: bezogen auf das gewöhnliche pinakoidale, monokline Raumgitter, liegt zwischen je zwei auf der b-Achse senkrecht stehenden und mit einerlei Sphenoidhälften besetzten Netzebenen immer eine weitere Netzebene, auf der lauter Sphenoidhälften der anderen Stellung sind. Fig. 5 zeigt diesen Fall. Das Symbol ist \mathfrak{C}_2^2 .⁹

Eine Besetzung des basiszentrierten Gitters etwa in der Weise, daß die Eckpunkte der Parallelepipeden mit den einen, die Basiszentren mit den anderen Sphenoidhälften in Beziehung gebracht werden, ist mit \mathfrak{C}_2^2 identisch.

Fig. 5. \mathfrak{C}_2^2 .Fig. 6. \mathfrak{C}_{2h}^5 .

C. Holoedrische Klasse. C_{2h} .

Ein vierflächiges Prisma (vierter Stellung) ist allgemeine Form. Wie es in den beiden symmorphen Raumsystemen mit den Gitterpunkten zu verbinden ist, braucht nicht näher gesagt zu werden. Das pinakoidale Gitter ergibt \mathfrak{C}_{2h}^1 , das basiszentrierte \mathfrak{C}_{2h}^3 .^{10, 11}

Das Prisma läßt sich, allgemein gesprochen, in zwei spiegelbildliche Sphenoide oder Pinakoide, auch in zwei digyrisch verdrehte Domen und schließlich in vier Pedien auflösen. Diese Formen sind nun mit den beiden Raumgittern in Beziehung zu bringen. Eine nähere Prüfung zeigt aber alsbald, wie sich dies alles auf den Fall der Pinakoide zurückführen läßt.

Werden in Fig. 5 die Sphenoidhälften dadurch zu Pinakoiden ergänzt, daß die Gitterpunkte den Charakter von Symmetriezentren erhalten, so ergibt sich der für \mathfrak{C}_{2h}^2 charakteristische Komplex.¹² Durch den nämlichen Prozeß der Einführung des Symmetriezentrums werden auch die einzelnen Flächen des in Fig. 4 dargestellten Komplexes zu Pinakoiden, und es entsteht so eine Darstellung des Raumsystems \mathfrak{C}_{2h}^4 . Wie durch den Vergleich der Fig. 5 mit der Fig. 4 deutlich wird, liegt das Unterscheidende der beiden Raum-

systeme \mathfrak{C}_{2h}^2 und \mathfrak{C}_{2h}^4 darin, daß die Wechsellagerung der mit den einen oder den anderen Pinakoidarten besetzten Netzebenen hier nach (001), dort nach (010) statthat.

Den zwei übrigen Komplexen vom Symmetriecharakter der monoklinen Holoedrie liegt das basiszentrierte Gitter zu Grunde,¹⁴ und zwar ergibt sich die Veranschaulichung von \mathfrak{C}_{2h}^5 , wenn die „Eckpunkte“ mit dem einen, die „Basiszentren“ mit dem anderen der spiegelbildlichen Pinakoide besetzt werden (Fig. 6). Es verdient besondere Beachtung, daß im Gegensatz zu analogen Besetzungen in den Klassen C_s und C_2 Fig. 6 einen wirklich neuen Fall darstellt und weder mit \mathfrak{C}_{2h}^2 noch mit \mathfrak{C}_{2h}^4 identisch ist. In P. Niggli's Geometr. Kristallographie des Diskontinuums ist übrigens dieses Raumsystem so gestellt, daß die {100}-Ebenen zentriert werden.

¹⁵ Das letzte der hierhergehörigen Raumsystemen — \mathfrak{C}_{2h}^6 — läßt sich so darstellen, daß auch den Gitterpunkten von \mathfrak{C}_s^4 der Charakter von Symmetriezentren beigelegt wird. \mathfrak{C}_{2h}^6 ist das basiszentrierte Analogon zu \mathfrak{C}_{2h}^4 .

III. Rhombische Abteilung.

A. Hemimorphe Klasse. C_{2v} .

Unter den viererlei rhombischen Raumgittern, die als einfaches (= pinakoidales), einfach flächenzentriertes, innenzentriertes und allseits flächenzentriertes unterschieden werden, nimmt das zweitgenannte in der Hemimorphie insofern eine Ausnahmestellung ein, als die zentrierte Fläche zur Digyrenrichtung sowohl parallel wie senkrecht sein kann. Ersteres trifft bei der üblichen Stellung für das vordere und für das seitliche Pinakoid zu. Prinzipielle Symmetrieunterschiede zwischen diesen beiden Stellungen ergeben sich indessen keine, so daß im folgenden rein willkürlich, aber konsequent das (010)-zentrierte bevorzugt werden soll. Im ganzen sind also fünf Raumgitter zu berücksichtigen.

Typische Kristallform der Hemimorphie ist die rhombische Pyramide. Mit ihr bilden sich die fünf symmorphen Raumsysteme, über die hier nichts weiteres zu sagen ist, als daß

- ¹⁶ \mathfrak{C}_{2v}^1 dem einfachen,
- ¹⁷ \mathfrak{C}_{2v}^{11} dem basiszentrierten,
- ¹⁸ \mathfrak{C}_{2v}^{14} dem (010)-zentrierten,
- ¹⁹ \mathfrak{C}_{2v}^{20} dem innenzentrierten,
- ²⁰ \mathfrak{C}_{2v}^{18} dem allseitig flächenzentrierten Raumgitter entspricht.

Die rhombische Pyramide kann aufgefaßt werden als Komplex

1. zweier nach $\{100\}$, bezw. nach $\{010\}$ spiegelbildlich gestellter monokliner Domen,
2. zweier monokliner Sphenoide mit vertikal gerichteter Digyre, die nach $\{100\}$ und zugleich nach $\{010\}$ spiegelbildlich orientiert sind,
3. von vier Pedien.

Es ist nun zu untersuchen, wie diese „Teilflächner“ der rhombischen Pyramide in den einzelnen Gittern unterzubringen sind.

Für das einfache Gitter, mit dem begonnen werden soll, ist die Unterscheidung der beiden Domen, wie man sich leicht überzeugt, für das Wesen der Sache belanglos. In Übereinstimmung mit der Darstellung bei P. Niggli seien die beiden Domen gewählt, deren eigene Symmetrieebene $\{010\}$ ist und die dadurch aus der rhombischen Pyramide hervorgehen, daß diese nach $\{100\}$ halbiert wird. Besetzt man jetzt irgend eine der zu $\{001\}$ parallelen Netzebenen mit den Domen der einen Stellung, die unmittelbar darüber oder darunter liegende Netzebene mit den Domen der anderen Stellung, so erhält man ein Strukturmodell des Raumsystems \mathfrak{C}_{2v}^2 .²¹ Die Translationsgröße der c-Achse ist dem ursprünglichen Gitter gegenüber verdoppelt. Der Wechsel der verschieden besetzten (001) -Ebenen entspricht ganz demjenigen, der bei den Raumsystemen \mathfrak{C}_s^2 und \mathfrak{C}_{2h}^4 ausführlich beschrieben und z. T. (Fig. 4) abgebildet wurde.

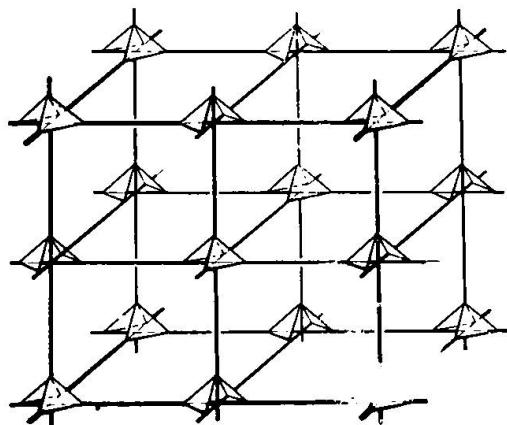
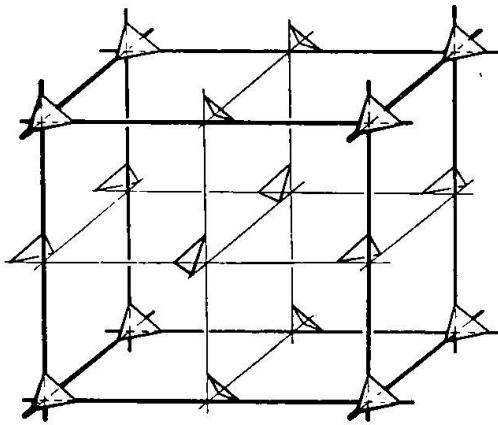
Wollte man Domen in der Weise anordnen, daß die (100) - oder (010) -Ebenen abwechselnd nur mit der einen oder andern Art von Domen besetzt wären, so daß sich also die Verdoppelung der a- oder b-Achse ergeben würde, so erhielte man, von der Lage des Nullpunktes abgesehen, wieder \mathfrak{C}_{2v}^1 .

In \mathfrak{C}_{2v}^3 sind die oben erwähnten zweierlei Sphenoide so angeordnet, wie in \mathfrak{C}_{2v}^2 die beiden Arten Domen. Eine Figur ist ebensowenig erforderlich wie dort.²²

Im Gegensatz zu den Domen lassen sich nun die Sphenoide auch derart anordnen, daß das Gitter nach der a- oder b-Achse verdoppelt erscheint. Im Anschluß an die Darstellung bei P. Niggli ist die b-Achse bevorzugt. Das Raumsystem ist \mathfrak{C}_{2v}^4 . Die bildliche Darstellung ergäbe etwelche Beziehung zu Fig. 5, indem wie dort parallel gleich besetzte (010) -Ebenen mit solchen alternieren, deren Gitterpunkte die komplementäre Form tragen.²³

Schließlich lassen sich die Sphenoide noch in der Weise im Raumgitter einordnen, daß die Translationsgröße nach zwei Achsen-

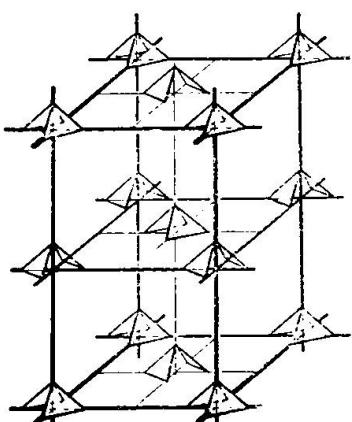
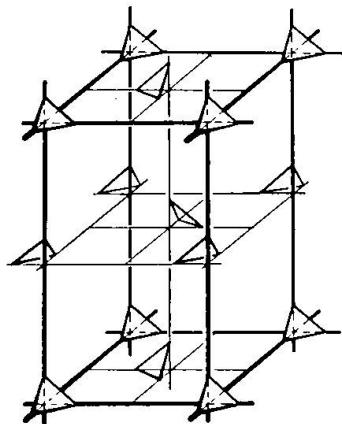
richtungen verdoppelt wird. Im Schnittpunkt dieser Achsen mag das eine Sphenoid angebracht werden; benachbart dazu liegen auf den beiden verdoppelten Achsen die zu jenem Sphenoid spiegelbildlichen Sphenoide. Denkbar sind drei Fälle. Ein wirklich neuer Symmetriecharakter kommt aber nur einem derselben zu, indem die (a, b)-Verdoppelung auf den schon behandelten symmorphen Fall \mathfrak{C}_{2v}^{14} (siehe No. 18) zurückführt und die (b, c)-Verdoppelung von der (a, c)-Verdoppelung nur stellungsverschieden ist. Fig. 7 erläutert in Übereinstimmung mit P. Niggli's Darstellung die (b, c)-Verdoppelung. Es ist sehr schön zu sehen, wie sich die vier Flächen zweier übereinander oder nebeneinander gestellter Sphenoide zu einer rhombischen Pyramide ergänzen (\mathfrak{C}_{2v}^{15}).²⁴

Fig. 7. \mathfrak{C}_{2v}^{15} .Fig. 8. \mathfrak{C}_{2v}^5 .

Eine charakteristische Anordnung von Pedien (Fig. 8) ergibt 25 das Raumsystem \mathfrak{C}_{2v}^5 . Reickt man zwei übereinander liegende Pedien zu einem Sphenoid zusammen, so daß die Verdoppelung nach der c-Achse verschwindet, so erhält man die schon besprochene Veranschaulichung des Raumsystems \mathfrak{C}_{2v}^4 (cfr. No. 23). Übrigens weicht die Aufstellung der Fig. 8 von der bei P. Niggli adoptierten insofern ab, als dort eine Verdoppelung nach der c- und a-Achse gewählt wurde, hier aber die schon bei Fig. 7 gebrauchte Verdoppelung der b- und c-Achse vorgezogen wurde.

Etwas mannigfaltiger als im pinakoidalen Gitter sind die Anordnungsmöglichkeiten im basiszentrierten. Da das Elementarparallelepiped zwei gleichwertige Punktlagen umfaßt, so ist es an und für sich möglich, einen Komplex hierher gehöriger Symmetrie dadurch zu gewinnen, daß ohne Vervielfachung irgendwelcher Achsenrichtung „Eck- und Mittelpunkt“ mit zwei der oben genannten spiegelbildlich orientierten zweiflächigen Teilkörpern der

rhombischen Pyramide besetzt werden (vgl. \mathbb{C}_{2h}^5 , Fig. 6). Einen neuen Symmetriefall erhält man indessen nur bei Verwendung von Sphenoiden der beiderlei Stellungen. Es ergibt dies das Raum-
system \mathbb{C}_{2v}^8 . Domen führen, wie man sich leicht überzeugt, wieder-²⁶
um auf \mathbb{C}_{2v}^4 zurück.

Fig. 9. \mathbb{C}_{2r}^{21} .Fig. 10. \mathbb{C}_{2r}^9 .

Die Ableitung der Raumgruppen \mathbb{C}_{2r}^{12} und \mathbb{C}_{2r}^{13} ist analog der-^{27, 28} jenen von \mathbb{C}_{2r}^2 und \mathbb{C}_{2r}^3 . Wie dort, so sind auch hier die Ebenen parallel zu $\{001\}$ abwechselnd mit Formen der einen, bzw. der andern Stellung besetzt. Bei \mathbb{C}_{2r}^{12} sind es Domen, bei \mathbb{C}_{2r}^{13} Sphenoide.

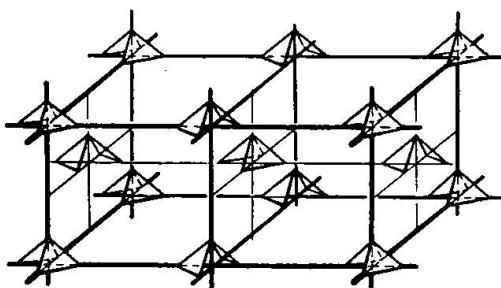
Eine Mittelstellung zwischen \mathbb{C}_{2r}^8 und \mathbb{C}_{2r}^{13} nimmt \mathbb{C}_{2r}^{21} ein, in-²⁹ dem hier sowohl übereinander längs der c-Achsenrichtung, wie auch in den (001) -Netzebenen selber Sphenoide beiderlei Stellungen miteinander alternieren, so wie es Fig. 9 zeigt. Dieselbe Anordnung, mit Domen vorgenommen, ist eine Veranschaulichung des Raumsystems \mathbb{C}_{2r}^{22} , das wir, unter anderem Gesichtspunkt betrachtet, weiter unten besprechen werden.

Ein Pedienkomplex (Fig. 10) ist dem Raumsystem \mathbb{C}_{2r}^9 eigen-³⁰ tümlich. Zu \mathbb{C}_{2r}^8 steht er in demselben Verhältnis wie etwa \mathbb{C}_{2r}^5 zu \mathbb{C}_{2r}^4 , indem je zwei Flächen, welche in \mathbb{C}_{2r}^8 ein Sphenoid bilden, nun in der Digyrenrichtung auseinandergezogen sind, so daß zwei verschiedenartig besetzte (001) -Ebenen miteinander alternieren. Die verschiedenen Fälle, die sich einstellen zu müssen scheinen, sind nurstellungsverschieden.

Nicht symmorphe Raumgruppen leiten sich auch mit Hilfe des für die Hemimorphie charakteristischen, (010) -zentrierten Raumgitters und zwar folgende ab.

Zunächst lassen sich Eck- und Mittelpunkte mit entgegen-
gesetzten Domen verbinden, die nach $[010]$ nicht selber sym-
metrisch sind. Man hat so ein Bild für \mathbb{C}_{2r}^7 (gegenüber der Auf-

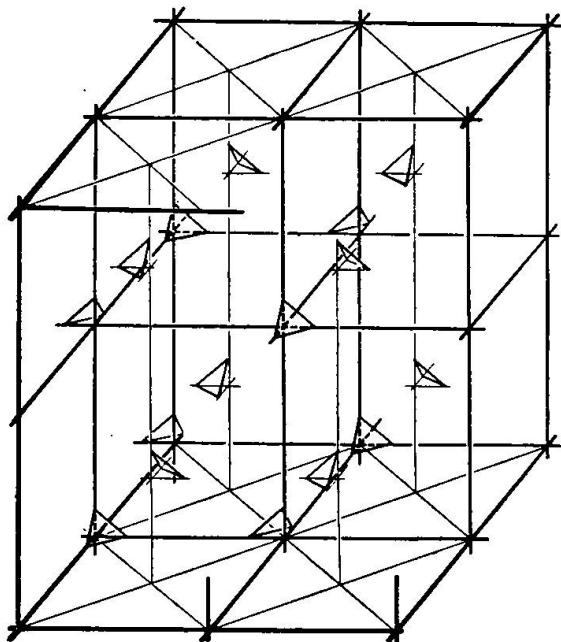
stellung bei P. Niggli sind die a- und b-Achse vertauscht). Die analoge Verwendung von Sphenoiden veranschaulicht das Raum-
³² system \mathfrak{C}_{2v}^{16} . In diesen beiden Strukturschemata sind alle (010)-Netzebenen parallel gleich. Es ist nun aber auch möglich, daß diese Ebenen bloß abwechselnd einander identisch sind, indem auf den dazwischen gelegenen Ebenen die Sphenoide, mit denen die Eck- und Mittelpunkte in Beziehung gebracht werden, gerade entgegengesetzter Stellung sind wie bei den anderen Ebenen. Es resultiert
³³ so *Fig. 11* als Bild für das Raumsystem \mathfrak{C}_{2v}^{22} .

Fig. 11. \mathfrak{C}_{2v}^{22} .

Statt Eck- und Mittelpunkte irgend einer (010)-Netzebene verschieden zu besetzen, könnte man ihnen gleiche Sphenoide (nicht aber gleiche Domen) zuordnen, dafür aber die entsprechenden Punkte der beiden benachbarten Ebenen mit den entgegengesetzten Sphenoiden in Beziehung bringen. Das entstehende Schema steht in engster Beziehung zu Fig. 11, indem das Unterscheidende bloß darin liegt, daß jetzt, wie es die Ableitung erfordert, alle Punkte einer Ebene (010) unter sich parallel gleich sind. Das zugehörige
³⁴ Raumsystem wird mit \mathfrak{C}_{2v}^{16} symbolisiert.

Raumgruppen, deren bildliche Veranschaulichung auf ein innenzentriertes Gitter bezogen werden kann, gibt es außer der symmorphen Raumgruppe (\mathfrak{C}_{2v}^{20} , siehe oben No. 19) nur noch zwei, von
³⁵ denen die erstere, \mathfrak{C}_{2v}^{10} , dadurch definiert ist, daß die Eckpunkte und Raummitten mit Sphenoiden — Domen führen auf \mathfrak{C}_{2v}^7 zurück
³⁶ — spiegelbildlicher Art besetzt sind, die andere aber, \mathfrak{C}_{2v}^{19} , zum „Typus mit sogen. Diamantgittern“ gehört. Zu ihrer Darstellung benötigt man acht Zellen des innenzentrierten Gitters, dessen Punkte zu Trägern von Pedien werden. Die Pedien zweier übereinanderliegender Gitterpunkte ergänzen sich zu einem Sphenoid. Die Pedien der Mittelpunkte ergeben das Sphenoid der einen, diejenigen der Eckpunkte das der anderen Art. Überdies erscheinen diese Sphenoide auf benachbarten c-Richtungen in verschiedener

Weise auseinandergezogen. Jenes Pedion, welches auf der einen c-Richtung unten liegt, ist auf der benachbarten c-Achsenrichtung mit dem höher gelegenen Gitterpunkt verknüpft. Alles dies wird aus *Fig. 12* ersichtlich. Der größeren Anschaulichkeit wegen sind nur die nicht parallel gleichen Punkte mit Pedien in Beziehung gebracht; der übrige Teil des Parallelepips ist, um Überschneidungen nicht unnötig zu häufen, bloß skizziert angedeutet.

Fig. 12. \mathfrak{C}_{2v}^{19} .

Schließlich läßt sich noch eine neue Raumgruppe — \mathfrak{C}_{2v}^{17} — ³⁷ bilden, wenn im allseitig flächenzentrierten Gitter Sphenoide so angeordnet werden, daß z. B. auf den abwechselnden (010)-Ebenen nur Sphenoide der einen Art liegen. Besetzung von Eckpunkt und Basismitte mit Sphenoiden der einen Stellung bei gleichzeitiger Besetzung der Seitenflächen durch Sphenoide der anderen Stellung ergibt wiederum \mathfrak{C}_{2v}^{13} . Werden statt der Sphenoide von \mathfrak{C}_{2v}^{17} in analoger Weise Domen verwendet, so ergibt sich abermals \mathfrak{C}_{2v}^{15} .

B. Hemiedrische Klasse. V.

Der Umstand, daß in der Hemiedrie keine singulären Richtungen auftreten, hat zur Folge, daß zwischen (001)-zentriertem und (010)-zentriertem Gitter nicht unterschieden werden muß. Wir haben demnach nurmehr vier symmorphe Raumsysteme und zwar entspricht

\mathfrak{B}^1 dem einfachen,	38
\mathfrak{B}^6 dem basiszentrierten,	39
\mathfrak{B}^8 dem innenzentrierten,	40

⁴¹ \mathfrak{B}^7 dem allseitig flächenzentrierten Raumgitter. Wegen der Symmorphie sind an Stelle der Gitterpunkte rhombische Bisphenoide zu denken.

Das rhombische Bisphenoid gewährt nur zwei Zergliederungsmöglichkeiten, entweder in zwei „monokline“,stellungsverschiedene Sphenoide, oder dann in vier Pedien. Ob die den Sphenoiden charakteristische Difyre nach der kristallographischen a-, b- oder c-Achse orientiert sei, ist im allgemeinen belanglos. Einzig beim basiszentrierten Gitter zeichnet sich die c-Achse den beiden andern gegenüber in gewisser Weise aus, in keinem Fall aber kann diese Difyre mit jener Richtung zusammenfallen, nach welcher die Translationskonstante verdoppelt wird, weil sonst diese Richtung Difyre und Dihelikogyre zugleich wäre.

⁴² Mit dem einfachen Gitter steht einzig die Raumgruppe \mathfrak{B}^2 in näherer Beziehung. Die abwechselnden (001)-Netzebenen werden mit den beiderlei Sphenoiden besetzt, deren Difyre zur a- oder b-Achse parallel ist. Die Translationskonstante in der c-Richtung ist dem ursprünglichen Gitter gegenüber verdoppelt.

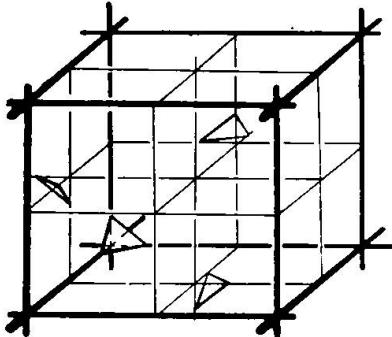
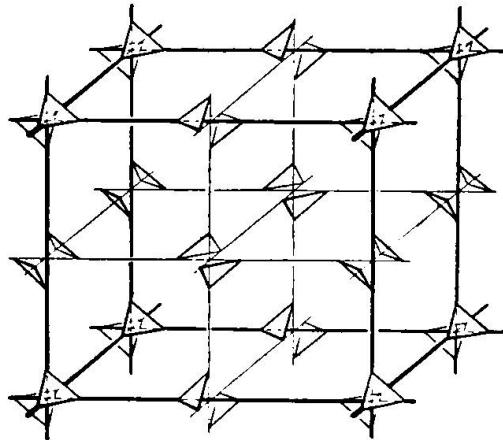
Auf das basiszentrierte Gitter werden drei nicht symmorphe Raumsysteme bezogen. Das erste, \mathfrak{B}^3 , wird dadurch veranschaulicht, daß sich in den (001)-Ebenen, die alle unter sich parallel gleich identisch sind, die stellungsverschiedenen Sphenoide mit zur c-Richtung parallelen Difyren regelmäßig auf Eck- und Mittelpunkte verteilen. Das zweite, \mathfrak{B}^5 , hat in den Mittelpunkten dieselben Sphenoide wie in den Eckpunkten (Difyre z. B. parallel zur a-Achse), besitzt aber alternierende (001)-Ebenen. Das dritte Raumsystem endlich, \mathfrak{B}^9 , nimmt den beiden andern gegenüber eine Mittelstellung ein. In Eck- und Mittelpunkten sitzen wieder ungleiche Sphenoide (mit horizontaler Difyre), es wechseln aber auch längs der c-Richtung die Sphenoide miteinander ab.

Das innenzentrierte Gitter liefert keine nicht symmorphe Raumsysteme, und das allseitig flächenzentrierte nur \mathfrak{B}^4 . Bei \mathfrak{B}^4 ist das Bisphenoid in Pedien aufgelöst. Die verschiedenen möglichen Anordnungen sind bloß stellungsungleich (*Fig. 13*).

C. Holoedrische Klasse. V_h .

Die Hauptform dieser Klasse, die rhombische Bipyramide, ist zerteilbar in zwei Pyramiden, zwei Bisphenoide, zwei Prismen (von monokliner Symmetrie), vier Domen, vier Sphenoide und vier

Pinakoide (alle drei von monokliner Symmetrie). Wegen des vorhandenen Symmetriezentrums ist die Zerlegung in Pedien nicht zu betrachten. Diese große Mannigfaltigkeit von Teilstücken ist zugleich mit der Vierzahl der Raumgitter die Veranlassung dafür, daß wir in dieser Symmetrieklasse die maximale Zahl von Raumsystemen erreichen, die in einer Klasse überhaupt möglich ist: 28.

Fig. 13. \mathfrak{B}^4 .Fig. 14. \mathfrak{B}_h^{11} .

Symmorphie Raumsysteme gibt es natürlich nur vier, entsprechend den vier Gittertypen. Einfaches Gitter hat \mathfrak{B}_h^1 , basiszentriertes \mathfrak{B}_h^{19} , innenzentriertes \mathfrak{B}_h^{25} , allseitig flächenzentriertes \mathfrak{B}_h^{23} .⁴⁷⁻⁵⁰

Beginnen wir die Durchsicht der nicht symmorphen Komplexe wiederum mit dem einfachen Gitter, so sind jene Anordnungen am naheliegendsten, wo übereinander die zweierlei Bisphenoide oder Prismen (nicht mit vertikaler Digyre!) regelmäßig abwechseln. Die zugehörigen Raumsysteme sind \mathfrak{B}_h^3 und \mathfrak{B}_h^5 . Beide Raumsysteme lassen sich übrigens auch in anderer Weise definieren.^{51 52}

Die Zweiflächner der eingangs stehenden Aufzählung ergeben mit dem einfachen Gitter holoedrische Strukturmodelle, wenn die Translationskonstanten nach zwei Richtungen, z. B. nach der b- und c-Achse, verdoppelt werden. Die Pinakoide liefern zwei Fälle: \mathfrak{B}_h^{11} wird durch Fig. 14 veranschaulicht (in der Darstellung Niggis⁵³ mit Verdoppelung von a und b). Nun möge ein Pinakoid einer beliebigen (010)-Ebene näher ins Auge gefaßt werden. Auf den in ihm sich schneidenden b- und c-Richtungen hat es zwei mit ihm ungleiche und auch unter sich verschiedene Pinakoide als Nachbarn. Werden diese miteinander vertauscht, so ergibt sich eine Anordnung, welche das Raumsystem \mathfrak{B}_h^8 darstellt. Der eigentliche innere Unterschied zwischen \mathfrak{B}_h^{11} und \mathfrak{B}_h^8 ist der, daß parallel zu {010}

dort Spiegelebenen, hier aber bloß Gleitspiegelebenen vorhanden sind. — Eine andere Zusammenfassung der Flächen würde übrigens in beiden Fällen auf vier Sphenoide, bei \mathfrak{B}_h^{11} überdies auf vier Domen führen.

Auch Bisphenoide können in einem solchen Gitter derart angeordnet werden, daß holoeedrische Symmetrie resultiert. Der entstehende Komplex mag am besten mit Fig. 7 verglichen werden. Es sind einzig an Stelle der dortigen Sphenoide Bisphenoide zu setzen. Sie wechseln mithin sowohl nebeneinander wie auch über-
55 einander regelmäßig ab (\mathfrak{B}_h^{21}).

Gewissermaßen verachtlicht ist das Gitter, welches der Fig. 15
56 (\mathfrak{B}_h^{27}) zu Grunde liegt. Die Figur selber zeigt im wesentlichen nur einen Achtelsteilraum. In jedem Gitterpunkt sind Pinakoide angebracht. Ihre Anordnung ist sehr anschaulich. Es bilden nämlich

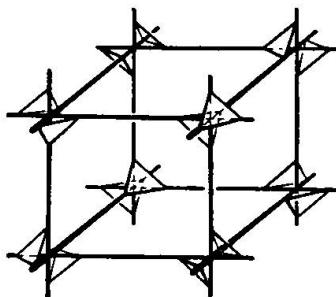


Fig. 15. \mathfrak{B}_h^{27} .

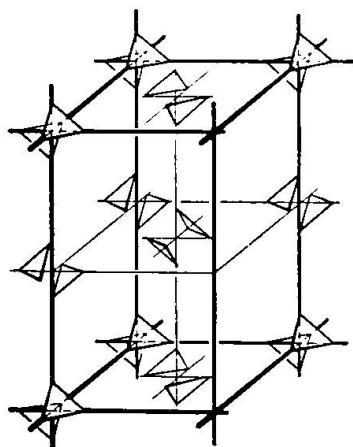
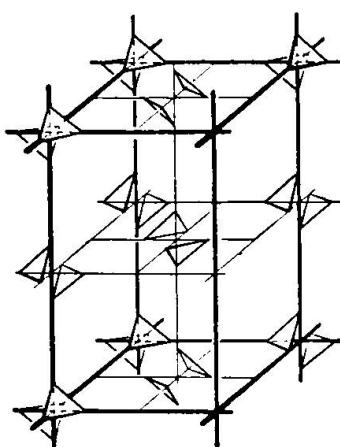
immer zwei benachbarte Pinakoide, die einer Achsenrichtung angehören, ein monoklines Prisma mit zur betreffenden Achsenrichtung senkrechter Digyre. Damit ist die Orientierung — von zyklischer Vertauschungsmöglichkeit der Achsen abgesehen — eindeutig festgelegt.

Die Basiszentrierung umfaßt wie in der Hemimorphie die größte Mannigfaltigkeit: elf nicht symmorphe Raumgruppen. Auf der Hand liegen folgende Fälle, wo in Eck- und Mittelpunkt je zwei spiegelbildliche Vierflächner sitzen. Diese Vierflächner sind bei

- 57 \mathfrak{B}_h^{13} Pyramiden mit vertikaler Digyre,
- 58 \mathfrak{B}_h^4 Bisphenoide,
- 59 \mathfrak{B}_h^9 Prismen mit vertikaler Digyre,
- 60 \mathfrak{B}_h^7 Prismen mit horizontaler Digyre.

Bei Verdoppelung der primitiven c-Achse sind je vier Punkte zu besetzen. Zwei- und Vierflächner kommen in Betracht. Aus
61, 62 \mathfrak{B}_h^7 leitet man \mathfrak{B}_h^6 (Fig. 16) und \mathfrak{B}_h^{14} (Fig. 17) ab, indem man die

Prismen längs der c-Achse zu Pinakoiden auseinanderzieht, unter Berücksichtigung der beiden Möglichkeiten, die sich für die c-Richtung der „Basiszentren“ einstellen, wenn die Anordnung auf der c-Richtung der „Eckpunkte“ fest gegeben ist. Aus Fig. 17 folgt dann das Schema des Raumsystems \mathfrak{B}_h^{16} durch Vertauschung⁶³ von oberer Basismitte mit dem „Eckpinakoid“ der nämlichen Netzebene. Übrigens steht dieser neue Komplex in naher Beziehung zu

Fig. 16. \mathfrak{B}_h^6 .Fig. 17. \mathfrak{B}_h^{14} .

\mathfrak{B}_h^9 . Läßt man nämlich die beiden (001)-Netzebenen durch Verschiebung längs der c-Achse wieder zusammenfallen, so entsteht gerade das für \mathfrak{B}_h^9 charakteristische Modell.

Bisphenoid und Prisma liefern je zwei Typen: In jeder Basisebene sind nur Figuren einerlei Stellung, deren Spiegelbilder in der nächstbenachbarten, darunter oder darüber gelegenen Ebene sind. Bisphenoide hat man bei \mathfrak{B}_h^{20} , Prismen (mit horizontaler⁶⁴ Digyre) bei \mathfrak{B}_h^{17} . Aus \mathfrak{B}_h^{20} kommt durch Vertauschung der Bisphenoide der Basismitten \mathfrak{B}_h^{26} , während eine übereinstimmende⁶⁵ Anordnung der Prismen mit vertikaler Digyre \mathfrak{B}_h^{28} erzeugt.⁶⁶

Auf innenzentriertes Gitter, wobei Eckpunkte und Mittelpunkte mit komplementären Formen zu besetzen sind, lassen sich vorab \mathfrak{B}_h^2 und \mathfrak{B}_h^{12} beziehen, entsprechend spiegelbildlichen Bisphenoiden im ersten, bzw. Prismen im anderen Fall. Bei letzteren wird selbstverständlich die Unterscheidung der Digyrenlage belanglos.

\mathfrak{B}_h^{24} ist wieder vom Diamantgittertypus. Zur Darstellung⁷⁰ werden acht Zellen des innenzentrierten Gitters benötigt. Die Gitterpunkte sind alle mit Sphenoiden gleicher Digyrenrichtung zu besetzen. In Fig. 18, die dieses Symmetrieschema darstellt, sind der Deutlichkeit wegen, ähnlich wie bei Fig. 12, die vordern

Kanten des Parallelepipeds z. T. weggelassen. Auch wurden keine Sphenoide eingezeichnet, welche sich aus den anderen durch bloße Translation von der Größe a , b , c herleiten lassen. Mit Fig. 12

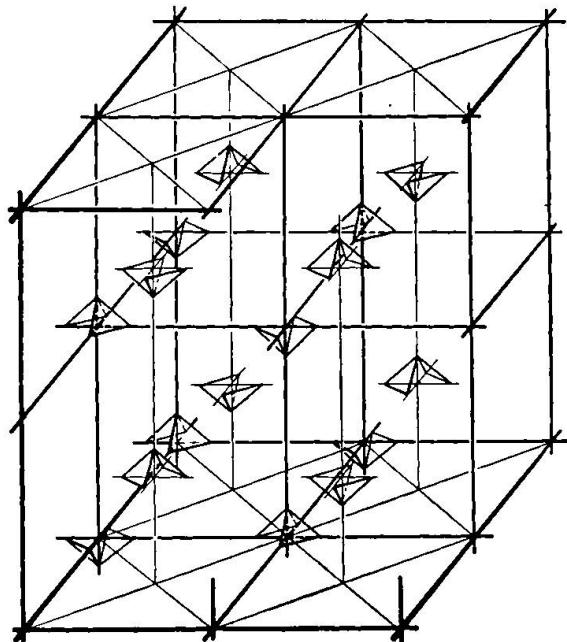


Fig. 18. \mathfrak{B}_h^{24} .

sind nur wenig Analogien vorhanden, schon aus dem einfachen Grund, weil in Fig. 18 sowohl „obere“ wie „untere“ Flächen auftreten (Bipyramiden), während in Fig. 12 nur „obere“ vorhanden sind.

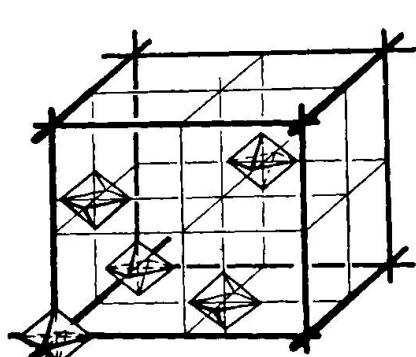


Fig. 19. \mathfrak{B}_h^{18} .

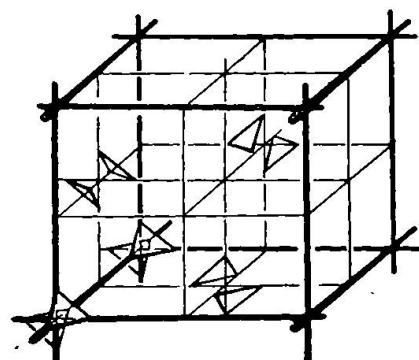


Fig. 20. \mathfrak{B}_h^{10} .

Im allseitig flächenzentrierten Gitter sind am naheliegendsten die Anordnungen von Bisphenoiden und Prismen, indem irgend zwei der Gitterpunkte mit der einen Form, die anderen zwei mit ihrem Spiegelbild verbunden werden. Bisphenoide haben wir bei 71, 72 \mathfrak{B}_h^{22} , Prismen bei \mathfrak{B}_h^{18} (Fig. 19). Beachtung verdient der Umstand, daß die Digyre des Prismas jener Seitenebene des Parallelepipeds parallel läuft, welche die identischen Formen enthält.

Auch mit Pinakoiden läßt sich auskommen und zwar in zweifacher Weise. Die eine Anordnung ist durch *Fig. 20* (\mathfrak{B}_h^{10}) wieder-⁷³ gegeben, die andere folgt hieraus dadurch, daß die Pinakoide von Basismitte und hinterer Flächenmitte miteinander vertauscht werden (\mathfrak{B}_h^{15}). Es ergänzt sich dann das Pinakoid der hintern Ecke mit⁷⁴ irgend einem Seitenmittens-Pinakoid zu einem monoklinen Prisma, dessen Digyre gerade dieser Ebene angehört.

IV. Hexagonale Abteilung.

Das basiszentrierte rhombische Raumgitter geht bei geeigneter Deformation in das sogen. hexagonale Raumgitter über. Strukturen, welche mit diesem Raumgitter im Zusammenhang stehen, finden daher an dieser Stelle ihre passende Besprechung.

Teilweise analogen Charakter wie das hexagonale Gitter hat noch ein zweites, das in der monoklinen und rhombischen Abteilung nicht vorgebildet ist, sondern sich direkt vom triklinen Raumgitter herleitet. Aus diesem geht es dadurch hervor, daß alle primitiven Translationen unter sich gleich werden, ebenso wie die drei Winkel, welche ihre Richtungen miteinander bilden. Es wird rhomboedrisches Raumgitter genannt. Genetisch bedeutet es ein Mittelglied, einen Übergangspunkt in der Entwicklung, der seinen Abschluß erst im kubischen System erreicht, während das hexagonale Gitter bereits den Endpunkt einer Reihe darstellt.

Die Unterteilung des hexagonalen Systems ist im Lehrgebäude der Kristallographie stark umstritten. Während die einen vom hexagonalen System schlechthin sprechen und es in 12 koordinierte Klassen gliedern, ziehen andere eine Zweiteilung in zwei eigene Systeme vor, welche mit den fünf übrigen Systemen als hexagonales und trigonales völlig ranggleich sind. Dadurch aber, daß dem ersten bald sieben, bald nur fünf Klassen zugerechnet werden, erhellt sofort das Ungenügende und Willkürliche aller dieser Abgrenzungen.

Strukturell ist die Sachlage viel klarer. Die fünf Klassen, denen eine Hexagyroide oder eine Trigyre ohne dazu senkrechte Symmetrieebene als Hauptachse zukommt, bilden insofern eine genau umschriebene Einheit, als ihnen strukturell sowohl das hexagonale wie das rhomboedrische Raumgitter zu Grunde liegt. Ihnen sind dann die fünf Klassen mit Hexagyre und rein hexagonaler Struktur gegenüberzustellen. Zwischen beiden stehen die oben noch ausgeschlossenen Klassen, auf deren Trigyre eine Symmetrieebene senkrecht steht. Sie sollen, da sie nur auf hexagonales Gitter be-

zogen werden können, in der folgenden Darstellung den Übergang bilden von den fünf trigonal-rhomboedrischen Klassen zu den fünf eigentlich hexagonalen Klassen.

IV₁. Trigonal-rhomboedrische Abteilung.

A. Tetartoedrische Klasse. C₃.

Allgemeine Form ist die trigonale Pyramide dritter Stellung. Indem solche unter sich identische Pyramiden mit den Gitterpunkten des hexagonalen und rhomboedrischen Raumgitters verbunden werden, ergeben sich die Strukturschemata der beiden symmorphen Raumsysteme \mathfrak{C}_3^1 (hexagonales Gitter, vergl. auch Fig. 21) und \mathfrak{C}_3^4 (rhomboedrisches Gitter). Nicht symmorphe Raumsysteme gibt es zwei, \mathfrak{C}_3^2 und \mathfrak{C}_3^3 , die sich nur dadurch unterscheiden, daß die Triglyren bei \mathfrak{C}_3^2 linksgewundene, bei \mathfrak{C}_3^3 rechts gewundene Schraubenachsen sind. Bildlich kommt dies sehr anschaulich zum Ausdruck, wenn die trigonale Pyramide in drei,

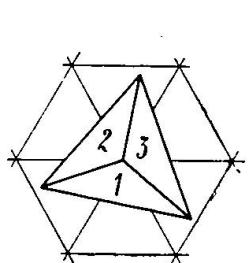


Fig. 21. \mathfrak{C}_3^1 .

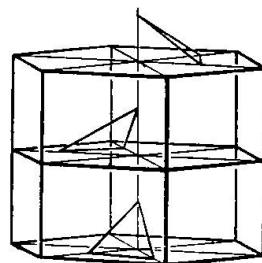


Fig. 22. \mathfrak{C}_3^2 .

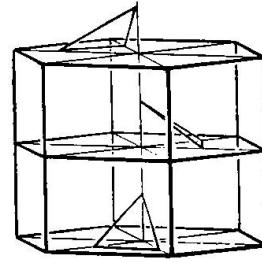


Fig. 23. \mathfrak{C}_3^3 .

nach Maßgabe von *Fig. 21* mit den Zahlen 1, 2, 3 nummerierte Pedien zerlegt wird. Man kann dann alle Gitterpunkte einer beliebigen (0001)-Netzebene des hexagonalen Gitters mit identischen und parallelen Pedien der Stellung 1 besetzen, die der unmittelbar darüberliegenden mit Pedien der Stellung 2 und die der nächsthöheren Netzebene mit Pedien der Stellung 3 und in diesem Rhythmus unbegrenzt weiterfahren. Es entsteht so *Fig. 22* als Schema des Raumsystems \mathfrak{C}_3^2 . Bei \mathfrak{C}_3^3 (*Fig. 23*) ist die Reihenfolge der Pedien, mit welchen jene Ebenen besetzt werden, durch die Zahlen 1, 3, 2 charakterisiert, wogegen sie vorher 1, 2, 3 war.

B. Paramorphe Klasse. C_{3i}.

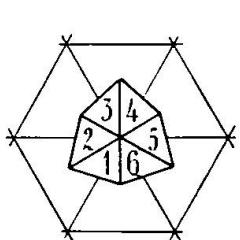
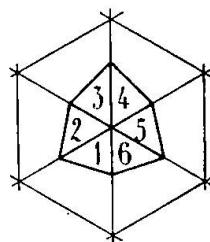
Rhomboeder dritter Stellung heißt die Kristallform, welche phänomenologisch die Symmetrieverhältnisse der paramorphen Klasse allgemein zum Ausdruck bringt. Mit solchen Rhomboedern dritter Stellung bilden sich die Veranschaulichungen der beiden

hier möglichen symmorphen Raumgruppen. Es sind \mathfrak{G}_{3v}^1 mit hexagonalen und \mathfrak{G}_{3v}^2 mit rhomboedrischem Gitter. 79
80

Da es keine Schrauben-Drehspiegelachsen gibt, so ist das Aus-einanderziehen der Rhomboederflächen auf drei übereinander lie-gende (0001)-Netzebenen unmöglich. Die genannten symmorphen Raumgruppen sind mithin die einzigen Raumgruppen, die hier überhaupt als möglich in Betracht fallen.

C. Hemimorphe Klasse. C_{3v} .

Die charakteristische Form ist die ditrigonale Pyramide. Sie besitzt drei zur Triglyre parallele Spiegelebenen. Diese sind den drei Symmetrieebenenscharen, welche dem rhomboedrischen Raumgitter, rein geometrisch gesprochen, von Natur aus zukommen, parallel zu stellen, während sie im hexagonalen Raumgitter, welches

Fig. 24. \mathfrak{G}_{3v}^1 .Fig. 25. \mathfrak{G}_{3v}^2 .

Die zwei Stellungen der ditrigonalen Pyramide im hexagonalen Raumgitter.

zweierlei Scharen von je drei Spiegelebenenrichtungen hat, in zweifacher Weise orientiert werden können. Die Kopfbilder der *Figuren 24 und 25* machen dies deutlich. Die Stellung ist so gewählt, daß der Verlauf der resultierenden Symmetrieebenen mit der kristallographisch üblichen Orientierung übereinstimmt. Dies hat zur Folge, daß die Raumgitter in Fig. 24 und Fig. 25 nicht parallel orientiert sein können. Fig. 25 weicht diesbezüglich von der bei P. Niggli adoptierten Stellung ab. Wegen der starken Betonung des hier so wichtigen kristallographischen Momentes scheint aber diese Abweichung notwendig zu sein. Im übrigen unterscheiden sich beide Stellungen nur durch eine 90° -Drehung um die c-Achse. Die Koordinatendarstellung bei P. Niggli paßt daher nach leichter Transformation auch auf die hier bevorzugte Orientierung.

Auf Grund dieser Festsetzungen ergeben sich drei symmorphe Raumgruppen:

\mathfrak{G}_{3v}^1 mit hexagonalem Raumgitter, entsprechend Fig. 24, 81

\mathfrak{G}_{3v}^2 ebenfalls mit hexagonalem Raumgitter, aber entsprechend Fig. 25, und 82

\mathfrak{G}_{3v}^6 mit rhomboedrischem Raumgitter. 83

Von den möglichen Zerlegungen der ditrigonalen Pyramide sind, wie leicht zu zeigen ist, einzig die in zwei spiegelbildliche trigonale Pyramiden von Bedeutung — gemäß den Zahlen 1, 3, 5, bzw. 2, 4, 6 der Fig. 24 und 25. Natürlich ist auf die Stellung der ditrigonalen Pyramide gegenüber dem Raumgitter wohl zu achten. Besetzt man nun alle Gitterpunkte einer beliebigen Basis-ebene mit Teilpyramiden der einen Art, die darüber- und darunterliegende Basisebene mit denen der anderen Art u.s.w., so erhält man eine Veranschaulichung des Raumsystems \mathfrak{G}_{3v}^3 , wenn die trigonalen Tritopyramiden Fig. 24 entsprechen, jedoch \mathfrak{G}_{3v}^4 , wenn sie sich von der ditrigonalen Pyramide der Fig. 25 herleiten.⁸⁴

Es ist bekannt, daß es grundsätzlich nur einerlei Art rhomboedrischer Gitter gibt, das einfache, deformiert würfelige, daß aber dieses rhomboedrische Raumgitter auch als innenzentriertes betrachtet werden kann. \mathfrak{G}_{3v}^5 darf daher ebensogut auf ein innenzentriertes, wie auf das vorhin gewählte einfache Gitter bezogen werden, und es ergibt sich dann in völliger Analogie zu \mathfrak{G}_{2v}^{10} , \mathfrak{B}_h^2 und \mathfrak{B}_h^{12} ein Flächenkomplex trigonalhemimorpher Symmetrie dadurch, daß die Eckpunkte des rhomboedrischen Gitters mit der einen Art der oben erwähnten trigonalen Teilpyramiden (Flächen 1, 3, 5), die Rhomboedermittelpunkte mit der andern Art (Flächen 2, 4, 6) besetzt werden. Die entsprechende Raumgruppe wird mit \mathfrak{G}_{3v}^6 bezeichnet.⁸⁵

D. Enantiomorphe Klasse. D_3 .

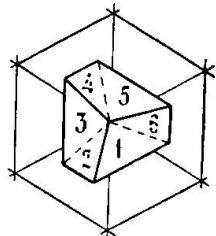
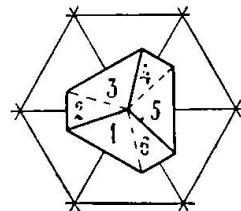
Die Raumsysteme dieser Symmetrieklasse zeigen in ihrer gegenseitigen Beziehung große Analogie zu den für die hemimorphe Klasse abgeleiteten. So bildet man mit parallel gestellten trigonalen Trapezoedern, der typischen Form der Enantiomorphie, ähnlich wie dort, drei symmorphe Raumsysteme. Da nämlich die trigonalen Trapezoeder nur drei Digyren besitzen, können sie wiederum in zweifacher Weise mit dem hexagonalen Raumgitter verbunden werden. *Fig. 26 und Fig. 27* illustrieren diese Verhältnisse. Zugleich entspricht

⁸⁷ Fig. 26 der Raumgruppe \mathfrak{D}_3^1 ,

⁸⁸ Fig. 27 der Raumgruppe \mathfrak{D}_3^2 , während das rhomboedrische
⁸⁹ Gitter der Raumgruppe \mathfrak{D}_3^7 zu Grunde liegt.

Das trigonale Trapezoeder läßt sich in drei Sphenoide mit horizontaler Digyre zerlegen. In der Numerierung der Fig. 26 und 27 sind das die Sphenoide 1—2, 3—4, 5—6. Durch Verteilung derselben auf je drei übereinanderliegende (0001)-Netzebenen

ergeben sich die nicht symmorphen Raumgruppen. Es sind mehrere Fälle zu unterscheiden. Einmal sind wie in der Hemimorphie die beiden Stellungen gegenüber dem Raumgitter in Betracht zu ziehen, und dann ist zweitens die Aufeinanderfolge, in der die Sphenoide angeordnet werden (vergl. Fig. 22 und 23), zu berücksichtigen.

Fig. 26. \mathfrak{D}_3^1 .Fig. 27. \mathfrak{D}_3^2 .

Die zwei Stellungen des trigonalen Trapezoeders im hexagonalen Raumgitter.

Dieser letztere Umstand zeichnet die Enantiomorphie der Hemimorphie gegenüber aus und zeigt, da er eigentlich nichts weiteres besagt als die Existenz von rechts- und linksgewundenen Schraubenachsen, die enge Verwandtschaft der Enantiomorphie mit der Tetartoedrie. Man erhält so folgende vier Fälle:

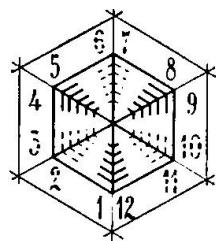
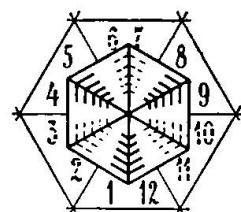
$\mathfrak{D}_3^3 \} \text{ entsprechend } \mathfrak{D}_3^5 \}$	Die Gitterpunkte dreier übereinanderliegender (0001)-Netzebenen werden ähnlich wie in Fig. 22 u. 23, wo sie mit Pedien besetzt wurden, nun mit Sphenoideen in Beziehung gebracht gemäß der Reihenfolge	1-2, 3-4, 5-6 90
Fig. 26		1-2, 5-6, 3-4 91
$\mathfrak{D}_3^4 \} \text{ entsprechend } \mathfrak{D}_3^6 \}$		1-2, 3-4, 5-6 92
Fig. 27		1-2, 5-6, 3-4 93

Die Besetzung der Eck- und Mittelpunkte des rhomboedrischen Gitters mit der oberen, bzw. unteren Hälfte des trigonalen Trapezoeders, den einzigen kristallographisch deutbaren Hälftflächnern des Trapezoeders, führt zu nichts Neuem. Sie bedeutet \mathfrak{D}_3^7 gegenüber einfach eine Verschiebung des Nullpunktes um $\frac{1}{4}$ der Trigylänge.

E. Holoedrische Klasse. D_{3d} .

Der Enantiomorphie gegenüber unterscheidet sich die Holoedrie durch den Hinzutritt des Symmetriezentrums. Die Trigyle wird dadurch zur Hexagyroide. Schraubenartige Anordnungen, bei denen drei übereinander liegende Ebenen mit verschieden gestellten Teilflächnern des Skalenoeders besetzt wären, sind also ausgeschlossen (vergl. den analogen Fall bei der Paramorphie). Es fehlen demnach in der Holoedrie die zu \mathfrak{D}_3^3 , \mathfrak{D}_3^3 , \mathfrak{D}_3^5 und \mathfrak{D}_3^6 analogen Raumgruppen. Die nicht symmorphen Raumgruppen müssen vielmehr nach dem bei der Hemimorphie konstatierten Schema gebaut sein. Von der Hemimorphie unterscheidet sich ja die Holoedrie ebenfalls nur durch das Symmetriezentrum.

Das Skalenoeder kann dem hexagonalen Raumgitter gegenüber ebenfalls eine zweifache Orientierung haben. *Fig. 28 und Fig. 29* erläutern dieselbe. Hierbei ist zu beachten, daß sich im Kopfbild des Skalenoeders obere und untere Hälfte in allem decken. Das Bild bekommt das Aussehen einer hexagonalen Bipyramide zweiter Stellung. Um diesen hier störenden Eindruck zu vermeiden, sind die Skalenoeder-Flächen mit der häufig beobachteten Streifung nach den Randkanten gezeichnet.

Fig. 28. \mathfrak{D}_{3d}^1 .Fig. 29. \mathfrak{D}_{3d}^3 .

Die zwei Stellungen des trigonalen Skalenoeders im hexagonalen Raumgitter.

Man erhält nun im Ganzen sechs Fälle; zunächst drei symmorphe Raumsysteme, nämlich

94 \mathfrak{D}_{3d}^1 mit gedrehtem hexagonalem Gitter, entsprechend Fig. 28,

95 \mathfrak{D}_{3d}^3 mit normal gestelltem hexagonalem Gitter, entsprechend Fig. 29,

96 \mathfrak{D}_{3d}^5 mit rhomboedrischem Gitter,

sodann drei nicht symmorphe Raumgruppen, indem man das Skalenoeder in zwei spiegelbildliche trigonale Trapezoeder (Flächen 1—2, 5—6, 9—10 einerseits und 3—4, 7—8, 11—12 anderseits) zerlegt und im hexagonalen Raumgitter die abwechselnden (0001)-Ebenen (also bloß Zweier-Rhythmus) mit Trapezoedern der einen Art, die dazwischen gelegenen mit solchen der andern Art besetzt (unter Berücksichtigung der doppelten möglichen Orientierung der Trapezoeder-Diglyren gegenüber dem Raumgitter), im rhomboedrischen Gitter aber die eine Trapezoederart auf die Eckpunkte, die andere auf die Mittelpunkte verteilt. Man bekommt so

97 \mathfrak{D}_{3d}^2 hexagonales Gitter mit Flächenanordnung analog zu Fig. 28,

98 \mathfrak{D}_{3d}^4 hexagonales Gitter mit Flächenanordnung analog zu Fig. 29,

99 \mathfrak{D}_{3d}^6 rhomboedrisches, innenzentriertes Gitter.

\mathfrak{C}_{3v}^6 und \mathfrak{D}_{3d}^6 werden auf ein innenzentriertes rhomboedrisches Raumgitter bezogen. Die Einheitlichkeit der Darstellung würde daher gewinnen, wenn auch den fünf symmorphe Raumsystemen \mathfrak{C}_3^4 , \mathfrak{C}_{3i}^2 , \mathfrak{C}_{3v}^5 , \mathfrak{D}_3^7 , \mathfrak{D}_{3d}^5 formal das innenzentrierte Raumgitter zu Grunde gelegt würde.

IV₂. Rein trigonale Abteilung.*A. Paramorphe Klasse. C_{3h}.*

Wie der triklinen Hemiedrie und Holoedrie kommt auch der trigonalen Paramorphie nur ein einziges Strukturschema allgemeinster Art zu. Es ist natürlich symmorph und ergibt sich also dadurch, daß mit den Gitterpunkten parallel orientierte trigonale Bipyramiden dritter Stellung verknüpft werden. Die Raumgruppe wird \mathfrak{C}_{3h}^1 genannt.

100

B. Holoedrische Klasse. D_{3h}.

Wegen der drei und nur drei vertikalen Symmetrieebenen mit dazu parallelen Digyren sind wie in der Hemimorphie, Enantiomorphie und Holoedrie der trigonal-rhomboedrischen Abteilung zweierlei Stellungen der allgemeinsten Flächenform gegenüber dem hexagonalen Raumgitter zu unterscheiden, so daß sich zwei symmorphe Raumsysteme ergeben. Im übrigen leiten sich die einzelnen Fälle am einfachsten ab durch Bezugnahme auf die trigonal-rhomboedrische Hemimorphie. Das Unterscheidende zwischen diesen beiden Klassen liegt ja lediglich darin, daß sich in der Holoedrie eine Symmetrieebene senkrecht zur Trigyre einstellt. Die beiden Raumgruppen \mathfrak{C}_{3v}^5 und \mathfrak{C}_{3v}^6 mit rhomboedrischem Gitter fallen daher sofort außer Betracht, und bei den vier anderen ist das Wort Pyramide immer durch den Ausdruck Bipyramide zu ersetzen. Man hat so

\mathfrak{D}_{3h}^1 mit ditrigonalen Bipyramiden, entsprechend den ditrigonalen Pyramiden von \mathfrak{C}_{3v}^1 ,

\mathfrak{D}_{3h}^3 ebenso wie bei \mathfrak{D}_{3h}^1 , nur im gedrehten Gitter, entsprechend \mathfrak{C}_{3v}^2 ,

\mathfrak{D}_{3h}^2	mit zwei spiegelbildlich gestellten trigonalen Bipyramiden auf den alternierenden (0001)-Netzebenen	entsprechend \mathfrak{C}_{3v}^3 , entsprechend \mathfrak{C}_{3v}^4 .	103
\mathfrak{D}_{3h}^4			104

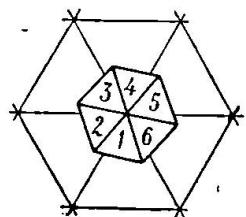
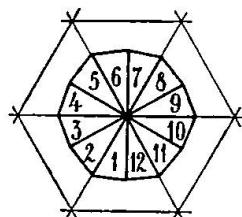
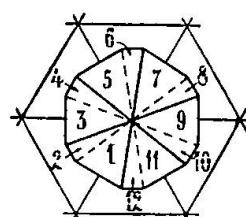
IV₃. Rein hexagonale Abteilung.*A. Tetartoedrische Klasse. C₆.*

Die Ableitung der Raumgruppen, welche der hexagonalen Tetartoedrie zukommen, geht parallel der bei der trigonal-rhomboedrischen Tetartoedrie gegebenen. Durch die höhere Zähligkeit der Hauptachse wird aber eine größere Mannigfaltigkeit bedingt.

Die symmorphe Raumgruppe, \mathfrak{C}_6^1 , ist nach den bisherigen Ausführungen selbstverständlich. Die charakteristische Form ist die hexagonale Pyramide dritter Stellung (*Fig. 30*). Sie läßt sich zerlegen in

1. zwei trigonale Pyramiden dritter Stellung, entsprechend den Flächen 1, 3, 5, bzw. 2, 4, 6 der Fig. 30,
2. drei Sphenoide mit den Flächen 1—4, 2—5, 3—6,
3. sechs Pedien.

Besetzt man die Gitterpunkte der (0001)-Netzebenen abwechselnd mit den trigonalen Pyramiden der einen und andern Stellung,
 106 so erhält man das Strukturschema der Raumgruppe \mathfrak{C}_6^1 . Die Translationsgröße nach c ist verdoppelt. — Die Sphenoide benötigen
 107 drei übereinander folgende (0001)-Netzebenen und lassen sich dem-
 gemäß in doppelter Reihenfolge ordnen. Bei \mathfrak{C}_6^1 sind die Punkte
 108 der einen Netzebene z. B. mit 1—4-Sphenoiden besetzt. Darüber
 folgt eine Ebene mit nur 3—6-Sphenoiden und auf der dritten
 Ebene endlich sitzen die 5—2-Sphenoide. Bei \mathfrak{C}_6^5 ist die Reihen-
 folge 1—4, 2—5, 3—6. Die Anschaulichkeit mag durch die Be-
 trachtung der beiden Figuren 22 und 23 der trigonal-rhomboedri-
 schen Tetartoedrie unterstützt werden.

Fig. 30. \mathfrak{C}_6^1 .Fig. 31. \mathfrak{C}_{8r}^1 .Fig. 32. \mathfrak{D}_6^1 .

Die c-Achse ist in diesen beiden Fällen Digyre und gleichzeitig 3-zählige Schraubenachse. Nur 6-zählige Schraubenachse ist sie in den beiden weiteren Raumgruppen. Die hexagonalen Tritopyramiden von \mathfrak{C}_6^1 erscheinen daher in sechs Pedien auseinandergezogen. Diese besetzen dann je eine (0001)-Netzebene. Mit irgend einer (0001)-Netzebene ist daher erst wieder die sechstfolgende parallelgleich identisch. Natürlich gibt es wieder einen doppelten Schraubensinn, d. h. eine doppelte Reihenfolge in der Besetzung der übereinander liegenden Ebenen. Sie kann anschaulich dargestellt werden bei

- 109 \mathfrak{C}_6^2 durch die natürlich geordneten Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6,
 110 \mathfrak{C}_6^3 durch die umgekehrt geordneten Zahlen 6, 5, 4, 3, 2, 1.

B. Paramorphe Klasse. C_{6h} .

111 Neben der symmorphen Raumgruppe \mathfrak{C}_{6h}^1 gibt es nur noch
 112 eine einzige weitere Raumgruppe: \mathfrak{C}_{6h}^2 . Hier sind die abwechselnden (0001)-Ebenen mit den aus der hexagonalen Titrobipyramide (allgemeinste Form der Klasse C_{6h}) hervorgehenden, um

60° verdrehten Rhomboedern dritter Stellung oder trigonalen Bi-pyramiden (ebenfalls dritter Stellung) zu besetzen.

C. Hemimorphe Klasse. C_{6v} .

Über die mit dihexagonalen Pyramiden gebildete symmorphen Raumgruppe C_{6v}^1 ist nichts weiteres zu sagen; nur sei hervor-¹¹³ gehoben, daß die Unterscheidung von zwei Stellungen im Raumgitter, wie sie in der trigonal-rhomboedrischen Abteilung erforderlich war, jetzt sinnlos wird, weil dihexagonale Pyramide und hexagonales Raumgitter die gleiche Zahl von Symmetrieebenen haben.

Unter den zahlreichen, an und für sich möglichen Zerlegungen der dihexagonalen Pyramide kommen nur jene in Betracht, welche zwei und nur zwei Teilkörper ergeben. Die kristallographisch deutbaren Teilkörper sind

1. hexagonale Pyramiden dritter Stellung (Flächen 1, 3, 5, 7, 9, 11 und 2, 4, 6, 8, 10, 12 der *Fig. 31*), die, auf die abwechselnden (0001)-Ebenen verteilt, C_{6v}^2 ergeben,¹¹⁴

2. ditrigonale Pyramiden, die im Raumgitter in zweifacher Weise gestellt sein können. Da aber die schließlich resultierende Symmetrie phänomenologisch keine der beiden Stellungen unterscheiden läßt, so kann die Drehung des Raumgitters, welche für die kristallographisch richtige Orientierung der ditrigonalen Pyramide im einen Fall nötig wäre, ganz gut unterbleiben. Man hat dann, immer auf die gewöhnliche Stellung des Raumgitters bezogen:

C_{6v}^3 , wenn die abwechselnden (0001)-Netzebenen besetzt sind¹¹⁵ mit den von Ebenen 1—2—5—6—9—10, bzw 3—4—7—8—11—12 gebildeten ditrigonalen Pyramiden,

C_{6v}^4 , wenn die ditrigonalen Pyramiden von Ebenen 1—4—5—¹¹⁶ 8—9—12, bzw. 2—3—6—7—10—11 begrenzt sind.

D. Enantiomorphe Klasse. D_6 .

Der Umstand, daß hier bloß Achsensymmetrie auftritt und demnach zwischen Rechts- und Linksschraubung gegebenen Falles unterschieden werden kann, bedingt wieder eine größere Mannigfaltigkeit.

Die symmorphe Raumgruppe D_6^1 ist selbstverständlich. Indem¹¹⁷ die ihr zu Grunde liegenden hexagonalen Trapezoeder zu trigonalen (gegenseitig um 60° verdrehten) Trapezoedern auseinandergezogen und diese im Raumgitter so verteilt werden, daß die ab-

wechselnden (0001)-Ebenen nur mit den einen oder andern besetzt werden, entsteht \mathfrak{D}_6^6 .

Auch Vierflächner kommen in Betracht. Es bilden nämlich die Flächen 1—6—7—12, 2—3—8—9, 4—5—10—11 (Fig. 32) je ein rhombisches Bisphenoid, die, auf drei übereinander liegende (0001)-Ebenen angeordnet, wieder eine neue Raumgruppe ergeben. Natürlich sind Rechts- und Linkssinn auseinanderzuhalten. Es ent-
spricht \mathfrak{D}_6^4 jener Anordnung, wo, wenn 1..12-Bisphenoide irgend eine (0001)-Ebene besetzen, die darüber gelegene Netzebene mit 2..9-Bisphenoide, die nächst weitere aber mit 4...11-Bi-
sphenoiden besetzt ist. Bei \mathfrak{D}_6^5 ist die Reihenfolge vertauscht. Zu unterst sind wieder 1..12-Bisphenoide, zu oberst jedoch 2...9-Bisphenoide. Ob dann die rhombische a-Achse mit einer hexagonalen Neben- oder Zwischenachse zusammenfalle, bleibt sich gleichgültig. Schließlich ist es ein und dasselbe.

Bei der sechsstufigen Anordnung sind die Netzebenen mit Zweiflächnern besetzt. Diese Zweiflächner sind Sphenoide mit horizontaler Dipyre (vergl. die Raumgruppen \mathfrak{D}_3^3 bis \mathfrak{D}_3^6). Mit Bezugnahme auf Fig. 32 ergeben 1—2-Sphenoide in der untersten Netzebene, 3—4-Sphenoide in der zweiten Ebene, weiterhin 5—6-, 7—8-, 9—10-Sphenoide in den nach oben folgenden Netzebenen und schließlich 11—12-Sphenoide in der obersten (sechsten) Netzebene das Raumsystem \mathfrak{D}_6^2 . Die umgekehrte Reihenfolge liegt \mathfrak{D}_6^3 zu Grunde.

Die Analogie zur hexagonalen Tetartoedrie ist offensichtlich. Durch Vorsetzung der Silbe „Bi-“ bei jeder Formenbezeichnung in der Ableitung der Tetartoedrie (Bipedion als Bisphenoid zu deuten) wird die der Enantiomorphie entsprechende Raumgruppe erhalten.

E. Holoedrische Klasse. D_{6h} .

Genau so, wie sich die Raumgruppen der Enantiomorphie formal durch kleine sprachliche Änderungen aus denjenigen der Tetartoedrie ableiten lassen, ergeben sich auch die vier Raumgruppen der Holoedrie anschaulich aus denjenigen der Hemimorphie bei Ersetzung des Wortes „Pyramide“ durch das Wort „Bipyramide“. Bezüglich des Details kann deshalb auf die dortigen Bemerkungen verwiesen werden, und es genügt hier die bloße Aufzählung der einzelnen Raumsysteme.

123 \mathfrak{D}_{6h}^1 . Symmorphes Raumsystem (mit dihexagonalen Bipyramiden).

\mathfrak{D}_{6h}^2 . Die (0001) - Netzebenen abwechselnd mit hexagonalen Bipyramiden dritter Stellung besetzt.

\mathfrak{D}_{6h}^3 . Übereinstimmende Anordnung von ditrigonalen Bipyramiden der nämlichen Aufstellung wie die der ditrigonalen Pyramiden in \mathfrak{C}_{6v}^3 .

\mathfrak{D}_{6h}^4 . Gleiche Verteilung von ditrigonalen Bipyramiden normaler Stellung ($\{2\bar{1}\bar{1}0\}$ ist Symmetrieebene).

V. Tetragonale Abteilung.

Wie die hexagonale Abteilung so knüpft auch die tetragonale eng an die rhombische an. Während aber die hexagonale einen Endpunkt in der Entwicklung des basiszentrierten Gitters bedeutet, bildet die tetragonale Abteilung einen Übergang von sämtlichen rhombischen Raumgittern zu den kubischen.

Gewöhnlich werden nur zwei tetragonale Raumgitter gezählt, indem das einfache und das basiszentrierte einerseits, das innenzentrierte und allseitsflächenzentrierte anderseits je die nämliche Zahl, Art und Lage der Symmetrieelemente haben. Man spricht daher gemeinhin nur vom einfachen und innenzentrierten tetragonalen Raumgitter. Immerhin ist es in gewissen Fällen notwendig, auch basiszentriertes und allseitsflächenzentriertes Gitter in Betracht zu ziehen, sollen die resultierenden Symmetrieelemente die in der Kristallographie adoptierte Orientierung bekommen.

Die tetragonale Abteilung umfaßt die unter allen Abteilungen maximale Zahl von Raumgruppen: im ganzen 68, die sich auf die sieben Symmetrieklassen verteilen. Die Analogie zur hexagonalen Abteilung springt weniger deutlich in die Augen als es etwa beim phänomenologischen Studium der beiden Systeme der Fall ist.

A. Tetartoedrische Klasse I. Art. C_4 .

Mit der charakteristischen Form der tetragonalen Tetartoedrie I. Art, d. h. mit der tetragonalen Tritopyramide bildet man die den beiden Gittern entsprechenden symmorphen Komplexe und zwar \mathfrak{C}_4^1 mit dem einfachen, \mathfrak{C}_4^5 mit dem raumzentrierten Gitter. ^{127/8}

Da die Flächen der tetragonalen Tritopyramide einzig durch Drehungen ineinander überführbar sind, kommen als mögliche Zerlegungen in Frage

1. um 90° verdrehte Sphenoide, gebildet von je zwei einander gegenüberliegenden Flächen der Tritopyramide und
2. Pedien.

Erstere lassen sich mit dem einfachen Gitter so verbinden, daß alle Punkte einer (001)-Netzebene zu Trägern von Sphenoiden

der einen Art werden, während die benachbarte Ebene mit den
129 um 90° gedrehten Sphenoiden besetzt wird. Das ergibt \mathfrak{C}_4^3 . Hiermit identisch ist der Fall, wo in Eck- und Mittelpunkten des raumzentrierten Gitters ungleiche Sphenoide liegen.

Die Pedienanordnung bedingt im einfachen Gitter einen regelmäßigen Wechsel von je vier übereinanderliegenden (001)-Ebenen, ähnlich wie er in der Dreizahl, bzw. Sechszahl für die entsprechenden Tetartoedrien der trigonal-rhomboedrischen, bzw. hexagonalen Abteilung charakteristisch war. Und wie dort, so sind auch hier zweierlei Anordnungen möglich, eine linksgewundene und eine rechtsgewundene. Zur Veranschaulichung sei auf die Fig. 21—23 verwiesen. Mit Anlehnung an die dortige Bezeichnung entspricht

- 130 \mathfrak{C}_4^4 der Reihenfolge 1, 2, 3, 4 (vergl. auch Fig. 33, z. B. Achse I),
131 \mathfrak{C}_4^2 der Reihenfolge 4, 3, 2, 1.

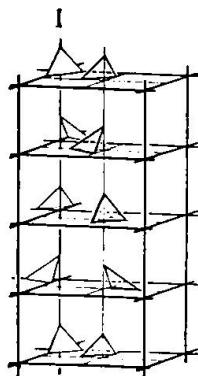


Fig. 33. \mathfrak{C}_4^6 .

In diesen beiden Fällen hat die durch den Basismittelpunkt gehende c-Richtung den Charakter einer 4-zähligen Schraubenachse. Im Windungssinn stimmt sie mit den Schraubenachsen der Seitenkanten überein, ist aber im übrigen von ihnen wesentlich verschieden, und es ist klar, daß völlige Übereinstimmung der beiden Achsen nur eine um 45° gedrehte Stellung von \mathfrak{C}_4^2 und \mathfrak{C}_4^4 ist. Ein wirklich neues Raumsystem ergibt sich aber dadurch, daß von den beiden an und für sich identischen c-Achsenrichtungen z. B. diejenige der Basismitte gegenüber derjenigen der Eckpunkte um die Hälfte ihrer Periode verschoben wird. Ob der Windungssinn nach rechts oder nach links gerichtet sei, bleibt sich gleichgültig, da nach jenen c-Richtungen, welche im Halbierungspunkt der a_1 - und a_2 -Achsen errichtet sind, die Flächenanordnung gerade entgegengesetzten Windungssinn zeigt wie an den beiden erstbetrachteten Achsen, ohne aber hierzu spiegelbildlich zu sein. Der resul-

tierende Komplex ist in *Fig. 33* dargestellt und entspricht der Raumgruppe \mathfrak{C}_4^6 . Gegenüber der Koordinatendarstellung von P. 132 Niggli zeigt er eine Nullpunktsverschiebung.

B. Tetartoedrische Klasse II. Art. S_4 .

Hier gibt es nur die beiden symmorphen Raumgruppen \mathfrak{S}_4^1 133 und \mathfrak{S}_4^2 . Ersterer liegt das einfache, letzterer das innenzentrierte 134 Gitter zu Grunde. An Stelle der Gitterpunkte treten tetragonale Bisphenoide dritter Stellung.

C. Paramorphe Klasse. C_{4v} .

Wenn die charakteristische Form dieser Symmetrieklasse, die ditetragonale Pyramide, die Gitterpunkte ersetzt, ergeben sich die beiden symmorphen Raumgruppen \mathfrak{C}_{4v}^1 mit dem einfachen und 135 \mathfrak{C}_{4v}^9 mit dem innenzentrierten Gitter. 136

Die ditetragonale Pyramide läßt sich zerlegen in

- a) zwei tetragonale Pyramiden dritter Stellung,
- b) zwei rhombische Pyramiden, deren eigene Spiegelebenen $\{110\}$ -Ebenen sind,
- c) zwei rhombische Pyramiden, die je nach $\{100\}$ -Ebenen spiegelbildlich sind,
- d) vier Sphenoide mit vertikaler Digyre,
- e) vier Domen, deren Spiegelebenen $\{100\}$ parallel sind,
- f) vier Domen, deren Spiegelebenen $\{110\}$ parallel sind,
- g) acht Pedien.

Zur Einordnung dieser Kristallformen in den beiden Raumgittern eignet sich in ganz vortrefflicher Weise das für die Tetartoedrie benutzte Schema. Dadurch nämlich, daß im einfachen Gitter, ähnlich wie bei \mathfrak{C}_4^3 die (001) -Netzebenen abwechselnd mit den entgegengesetzten Vierflächern besetzt werden, ergeben sich die Raumgruppen

\mathfrak{C}_{4v}^5 , wenn die Vierflächner Tritopyramiden sind, 137

\mathfrak{C}_{4v}^3 , wenn sie rhombische Pyramiden von der $\{110\}$ -Art sind, 138

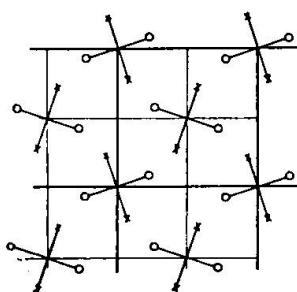
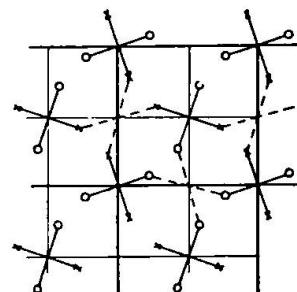
\mathfrak{C}_{4v}^7 , wenn sie rhombische Pyramiden von der $\{100\}$ -Art sind. 139

Hat das Sphenoid, der einzige in Betracht fallende Hälftflächner der Tetartoedrie I, mit dem innenzentrierten Gitter keinen neuen Symmetriefall erzeugt, so stellen sich jetzt wegen der größeren Mannigfaltigkeit der Verhältnisse sogar zwei neue Fälle ein. Es entspricht

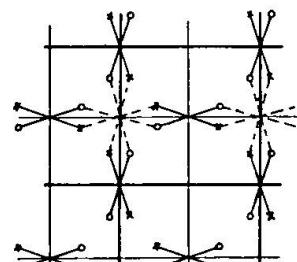
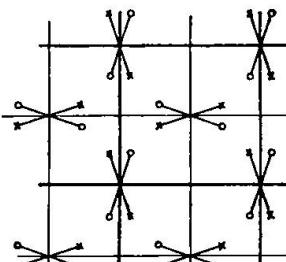
\mathfrak{C}_{4v}^6 dem innenzentrierten Gitter mit ungleichen Tritopyramiden 140 in Eck- und Mittelpunkten,

- 141 \mathbb{C}_{4v}^4 der analogen Anordnung von rhombischen Pyramiden mit Eigensymmetrie nach {110}.

Ebenso wie sich \mathbb{C}_{4v}^5 dadurch aus der symmorphen Anordnung ableitet, daß die ditetragonale Pyramide in zwei nach der c-Achse auseinandergezogene Tritopyramiden zerlegt wird, liefert auch die Raumgruppe \mathbb{C}_{4v}^9 einen neuen Fall, wenn die eine Hälfte der ditetragonalen Eckpyramide längs der zugehörigen c-Richtung auf die Höhe der durch den Mittelpunkt gehende Ebene gehoben und die übereinstimmende Hälfte der Mittelpunktpyramide auf das

Fig. 34. \mathbb{C}_{4v}^8 .Fig. 35. \mathbb{C}_{4v}^4 .

Niveau der durch den untern Eckpunkt gehenden Basis gebracht wird. Der entstehende Komplex erscheint dann als basiszentriertes, in der c-Richtung verdoppeltes Gitter, bei dem nicht nur Eckpunkte

Fig. 36. \mathbb{C}_{4v}^3 .Fig. 37. \mathbb{C}_{4v}^5 .

und Basismitten ungleich besetzt sind (\mathbb{C}_{4v}^2 , siehe No. 143), sondern auch längs der durch diese beiden Punktarten gehenden c-Richtungen die beiden Formen regelmäßig miteinander wechseln. Der Komplex ist also vom Typus der Fig. 9 (und ähnlicher) und ver-
142 anschaulicht \mathbb{C}_{4v}^{10} .

Ein ähnliches basiszentriertes Gitter, jedoch mit einzigem Wechsel in der Besetzung von Basismitten und Basisecken, bildet
143 das Schema der bereits genannten Raumgruppe \mathbb{C}_{4v}^2 .

Einen nämlichen Typ wie das vorletzte Gitter, d. h. basis-
zentriert und nach c verdoppelt, bildet auch das Strukturschema
144 von \mathbb{C}_{4v}^8 . Die Bausteine sind Sphenoide. Es sind vier Anord-

nungen denkbar, zu deren Erläuterung die vier *Figuren* 34, 35, 36 und 37 dienen mögen. Die einzelnen Flächen sind wie bei der stereographischen Projektion, wenn auch in etwas anderer Bedeutung, durch Kreuz und Kreis symbolisiert. Kreuze bezeichnen Punkte, die um eine Netzebene höher liegen als die durch Kreise dargestellten. Man braucht nun bloß die Punkte in geeigneter, bei Fig. 35 und 36 angedeuteter Art und Weise zusammenzufassen, um einzusehen, daß einzig Fig. 34 einen neuen Symmetriefall darstellt, entsprechend der Raumgruppe \mathfrak{C}_{4v}^8 , während

Fig. 35 mit der Raumgruppe \mathfrak{C}_{4v}^4 ,

Fig. 36 mit der Raumgruppe \mathfrak{C}_{4v}^3 ,

Fig. 37 mit der Raumgruppe \mathfrak{C}_{4v}^5 identisch wird.

Mit Domen lassen sich entweder keine raumgitterartigen Komplexe bilden, oder sie stimmen mit schon erledigten Raumgruppen überein. Dagegen liefern die Pedien neue Strukturtypen, die am

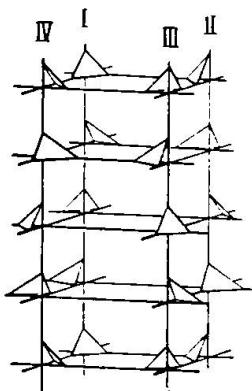


Fig. 38. \mathfrak{C}_{4v}^{11} .

besten auf das gewöhnliche, jedoch nach der a_1 - und a_2 -Achse verdoppelte, nach der c -Achse sogar vervierfachte Gitter bezogen werden. Es darf dann vorausgesetzt werden, daß die hintere, linke c -Kante gleichgebaut sei wie im Strukturmodell von \mathfrak{C}_4^4 . Sie ist also von vier Pedien schraubenförmig umgeben (Achse I in Fig. 38). Nun ist klar, daß die Achsen II und IV gerade entgegengesetzten Windungssinn haben müssen, wenn der Komplex irgendwelche vertikale Symmetrieebenen besitzen soll. Zwei Fälle sind denkbar: die Symmetrieebenen sind entweder gewöhnliche Spiegelebenen, und dann resultiert Fig. 38 entsprechend der Raumgruppe \mathfrak{C}_{4v}^{11} ,¹⁴⁵ oder aber Gleitspiegelebenen mit einer zur c -Achse parallelen Gleitkomponente entsprechend der Raumgruppe \mathfrak{C}_{4v}^{12} , und dann¹⁴⁶ entsteht ein Komplex, der sich von dem in Fig. 38 wiedergegebenen dadurch unterscheidet, daß II und IV vertauscht erscheinen. In beiden Fällen sind I und III, bzw. II und IV nur digyrisch ver-

dreht. Im übrigen zeigt Fig. 38 nur einen Viertel des Elementarparallelepipeds. Die Zahlenschemata der *Fig. 39 und Fig. 40* fassen den Sachverhalt schön zusammen. Die Zahlen selber deuten die Stufen an, auf denen sich die Pedien befinden.

D. Paramorphe Klasse. C_{4h} .

Von den beiden symmorphen Raumgruppen wird beim Ersatz der Gitterpunkte durch tetragonale Tritobipyramiden

¹⁴⁷ \mathfrak{C}_{4h}^1 durch das einfache,

¹⁴⁸ \mathfrak{C}_{4h}^5 durch das innenzentrierte Gitter versinnlicht.

Die Tritobipyramide kann in folgende Teilflächner zergliedert werden (*Fig. 41*):

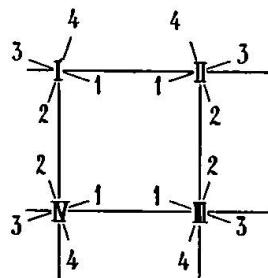


Fig. 39. \mathfrak{C}_{4v}^{11} .

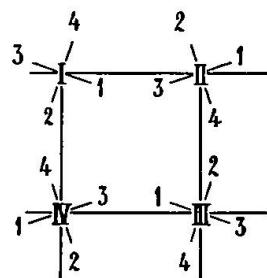


Fig. 40. \mathfrak{C}_{4v}^{12} .

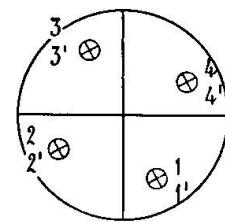


Fig. 41.

1. Obere und untere Tritopyramide, also 1—2—3—4 einerseits und 1'—2'—3'—4' anderseits.
2. Zwei um 90° gedrehte tetragonale Bisphenoide dritter Stellung: 1—2'—3—4' und 1'—2—3'—4.
3. Zwei „monokline“ Prismen mit vertikaler Digyre: 1—1'—3—3' und 2—2'—4—4'.
4. Vier monokline Sphenoide als Hälften der eben genannten Prismen: 1—3; 2—4; 1'—3'; 2'—4'.
5. Acht Pedien.

Obere und untere Tritopyramide können nur im innenzentrierten Gitter untergebracht werden und zwar bei abwechselnder Verteilung auf Eckpunkte und Raummitten. Es entsteht so das ¹⁴⁹ für \mathfrak{C}_{4h}^3 charakteristische Strukturschema.

Die tetragonalen Bisphenoide sind für den Aufbau paramorpher Strukturbilder ungeeignet: vierzählige Drehspiegelachse und Tetragyre mit senkrechter Spiegelebene vertragen sich nicht.

Mit Prismen können mehrere raumgitterartige Komplexe ¹⁵⁰ bildet werden. Etwas Neues — \mathfrak{C}_{4h}^2 — stellt aber nur der Fall dar, wo irgend eine (001)-Netzebene mit Prismen der einen Stellung, die unmittelbar benachbarte parallele Netzebene mit Prismen der anderen Stellung besetzt wird.

Für die Sphenoide sind vier Punkte erforderlich. Am anschaulichsten ist die Darstellung im basiszentrierten Gitter mit verdoppelter c-Richtung. Es werden dann in den Eckpunkten beispielsweise die von den oberen Flächen gebildeten zwei Sphenoide, in den Basismitten die beiden unteren eingefügt. Es sind zwei Kombinationen denkbar. Liegen in den unteren Eckpunkten Sphenoide 1—3, in den darüber befindlichen also Sphenoide 2—4, so können die Basismitten in folgender Weise besetzt sein:

unten	1'—3'	2'—4'
	entweder	oder umgekehrt
oben	2'—4'	1'—3'

Schematische Darstellungen nach Art der Fig. 34—37 lassen erkennen, daß, von der Lage des Nullpunktes abgesehen, beide Gruppierungen identisch sind. \mathfrak{C}_{4h}^4 . 151

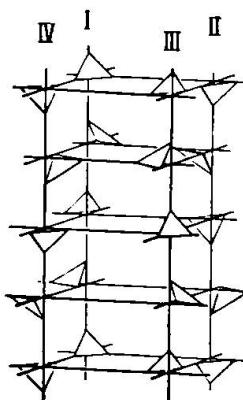


Fig. 42. \mathfrak{C}_{4h}^4 .

Die Gruppierung der Pedien ist in gewissem Sinn analog zu \mathfrak{C}_{4v}^{12} . Wiederum ist vom gewöhnlichen tetragonalen Gitter auszugehen. a_1 - und a_2 -Richtung müssen verdoppelt werden, die c-Richtung ist zu vervierfachen. Wir haben also 16 Zellen. Fig. 42 zeigt die Anordnung (es ist aber nur $1/4$ dargestellt). Die vier c-Richtungen tragen dieselbe Numerierung wie in Fig. 38. Um sie herum sind die Pedien nach Art vierzähliger, links- und rechtsgewundener Schraubenachsen angeordnet. I zeigt z. B. Linksschraubensinn entsprechend der nämlichen Achse in Fig. 38. Die Symmetrieebenen können nur Gleitspiegelebenen sein. Sie mögen mit den (001)-Netzebenen zusammenfallen. Die Gleitkomponente der untersten sei der a_2 -Achse parallel gerichtet. Die Gleitkomponente der nächst höheren ist dann parallel zu a_1 . II wird hierdurch zur Rechtsschraube und die Flächen liegen, im Gegensatz etwa zur gleichbezeichneten in Fig. 38, unter den Netzebenen. Ebenfalls Rechts-

schraubensinn zeigt IV. Ihre Nullpunktslage ergibt sich zwanglos, sobald man berücksichtigt, daß II durch die Linksschraubung um I in IV übergeht. Ähnlich ist III durch die Rechtsschraubung um 152 II aus I ableitbar. Die Raumgruppe wird mit \mathfrak{C}_{1h}^6 bezeichnet.

D. Enantiomorphe Klasse. D_4 .

Die Raumgruppen der Enantiomorphie stehen untereinander in recht übersichtlichem Zusammenhang. Typische Form ist das Trapezoeder. Parallele Trapezoeder sind die Bauelemente der symmorphen Flächenkomplexe.

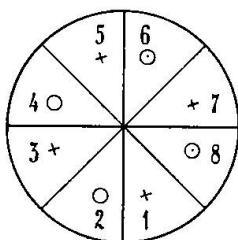
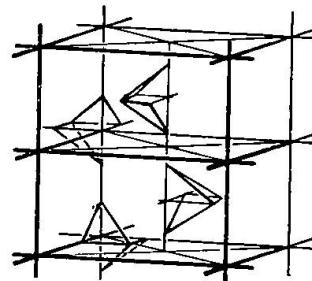


Fig. 43.

Fig. 44. \mathfrak{D}_4^4 .

153 \mathfrak{D}_4^1 hat einfaches,

154 \mathfrak{D}_4^9 innenzentriertes Gitter.

Aus dem Trapezoeder (Fig. 43) leitet man ab:

1. Obere und untere, gegenseitig um einen gewissen Winkel gedrehte tetragonale Tritopyramiden. 1—3—5—7 und 2—4—6—8.
2. Zwei um 90° gegenseitig verdrehte rhombische Bisphenoide, deren horizontale Digyren den tetagonalen Zwischenachsen parallel sind, entsprechend den Flächen 2—3—6—7 und 1—8—4—5.
3. Ebenfalls zwei rhombische Bisphenoide, aber mit Digyren, die den Nebenachsen parallel sind. 1—2—5—6 und 3—4—7—8.
4. Vier monokline Sphenoide mit vertikaler Digyre. 1—5, 3—7, 2—6, 4—8.
5. Vier monokline Sphenoide mit horizontaler Digyre in Richtung der Nebenachsen: 1—2, 3—4, 5—6, 7—8.
6. Ähnliche Sphenoide, aber mit Digyren, die den Zwischenachsen parallel sind: 2—3, 4—5, 6—7, 8—1.
7. Acht Pedien.

Mit den unter 2. genannten rhombischen Bisphenoiden lassen sich zweierlei Flächenkomplexe bilden.

155 \mathfrak{D}_4^2 hat basiszentriertes Gitter,

156 \mathfrak{D}_4^6 innenzentriertes. Die Eckpunkte sind mit den einen, die Innenpunkte mit den anderen Sphenoiden besetzt.

\mathfrak{D}_4^2 könnte übrigens ebenso anschaulich durch obere und untere Pyramiden definiert werden. Dem innenzentrierten Gitter lassen sich auch die beiden Sphenoide von 3. einordnen. Der entstehende Komplex versinnlicht \mathfrak{D}_4^5 . Hiermit identisch sind alle jene Kom-¹⁵⁷

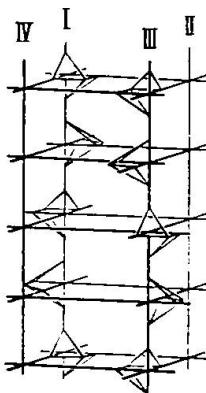


Fig. 45. \mathfrak{D}_4^{10} .

plexe, die sich aus dem gewöhnlichen, nach c verdoppelten Gitter dadurch ableiten, daß die (001)-Ebenen abwechselnd mit um 90° gedrehten Bisphenoiden besetzt werden, und zwar ist es für den Symmetrieffekt belanglos, ob alle ihre horizontalen Digyren den Nebenachsen oder Zwischenachsen parallel laufen.

Zwei neue, zueinander enantiomorphe Raumgruppen ergeben sich aus \mathfrak{D}_4^6 . Das innenzentrierte Gitter ist nach c zu verdoppeln und die Bisphenoiden müssen zu Sphenoide der Art von No. 6 zerlegt und auf der c-Achse unter Wahrung des Charakters von innenzentrierten Gittern auseinandergezogen werden. Liegt etwa am hintern, untern Eckpunkt das Sphenoid 1—8, so trägt der darüberliegende Eckpunkt das Sphenoid 4—5. Die Mittelpunktsphenoide lassen dann eine doppelte Anordnung zu. Diejenige von Fig. 44 entspricht der Raumgruppe \mathfrak{D}_4^4 , die andere, bei der diese¹⁵⁸ Sphenoide ihre Rolle gerade vertauschen, gehört zu \mathfrak{D}_4^8 .¹⁵⁹

Ebenfalls zwei enantiomorphe Anordnungen liefern die unter 5. genannten monoklinen Sphenoide und zwar unter Zugrundelegung des gewöhnlichen, aber nach c vervierfachten tetragonalen Gitters. Bei \mathfrak{D}_4^3 ist ihre gegenseitige Stellung längs allen Seiten-¹⁶⁰ kanten übereinstimmend wie in Fig. 45 längs I. \mathfrak{D}_4^7 hat umge-¹⁶¹ gekehrten Windungssinn.

Die letzte Raumgruppe — \mathfrak{D}_4^{10} — veranschaulicht sich bildlich am ungezwungensten im basiszentrierten, nach c vervierfachten Gitter. Die Bausteine sind wieder Sphenoide mit horizontaler Digyre; ob diese den Nebenachsen oder Zwischenachsen parallel gehen, bleibt sich gleichgültig. In Fig. 45 sind letztere bevorzugt.

Die durch die Eckpunkte gehende c-Achse hat gleichen Windungssinn, wie die durch die Basismitten gehende. In *Fig. 45* ist Linkssinn vorausgesetzt. Beide sind übrigens digyrisch verdreht. Eine hierzu enantiomorphe Anordnung gibt es nicht, weil die Achsen II und IV Rechtsschraubensinn haben. Die Bauelemente sind daher ebensowohl im Rechts- wie im Linksschraubensinn angeordnet.

F. Hemiedrische Klasse II. Art. \mathfrak{B}_d .

Das tetragonale Skalenoeder mit zwei vertikalen Spiegelebenen, deren Winkelhalbierende Digyren sind, kann in zweifacher Weise dem Raumgitter gegenüber orientiert sein, entweder so, daß die Symmetrieelemente die kristallographisch übliche Lage haben, oder dann so, daß sie dieser Stellung gegenüber um 45° gedreht erscheinen. Das ergibt vier symmorphe Komplexe. Da von der gewohnten kristallographischen Orientierung der Symmetrieelemente nicht abgewichen werden soll, sind die Gitter gegebenen Falls zu drehen, so daß jetzt alle vier tetragonalen Gitter in Betracht zu ziehen sind. Es entspricht dann

- 163 das einfache Gitter der Raumgruppe \mathfrak{B}_d^1 ,
- 164 das innenzentrierte der Raumgruppe \mathfrak{B}_d^{11} ,
- 165 das basiszentrierte der Raumgruppe \mathfrak{B}_d^5 ,
- 166 das allseitsflächenzentrierte der Raumgruppe \mathfrak{B}_d^9 .

Von den vielen Teilflächern, die sich aus dem tetragonalen Skalenoeder ableiten lassen, benötigt die folgende Darstellung nur drei: tetragonales und rhombisches Bisphenoid und monoklines Sphenoid.

Die beiden tetragonalen Sphenoide dritter Stellung werden mit den Eck- und Innenpunkten des basis- und raumzentrierten Gitters verbunden. Sind sie nach $\{110\}$ spiegelbildlich gestellt, 167/8 so resultieren die den Raumgruppen \mathfrak{B}_d^3 (basiszentriert) und \mathfrak{B}_d^4 (raumzentriert) entsprechenden Komplexe. Sind aber die beiden Bisphenoide nach $\{100\}$ spiegelbildlich orientiert, so muß wegen obiger Festsetzung das Gitter gedreht werden. Aus dem basiszentrierten Gitter entsteht ein Gitter gewöhnlicher Art, dessen a_1 - und a_2 -Richtung verdoppelt sind, und es wechseln die beiden 169 Bisphenoide gerade nach diesen Richtungen miteinander ab, \mathfrak{B}_d^7 . Umgekehrt geht das innenzentrierte Gitter in das allseitigflächenzentrierte über und die Besetzung ist so, daß in der einen (001) -Netzebene nur die eine Bisphenoidart, in der dazu benachbarten 170 aber die andere liegt (\mathfrak{B}_d^8).

Rhombische Bisphenoide kommen bei drei Raumgruppen in 171 Frage. Bei \mathfrak{B}_d^2 liegt ein gewöhnliches, aber nach c verdoppeltes

Gitter vor. In die eine Basisebene kommen die Bisphenoide der einen Stellung, die horizontalen Digyren nach den Nebenachsen orientiert, in die darübergelegene die gleich orientierten der anderen Art.

\mathfrak{B}_d^6 zeigt die nämlichen Verhältnisse, nur sind jetzt die horizontalen Bisphenoidachsen nach den kristallographischen Zwischenachsen gerichtet. Um die kristallographisch übliche Aufstellung zu bekommen, ist das Gitter um 45° zu drehen. Es wird dadurch basiszentriert, bleibt aber nach c verdoppelt, und die (001)-Ebenen alternieren wie bei \mathfrak{B}_d^2 .

Mit \mathfrak{B}_d^7 steht \mathfrak{B}_d^{10} in engstem Zusammenhang. Das Unter-¹⁷² scheidende liegt einzig darin, daß jetzt auch c verdoppelt wird.

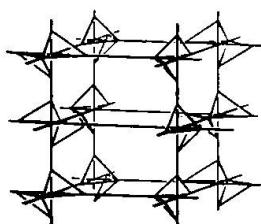
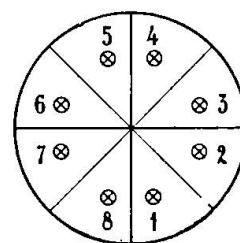
Fig. 46. \mathfrak{B}_d^{12} .

Fig. 47.

Es wechseln dann nach allen drei Kantenrichtungen die Bisphenoide regelmäßig miteinander ab.

Auch \mathfrak{B}_d^{12} wird auf ein solches achtfaches Gitter bezogen. Bau-¹⁷⁴ elemente sind aber jetzt monokline Bisphenoide mit horizontaler Digyre. Sie kommen in vierfacher Stellung vor; die Digyre ist immer nach einer der Nebenachsen gerichtet. Fig. 46 erläutert die Anordnung.

G. Holoedrische Klasse. D_{4h} .

Die tetragonale Holoedrie umfaßt 20 Raumgruppen, die drittgrößte Zahl, die überhaupt in einer Symmetrieklasse vorkommen kann. Symmorphe Raumgruppen gibt es natürlich nur zwei. Ditetragonale Bipyramide im einfachen Raumgitter entspricht \mathfrak{D}_{4h}^1 , ¹⁷⁵ im innenzentrierten Raumgitter \mathfrak{D}_{4h}^{17} . ¹⁷⁶

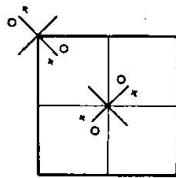
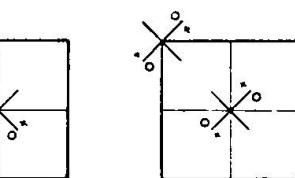
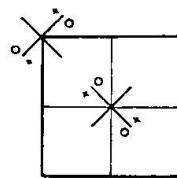
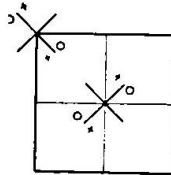
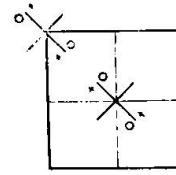
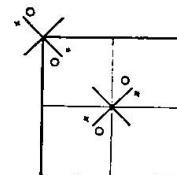
Von den nicht symmorphen Raumsystemen können elf auf das basiszentrierte, das innenzentrierte und das nach c verdoppelte gewöhnliche Gitter bezogen werden, und es ist sehr lohnend, dieselben in übersichtlicher Zusammenstellung zu untersuchen.

Die Zähligkeit der Gitterpunkte aller der genannten drei Gitter ist zwei. Es braucht daher je zwei komplementäre, von der ditetragonalen Bipyramide abstammende Achtflächner, um holoedrische

Symmetrie zu bekommen. Ditetragonale Pyramiden werden nicht benötigt.

Achtflächner		basiszentriertes G.	innenzentriertes G.	nach c verdoppelte G.
177/9 Tetragon. Trapezoeder:	1-2'-3-4'-5-6'-7-8' bezw. 1'-2-3'-4-5'-6-7'-8	\mathfrak{D}_{4h}^3	\mathfrak{D}_{4h}^4	\mathfrak{D}_{4h}^2
180/1 Tetrag. Tritobipyramide:	1-1'-3-3'-5-5'-7-7' bezw. 2-2'-4-4'-6-6'-8-8'	\mathfrak{D}_{4h}^5	\mathfrak{D}_{4h}^6	(\mathfrak{D}_{4h}^2)
182 Rhomb. Bipyramide:	1-1'-4-4'-5-5'-8-8' bezw. 2-2'-3-3'-6-6'-7-7'	(\mathfrak{D}_{4h}^5)	—	\mathfrak{D}_{4h}^9
183/4 Rhomb. Bipyramide:	1-1'-2-2'-5-5'-6-6' bezw. 3-3'-4-4'-7-7'-8-8'	—	\mathfrak{D}_{4h}^{14}	\mathfrak{D}_{4h}^{10}
185 Tetragon. Skalenoeder:	1-2-3'-4'-5-6 7-8' bezw. 1'-2'-3-4-5'-6'-7-8	(\mathfrak{D}_{4h}^3)	\mathfrak{D}_{4h}^{12}	(\mathfrak{D}_{4h}^9)
186/7 Tetragon. Skalenoeder:	2-3-4'-5-6-7-8'-1' bezw. 2'-3'-4-5-6'-7-8-1	\mathfrak{D}_{4h}^7	\mathfrak{D}_{4h}^{15}	(\mathfrak{D}_{4h}^{10})

In dieser Tabelle steht in jeder Reihe zuerst links der Name des in Betracht kommenden Polyeders. Durch die rechts anschließenden Zahlen wird es genauer definiert. Die Zahlen selber

Fig. 48. \mathfrak{D}_{4h}^8 .Fig. 49. \mathfrak{D}_{4h}^{11} .Fig. 50. \mathfrak{D}_{4h}^{13} .Fig. 51. \mathfrak{D}_{4h}^{16} .

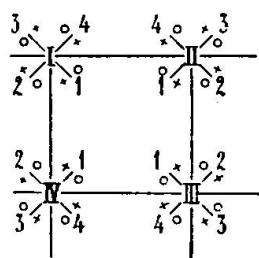
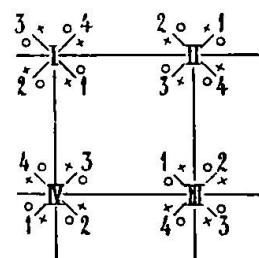
beziehen sich auf die Anordnung der Fig. 47. Schließlich sind durch die üblichen Symbole die Raumgruppen benannt, denen die Komplexe zuzuordnen sind. Eingeklammerte Symbole bedeuten Raumgruppen, die schon durch andere Achtflächner definiert sind.

Fünf weitere Raumgruppen werden durch basiszentrierte, nach c verdoppelte Gitter zur Darstellung gebracht. Darin sind je vier Punkte durch Teilflächner der ditetragonalen Bipyramide zu ersetzen. Es sind daher mindestens Vierflächner erforderlich. Bei vier dieser Raumgruppen kommt man mit den verschiedenen Kombinationen von rhombischen Bisphenoiden aus. Der Anschaulichkeit wegen sind sie durch Figuren symbolisch erläutert und zwar sind die beiden ungleichen, übereinanderfolgenden Netzebenen nebeneinander gezeichnet. Die Flächen der verschiedenen Formen sind durch Kreuze und Kreise symbolisiert, allerdings mit anderer Be-

deutung wie bei Fig. 34—37. Das Kreuz bedeutet, daß die Fläche über der betreffenden Netzebene sitzt, der Kreis das umgekehrte.

Die horizontalen Difyren der Bisphenoide sind durchwegs diagonal gestellt. Bei \mathfrak{D}_{4h}^{18} ergänzen sich zwei Bisphenoide einer¹⁸⁸ (001)-Ebene zu einem tetragonalen Trapezoeder, die übereinanderliegenden zu einem Skalenoeder, dessen horizontale Difyren ebenfalls diagonal, also nicht kristallographisch orientiert sind (Fig. 48).

Bei \mathfrak{D}_{4h}^{11} ergänzen sich die übereinander liegenden Bisphenoide¹⁸⁹ zu Trapezoedern, während zwei in derselben Ebene gelegene eine rhombische Bipyramide (mit diagonal gestellten vertikalen Symmetrieebenen) ergeben (Fig. 49).

Fig. 52. \mathfrak{D}_{4h}^{19} .Fig. 53. \mathfrak{D}_{4h}^{20} .

\mathfrak{D}_{4h}^{13} : In einer (001)-Ebene gelegene Bisphenoide bilden zu-¹⁹⁰ sammen ein Skalenoeder (vergl. \mathfrak{D}_{4h}^8), die übereinanderliegenden eine rhombische Bipyramide (\mathfrak{D}_{4h}^{11}). Fig. 50. Für \mathfrak{D}_{4h}^{16} lautet die¹⁹¹ Kombination: in der Basis rhombische Bipyramide, übereinander Skalenoeder (Fig. 51).

Die fünfte Raumgruppe, der ein basiszentriertes, nach c verdoppeltes Gitter zukommt, ist \mathfrak{D}_{4h}^{18} . Die Punkte werden mit tetragonalen Trapezoedern besetzt und zwar sind sowohl die Punkte in der Ebene selber wie die Punkte übereinander zu zweien enantiomorph.

Für die beiden letzten Raumgruppen wählt man zweckmäßig das nach a_1 und a_2 verdoppelte, nach c vervierfachte gewöhnliche Gitter. Die Bauelemente sind Sphenoide mit horizontaler Difyre. Sie kommen in acht verschiedenen Stellungen vor. Je vier untereinandergestellte sind nur drehungsverschieden. Aus Fig. 52 ersieht man, wie vier an derselben c-Richtung gruppierte Sphenoide schraubenartig angeordnet sind. II und IV sind die Spiegelbilder von I und III. Diese letztern sind ähnlich wie in früheren Figuren linksgewunden (die arabischen Zahlen bezeichnen wie in Fig. 39 und Fig. 40, deren Vergleich mit Fig. 52/53 übrigens sehr instruktiv ist, die Stufen, auf denen sich die Sphenoide befinden).

Fig. 52 illustriert \mathfrak{D}_{4h}^{19} .

Werden die Achsen II und IV miteinander vertauscht, so ergibt sich eine Anordnung, welche dem letzten tetragonalen Raumsystem — D_{4h}^{20} — zugehört. Die schematische, zu Fig. 52 analoge *Figur 53* erläutert die Details.

VI. Kubische Abteilung.

Es gibt drei kubische Raumgittertypen: der einfache, der innenzentrierte und der allseitsflächenzentrierte. In der Aufstellung sind sie nicht unbestimmt oder mehrdeutig, wie etwa die Gitter der tetragonalen Abteilung.

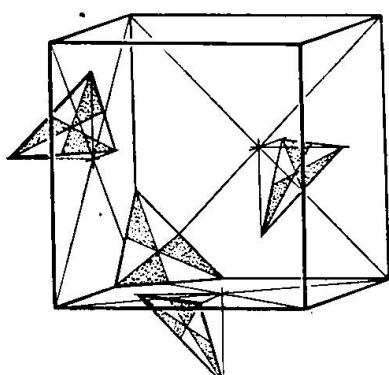


Fig. 54. \mathfrak{D}^4 .

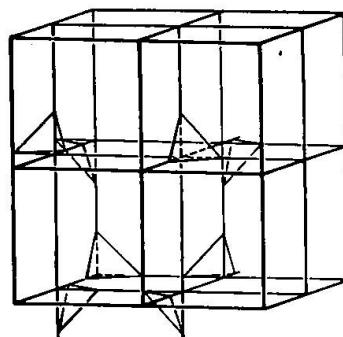


Fig. 55. \mathfrak{D}^5 .

A. Tetartoedrische Klasse. T.

Allgemeinste Kristallform dieser Klasse ist das tetraedrische Pentagondodekaeder. Im folgenden denken wir vorab ans rechte, positive. Es liefert die drei symmorphen Raumgruppen und zwar

¹⁹⁵ \mathfrak{D}^1 mit dem einfachen,

¹⁹⁶ \mathfrak{D}^3 mit dem innenzentrierten,

¹⁹⁷ \mathfrak{D}^2 mit dem allseitsflächenzentrierten Raumgitter.

Daneben gibt es zwei nicht symmorphe Raumgruppen. Die ¹⁹⁸ eine derselben — \mathfrak{D}^4 — lässt sich im flächenzentrierten Gitter veranschaulichen. Zu dem Zweck werden die drei Flächen, welche je in einem positiven Oktanten liegen, als Einheit betrachtet (trigonale Pyramide dritter Stellung). Das tetraedrische Pentagondodekaeder erscheint so als Kombination von vier Pyramiden. Jede dieser Pyramiden ist nun mit einem bestimmten Punkt des flächenzentrierten Gitters verbunden. Die Verteilung ist aus *Fig. 54* zu ersehen.

¹⁹⁹ Die andere nicht symmorphe Raumgruppe — \mathfrak{D}^5 — benötigt zu ihrer Verbildlichung des nach allen drei Achsenrichtungen verdoppelten Würfelgitters. Ein Eckpunkt und die drei benachbarten Kantenmitten werden mit den vier durch die Zerlegung des tetra-

edrischen Pentagondodekaeders entstandenen trigonalen Pyramiden besetzt. Von den vier weiteren Punkten unseres Gitters hat je einer mit einer dieser trigonalen Pyramiden die Trigyre gemeinsam. Er wird dann parallel gleich besetzt wie der andere (*Fig. 55*).

B. Paramorphe Klasse. T_h .

Die symmorphen Raumgruppen sind

\mathfrak{I}_h^1 einfaches Gitter,	Die Gitterpunkte sind durch parallel gestellte Dyakis- dodekaeder ersetzt.	200
\mathfrak{I}_h^5 innenzentriertes Gitter,		201
\mathfrak{I}_h^3 allseitsflächenzentriertes Gitter.		202

Das Dyakisdodekaeder hat dem tetraedrischen Pentagondodekaeder gegenüber das Symmetriezentrum voraus. Jene vier Flächentripel, welche vorhin als trigonale Pyramiden herausgehoben wurden, bilden nun mit ihren Gegenflächen vier Rhomboeder dritter Stellung. Mit diesen Rhomboedern läßt sich gleich verfahren wie vorhin bei \mathfrak{I}^4 und \mathfrak{I}^5 , und Fig. 54 und Fig. 55 sind leicht in diesem Sinn ergänzt zu denken, so daß eine weitere Darstellung überflüssig wird. Es sei nur gesagt, daß flächenzentriertes Gitter mit den vier Rhomboedern dritter Stellung die Raumgruppe \mathfrak{I}_h^6 , achtfaches Würfelgitter mit 2×4 Rhomboedern dritter Stellung die Raumgruppe \mathfrak{I}_h^7 darstellt.

Um mit dem innenzentrierten Gitter einen nicht symmorphismen Komplex paramorpher Symmetrie herzustellen, sind die beiden Punkte mit 12-Flächnern zu besetzen, die sich zum Dyakisdodekaeder ergänzen. Es sind das zwei enantiomorphe tetraedrische Pentagondodekaeder. Wird in die Eckpunkte das positive rechte gebracht, so ist dem Raumzentrum das negative linke zuzuordnen. Es resultiert so \mathfrak{I}_h^2 .

Die letzte nicht symmorphe Raumgruppe dieser Symmetrieklasse gehört zum Typus mit Diamantgittern. Solchen Gruppen sind wir schon mehrfach begegnet und fanden immer raumgitterartige Flächenkomplexe zu ihrer Verdeutlichung. In der kubischen Abteilung ist das leider ganz anders. Hier sind die Verhältnisse so kompliziert, daß es keine einfache Kristallform gibt, die geeignet wäre, in Verbindung mit einem der drei Raumgitter die Raumgruppen mit Diamantgittern zu veranschaulichen. Die Veranschaulichung läßt sich erst mit Hilfe von Zwillingsgebilden erreichen. Im vorliegenden Fall, wo es sich um die Raumgruppe \mathfrak{I}_h^4 handelt, sind zwei zentrosymmetrisch gestellte tetraedrische Pentagondodekaeder mit gemeinsamer Trigyre (Zwillingsebene eine Fläche des Würfels) zu wählen. Bezuglich der Flächenzahl und

Flächenorientierung stimmt dieser Zwilling vollständig mit einem Dyakisdodekaeder überein. Von einem solchen unterscheidet er sich aber gleichwohl in wesentlichen Punkten, und zwar liegt das Unterscheidende darin, daß beim Zwillingskomplex jedes Pentagondodekaeder seine Individualität bewahrt. Praktisch kommt dies im Strukturmodell darin zum Ausdruck, daß die beiden Schwerpunkte, die ja zur Bildung des Dyakisdodekaeders zusammenfallen müßten, nun einen gewissen Abstand haben, der gleich ist einem Viertel der Raumdiagonale der Würfelzelle des Raumgitters. Ein solcher

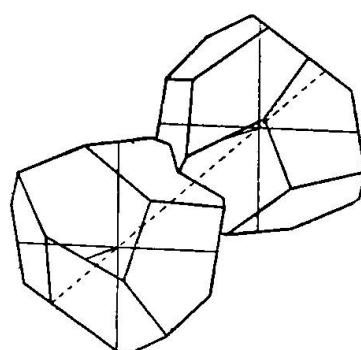


Fig. 56. \mathfrak{I}^4 .

Komplex ist in *Fig. 56* dargestellt und zwar mit einem gewissen, durch die eingezeichneten Achsenkreuze abschätzbar Abstand der Mittelpunkte. Werden nun die vier Punkte des flächenzentrierten Gitters durch solche unter sich parallel gestellte Zwillinge ersetzt, so hat man die gewünschte Veranschaulichung der Raumgruppe \mathfrak{I}_h^4 .

C. Hemimorphe Klasse. T_d .

Die sechs Raumgruppen dieser Klasse lassen sich übersichtlich in folgendem Schema zusammenfassen.

\mathbb{I}_d^1 einfaches Gitter	Die Gitterpunkte sind durch parallel gestellte Dyakisdodekaeder ersetzt. Das Gitter ist	einfach	\mathbb{I}_d^3	allseitsfl.
\mathbb{I}_d^5 innenzentriertes Gitter		innenzentr.	\mathbb{I}_d^4	—
\mathbb{I}_d^3 allseitsflächenzentriertes Gitter		—	\mathbb{I}_d^5	—
Hexakistetraeder, alle in paralleler Stellung	Die Gitter sind nach allen Achsen verdoppelt	\mathbb{I}_d^1	\mathbb{I}_d^3	\mathbb{I}_d^2
Rechte und linke, positive tetraedr. Pentagondodekaeder	—	—	\mathbb{I}_d^4	—
Rechte und linke, positive tetraedr. Pentagondodekaeder	Die Gitter sind nach allen Achsen verdoppelt	\mathbb{I}_d^5	—	—
Trigonale Pyramiden dritter Stellung	—	—	\mathbb{I}_d^6	—

\mathfrak{L}_d^1 , \mathfrak{L}_d^3 , \mathfrak{L}_d^2 sind symmorph.

207/9

\mathfrak{L}_d^4 ist ohne weiteres klar. Die beiderlei Punktarten sind ab-
wechselnd ersetzt durch die zwei Hälftflächner der charakteristi-
schen Kristallform. Sehr einfach ist auch die Anordnung der Formen
bei \mathfrak{L}_d^5 . Sie ist von der Art des Steinsalzgitters, indem jedes
tetraedrische Petagondodekaeder, das einen Gitterpunkt ersetzt, in
Richtung der drei Hauptachsen von sechs spiegelbildlichen Do-
dekaedern gleicher Stellung umgeben ist.

In \mathfrak{L}_d^6 sind alle Würfeleckpunkte mit jenen trigonalen Pyra-
miden besetzt, welche sich z. B. vom positiven rechten tetraedri-
schen Pentagondodekaeder herleiten, und zwar ist die Verteilung
genau so wie in Fig. 55. Die trigonalen Pyramiden der anderen

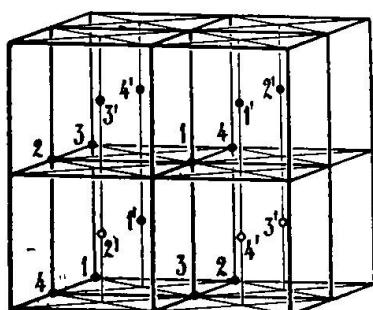
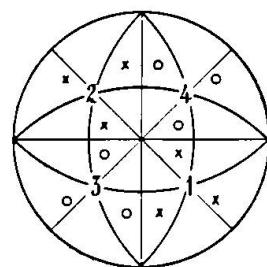
Fig. 57. \mathfrak{L}_d^6 .

Fig. 58.

Art, welche also vom positiven linken herkommen, sind auf die Raummitten verteilt. Wenn wir nun verlangen, daß die Pyramide der Raummitte irgend einer Zelle das Spiegelbild nach $(1\bar{1}0)$ jener Pyramide sein soll, welche in der hintern, untern, linken Ecke der nämlichen Zelle sitzt, so verfügen wir nur über den Nullpunkt. Wir bekommen so die Anordnung, wie sie in Fig. 57 schematisch zum Ausdruck gebracht ist. Mit 1, 2, 3, 4 sind die vier, das positive, rechte tetraedrische Pentagondodekaeder bildenden trigonalen Pyramiden bezeichnet, so wie es Fig. 58 angibt. Werden die in den übereinstimmenden Quadranten gelegenen trigonalen Pyramiden der Linksform mit 1', 2', 3', 4' angegeben, so sieht man sofort, daß nach $(1\bar{1}0)$ als Spiegelebene einander zugeordnet sind:

1 und 1', 2 und 2', 3 und 4', 4 und 3'.

Gerade das bringt Fig. 57 zum Ausdruck und definiert eindeutig die Lage der Pyramiden, da ja ihre Orientierung kristallographisch völlig bestimmt ist.

D. Enantiomorphe Klasse. O.

Den drei symmorphen Gruppen entsprechen die drei kubischen Gitter, falls die Punkte durch identische und parallel gestellte Pentagonikositetraeder ersetzt sind.

- 213 \mathfrak{O}^1 ist dem einfachen,
 214 \mathfrak{O}^5 dem innenzentrierten und
 215 \mathfrak{O}^3 dem allseitsflächenzentrierten Gitter zugeordnet.

Mit dem innenzentrierten Gitter läßt sich eine weitere Raumgruppe — \mathfrak{O}^2 — veranschaulichen, wenn Eck- und Innenpunkte je mit einem der beiden Hälftflächner des Pentagonikositetraeders besetzt werden. In diesem Fall sind es zwei rechte (oder dann zwei linke) tetraedrische Pentagondodekaeder in positiver und negativer Stellung.

217 \mathfrak{O}^8 bedarf des nach allen Kantenrichtungen verdoppelten innenzentrierten Gitters (vergl. Fig. 57). Die Punkte werden wie bei \mathfrak{T}_d^6 mit trigonalen Pyramiden verbunden. Diese zerfallen aber nicht mehr in zwei spiegelbildliche Gruppen, sondern sind unter sich

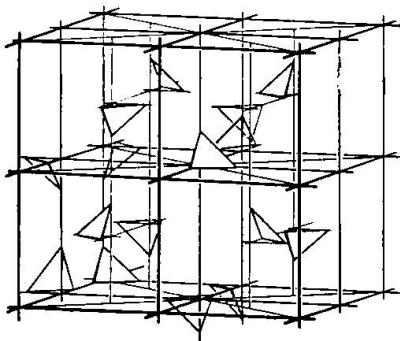


Fig. 59. \mathfrak{O}^8 .

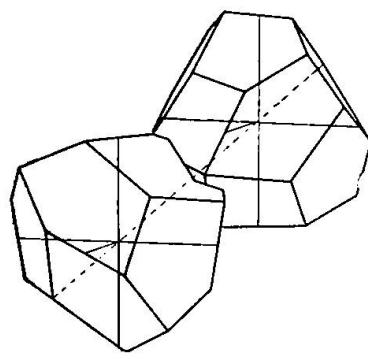


Fig. 60. \mathfrak{O}^4 .

nur drehungsverschieden. Die Anordnung ist ganz analog zu Fig. 57 und in Fig. 59 dargestellt. Statt der Flächentripel des Pentagonikositetraeders sind allerdings nur deren Mittellagen, d. h. Oktaederflächen gezeichnet. Auch sind Fig. 57 und 59 nicht in paralleler Aufstellung.

218 Eine Raumgruppe mit Diamantgittern ist \mathfrak{O}^4 . Die Veranschaulichung geschieht in analoger Weise wie bei \mathfrak{T}_h^4 . Im flächenzentrierten Gitter kommen an Stelle der Gitterpunkte parallel orientierte Gebilde, wie sie in Fig. 60 dargestellt sind. Kristallographisch lassen sie sich deuten als Verzwilligung zweier tetraedrischer Pentagondodekaeder. [110] ist Zwillingsachse. Beide Individuen haben wieder eine gemeinsame Trigyre. Ihre Zentren fallen aber nicht zusammen. Wie bei \mathfrak{T}_h^4 muß ihr Abstand gleich sein dem Viertel der Diagonale der Würfelzelle des Raumgitters.

219/20 Die beiden letzten Raumgruppen, \mathfrak{O}^6 und \mathfrak{O}^7 , stehen zueinander im Verhältnis der Enantiomorphie und können ebenfalls, wenn auch nicht gerade elegant, auf das allseitig flächenzentrierte Gitter bezogen werden. Das Pentagonikositetraeder wird in vier

trigonale Trapezoeder zerlegt. Jedes derselben wird mit einem Gitterpunkt verbunden, jedoch nicht so, daß das Zentrum des Trapezoeders mit dem Gitterpunkt zusammenfällt. Die Trapezoeder sind vielmehr längs ihrer trigonalen Achse um einen Viertel der Raumdiagonale des Gitterwürfels verschoben. Welches im einzelnen der Sinn dieser Verschiebung sei und wie die Trapezoeder überhaupt orientiert seien, erhellt aus der *Figur 61*. Darin sind

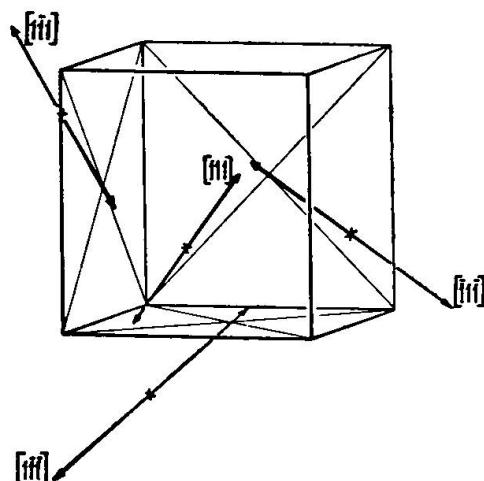


Fig. 61. \mathfrak{O}^6 .
Die Doppelpfeile stellen trigonale Trapezoeder dar.

zwar nur die Richtungen der Trapezoederachsen mit ihrem Schwerpunkt eingezeichnet. Da aber diese Achse, bei Annahme irgend einer Fläche, das Trapezoeder als Teilflächner des Pentagonikositetraeders eindeutig bestimmt, durfte die komplizierte Eintragung der Trapezoeder umgangen werden. Die Achsenlängen selber sind übrigens willkürlich. Daß in der Figur jene Enden den Gitterpunkten näher liegen, welche in den negativen Quadranten austechen, ist beachtenswert, hängt aber mit der Wahl des Nullpunktes zusammen.

Fig. 61 entspricht der Raumgruppe \mathfrak{O}^6 . Da \mathfrak{O}^7 hierzu enantiomorph ist — der einzige Fall der kubischen Abteilung —, so sind hierfür weitere Erklärungen überflüssig.

E. Holoedrische Klasse. O_h .

Diese Klasse zählt unter allen kubischen am meisten Raumgruppen. Die drei symmorphen Raumgruppen

\mathfrak{O}_h^1 mit einfachem,

221

\mathfrak{O}_h^9 mit innenzentriertem und

222

\mathfrak{O}_h^5 mit allseitig flächenzentriertem Gitter — bei Ersatz der 223
Gitterpunkte durch Hexakisoktaeder — sind selbstverständlich.

Ebenso ist es klar, daß wir Komplexe holoeedrischer Symmetrie erhalten, wenn wir im innenzentrierten Gitter Eck- und Mittelpunkte je mit entgegengesetzten Hemiedern allgemeinster Lage besetzen. Es gibt abwechselnde Besetzung mit

- 224 rechtem und linkem Pentagonikositetraeder die Raumgruppe \mathcal{O}_h^2 ,
- 225 rechtem und linkem Dyakisdodekaeder die Raumgruppe \mathcal{O}_h^3 ,
- 226 positivem und negativem Hexakistetraeder die Raumgruppe \mathcal{O}_h^4 .

227 Steinsalzgitterartig ist die Veranschaulichung von \mathcal{O}_h^6 . Das Gitter ist also das gewöhnliche würfelige, aber nach den drei Achsen verdoppelt. In irgend einem Punkt sitzt ein rechtes Pentagonikositetraeder. Nach den drei Hauptachsen sind ihm sechs spiegelbildliche, also linke Pentagonikositetraeder nächstbenachbart.

Mit dem innenzentrierten Gitter lassen sich nach Verdoppelung 228 in Richtung der drei Achsen zwei Raumgruppen darstellen. \mathcal{O}_h^8

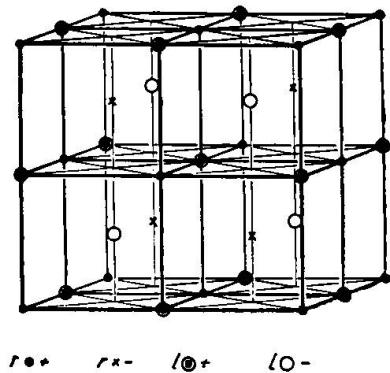


Fig. 62. \mathcal{O}_h^8 .

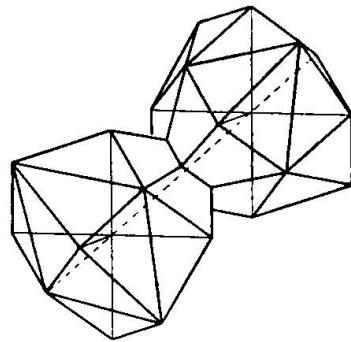


Fig. 63. Zwillingskomplex \mathcal{O}_h^7 .

wird mit den vier vom Hexakisoktaeder sich ableitenden tetraedrischen Pentagondodekaedern gebildet. Von den 16 zur Verfügung stehenden Punkten werden immer vier, ein flächenzentriertes Gitter bildende, parallel gleich besetzt. Es sitzt in $[[000]]$ ein rechtes positives, in $[[\frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4}]]$ ein rechtes negatives, in $[[\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}]]$ ein linkes positives und in $[[\frac{3}{4} \frac{3}{4} \frac{3}{4}]]$ ein linkes negatives tetraedrisches Pentagondodekaeder. Alles das ist aus Fig. 62 ersichtlich.

229 Im andern hierhergehörigen Komplex — \mathcal{O}_h^{10} — sind die Punkte durch die acht aus dem Hexakisoktaeder sich ableitenden Rhomboeder dritter Stellung besetzt. Das Strukturschema ist ganz analog zu Fig. 57. Das Unterscheidende liegt darin, daß jetzt jeder Gitterpunkt als Symmetriezentrum fungiert. Mit Rücksicht auf die Bedeutung der Ziffern in Fig. 57 ist mithin \mathcal{O}_h^{10} eindeutig definiert.

230 Die letzte verbleibende Raumgruppe, \mathcal{O}_h^7 , gehört wieder zum Typus derjenigen mit Diamantgittern. Wir legen ihr also wiederum

das flächenzentrierte Gitter zu Grunde und ersetzen die Gitterpunkte durch parallel gestellte Zwillinge (*Fig. 63*) zweier Hexakistetraeder nach {100} mit gemeinsamer Trigyre und nicht zusammenfallenden Zentren. Das Verhältnis ihres Abstandes zur Gitterwürfeldiagonale ist das mehrfach erwähnte.

Numerierung der 230 Raumgruppen und Reihenfolge, in der sie im Vorstehenden besprochen wurden.

I. Trikline Abteilung.

A. Hemiedrische Klasse C_1

C_1 1

B. Holoedrische Klasse C_i

C_i 2

II. Monokline Abteilung.

A. Hemiedrische Klasse C_s

C_s^1 3 C_s^3 4

C_s^2 5 C_s^4 6

B. Hemimorphe Klasse C_2

C_2^1 7 C_2^3 8

C_2^2 9

C. Holoedrische Klasse C_{2h}

C_{2h}^1 10 C_{2h}^4 13

C_{2h}^2 12 C_{2h}^5 14

C_{2h}^3 11 C_{2h}^6 15

III. Rhombische Abteilung.

A. Hemimorphe Klasse C_{2v}

C_{2v}^1 16 C_{2v}^{12} 27

C_{2v}^2 21 C_{2v}^{13} 28

C_{2v}^3 22 C_{2v}^{14} 18

C_{2v}^4 23 C_{2v}^{15} 24

C_{2v}^5 25 C_{2v}^{16} 34

C_{2v}^6 32 C_{2v}^{17} 37

C_{2v}^7 31 C_{2v}^{18} 20

C_{2v}^8 26 C_{2v}^{19} 36

C_{2v}^9 30 C_{2v}^{20} 19

C_{2v}^{10} 35 C_{2v}^{21} 29

C_{2v}^{11} 17 C_{2v}^{22} 33

B. Hemiedrische Klasse V

V^1 38 V^6 39

V^2 42 V^7 41

V^3 43 V^8 40

V^4 46 V^9 45

V^5 44

C. Holoedrische Klasse V_h

V_h^1 47 V_h^5 52

V_h^2 68 V_h^6 61

V_h^3 51 V_h^7 60

V_h^4 58 V_h^8 54

V_h^9 59 V_h^{19} 48

V_h^{10} 73 V_h^{20} 64

V_h^{11} 53 V_h^{21} 55

V_h^{12} 69 V_h^{22} 71

V_h^{13} 57 V_h^{23} 50

V_h^{14} 62 V_h^{24} 70

V_h^{15} 74 V_h^{25} 49

V_h^{16} 63 V_h^{26} 66

V_h^{17} 65 V_h^{27} 56

V_h^{18} 72 V_h^{28} 67

IV₁. Trigonal-rhomboedrische Abteilung.

A. Tetartoedrische Klasse C_3

C_3^1 75 C_3^3 78

C_3^2 77 C_3^4 76

B. Paramorphe Klasse C_{3i}

C_{3i}^1 79 C_{3i}^3 80

C. Hemimorphe Klasse C_{3v}

C_{3v}^1 81 C_{3v}^4 85

C_{3v}^2 82 C_{3v}^5 83

C_{3v}^3 84 C_{3v}^6 86

D. Enantiomorphe Klasse D_3

D_3^1 87 D_3^5 91

D_3^2 88 D_3^6 93

D_3^3 90 D_3^7 89

D_3^4 92

E. Holoedrische Klasse D_{3d}

D_{3d}^1 94 D_{3d}^4 98

D_{3d}^2 97 D_{3d}^5 96

D_{3d}^3 95 D_{3d}^6 99

IV₂. Rein trigonale Abteilung.

A. Paramorphe Klasse C_{3h}

C_{3h}^1 100

B. Holoedrische Klasse D_{3h}

D_{3h}^1 101 D_{3h}^3 102

D_{3h}^2 103 D_{3h}^4 104

IV₃. Rein hexagonale Abteilung.

A. Tetartoedrische Klasse C_6

C_6^1 105 C_6^4 107

C_6^2 109 C_6^5 108

C_6^3 110 C_6^6 106

B.	Paramorphe Klasse C_{6h}	
	C_{6h}^1 111	C_{6h}^2 112
C.	Hemimorphe Klasse C_{6v}	
	C_{6v}^1 113	C_{6v}^3 115
	C_{6v}^2 114	C_{6v}^4 116
D.	Enantiomorphe Klasse D_6	
	D_6^1 117	D_6^4 119
	D_6^2 121	D_6^5 120
	D_6^3 122	D_6^6 118
E.	Holoedrische Klasse D_{6h}	
	D_{6h}^1 123	D_{6h}^3 125
	D_{6h}^2 124	D_{6h}^4 126
<i>V. Tetragonale Abteilung.</i>		
A.	Tetartoedrische Klasse I. Art C_4	
	C_4^1 127	C_4^4 130
	C_4^2 131	C_4^5 128
	C_4^3 129	C_4^6 132
B.	Tetartoedrische Klasse II. Art S_4	
	S_4^1 133	S_4^2 134
C.	Hemimorphe Klasse C_{4v}	
	C_{4v}^1 135	C_{4v}^7 139
	C_{4v}^2 143	C_{4v}^8 144
	C_{4v}^3 138	C_{4v}^9 136
	C_{4v}^4 141	C_{4v}^{10} 142
	C_{4v}^5 137	C_{4v}^{11} 145
	C_{4v}^6 140	C_{4v}^{12} 146
D.	Paramorphe Klasse C_{4h}	
	C_{4h}^1 147	C_{4h}^4 151
	C_{4h}^2 150	C_{4h}^5 148
	C_{4h}^3 149	C_{4h}^6 152
E.	Enantiomorphe Klasse D_4	
	D_4^1 153	D_4^6 156
	D_4^2 155	D_4^7 161
	D_4^3 160	D_4^8 159
	D_4^4 158	D_4^9 154
	D_4^5 157	D_4^{10} 162
F.	Hemiedrische Klasse II. Art V_d	
	V_d^1 163	V_d^4 168
	V_d^2 171	V_d^5 165
	V_d^3 167	V_d^6 172

V_d^7	169	V_d^{10}	173
V_d^8	170	V_d^{11}	164
V_d^9	166	V_d^{12}	174
<i>G. Holoedrische Klasse D_{4h}</i>			
D_{4h}^1	175	D_{4h}^{11}	189
D_{4h}^2	179	D_{4h}^{12}	185
D_{4h}^3	177	D_{4h}^{13}	190
D_{4h}^4	178	D_{4h}^{14}	183
D_{4h}^5	180	D_{4h}^{15}	187
D_{4h}^6	181	D_{4h}^{16}	191
D_{4h}^7	186	D_{4h}^{17}	176
D_{4h}^8	188	D_{4h}^{18}	192
D_{4h}^9	182	D_{4h}^{19}	193
D_{4h}^{10}	184	D_{4h}^{20}	194

<i>VI. Kubische Abteilung.</i>				
A.	Tetartoedrische Klasse T			
	T^1	195	T^4	198
	T^2	197	T^5	199
	T^3	196		
B.	Paramorphe Klasse T_h			
	T_h^1	200	T_h^5	201
	T_h^2	205	T_h^6	203
	T_h^3	202	T_h^7	204
	T_h^4	206		
C.	Hemimorphe Klasse T_d			
	T_d^1	207	T_d^4	210
	T_d^2	209	T_d^5	211
	T_d^3	208	T_d^6	212
D.	Enantiomorphe Klasse O			
	O^1	213	O^5	214
	O^2	216	O^6	219
	O^3	215	O^7	220
	O^4	218	O^8	217
E.	Holoedrische Klasse O_h			
	O_h^1	221	O_h^6	227
	O_h^2	224	O_h^7	230
	O_h^3	225	O_h^8	228
	O_h^4	226	O_h^9	222
	O_h^5	223	O_h^{10}	229

Allgemeine Beziehungen zwischen Kristallpolyedern und Diskontinuum.

Für den mit der kristallographischen Terminologie Vertrauten geben die bisherigen Ausführungen eine anschauliche Vorstellung der 230 Raumsysteme und gewähren mannigfaltige Einblicke in deren gegenseitigen Beziehungen. Klar ist vor allem, daß die Symmetrieelemente der Polyeder, welche die Stelle der Gitter-

punkte einnehmen, zu Symmetrieelementen des ganzen Komplexes werden, und daß diejenigen Symmetrieelemente der symmorphen Raumgruppen, welche beim Auseinanderziehen der Teilflächner scheinbar verloren gehen, Anlaß geben zum Entstehen von Symmetrieelementen mit Gleitkomponenten, also von Schraubenachsen und Gleitspiegelebenen. Betrachten wir vielleicht einmal Fig. 14. Die vordere Fläche ist mit der hinteren identisch. Beide lassen sich durch primitive Translation nach der a-Achse ineinander überführen. Es genügt daher, die eine, z. B. die vordere, zu betrachten. Mit einem Blick erkennen wir vierlei Lagen von Pinakoiden, die zusammen eine Bipyramide ergeben. Daß sie rhombisch ist, folgt aus den Dimensionen des Gitters oder der gegenseitigen Neigung der Flächen. Gehen wir etwa von dem links unten gelegenen Pinakoid aus, so gehören zu ihm drei weitere, welche die vordere Fläche und die im betrachteten Punkt zusammenlaufenden Kanten zentrieren. Das rechts vom Ausgangspinakoid gelegene, zweite Pinakoid ist das Spiegelbild des erstern. Die Ebenen also, welche ihren Abstand halbierend auf der b-Achse senkrecht steht, ist eine Symmetrieebene. Den nämlichen Symmetriecharakter hat die Ebene, welche zwischen dem zweiten und dritten Pinakoid dieser Reihe in entsprechender Weise gelegen ist. Nur sind ihr gegenüber die Pinakoide anders orientiert wie der ersteren gegenüber. Symbolisch lassen sich diese beiden Spiegelebenen durch $(010) \frac{1}{4}$ und $(010) \frac{3}{4}$ bezeichnen. Phänomenologisch bedingen sie die für die rhombische Holoedrie erforderliche Symmetrie nach $\{010\}$.

Ganz anders sind die vier in Rede stehenden Pinakoide den (001) - und (100) -Ebenen gegenüber gelegen. Keine diesen parallele Ebene, wo sie auch gelegen sein mag, ist Spiegelebene. Wir erkennen vielmehr, daß das Pinakoid, welches zum Eckpinakoid nach $\{100\}$ spiegelbildlich wäre, die c-Kante zentriert. (100) ist demnach eine Gleitspiegelebene mit der Gleitkomponente $\frac{c}{2}$. Vom gleichen Charakter ist die hierzu parallele Ebene, welche die a-Kante des Gitters halbiert. Das (001) -Spiegelbild des Eckpinakoids endlich ist in der Mitte der vordern Fläche. Es ist also parallel zu (001) in der b-Richtung verschoben. (001) ist mithin auch Gleitspiegelebene, und ihre Lage wird durch den Umstand bestimmt, daß sie den vertikalen Abstand der beiden spiegelbildlichen Pinakoide halbieren muß. Sie hat demnach das Symbol $(001) \frac{1}{4}$ und die Gleitkomponente ist gegeben durch $\frac{b}{2}$. Übereinstimmenden Charakter hat $(001) \frac{3}{4}$.

Ähnlich können wir die Difyren finden. Wir fragen immer: welches Pinakoid leitet sich durch Drehung um eine Difyre von gegebener Richtung aus dem Eckpinakoid ab und suchen dann seine Lage auf. Hat seine Verschiebung dem Eckpinakoid gegenüber eine Komponente in Richtung der Difyre, so ist diese eine Schraubungsachse, ist aber die Verschiebung zur Achse selber senkrecht, so bleibt sie Drehungsachse. Im vorliegenden Fall ist

[100] Drehungsachse mit den Einstichpunkten

$$\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{smallmatrix} \right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{smallmatrix} \right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{smallmatrix} \right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{smallmatrix} \right]$$

[010] Schraubungsachse mit den Einstichpunkten

$$\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{smallmatrix} \right], \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right], \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{smallmatrix} \right]$$

[001] Schraubungsachse mit den Einstichpunkten

$$\left[\begin{smallmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{smallmatrix} \right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{smallmatrix} \right], \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{smallmatrix} \right], \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \end{smallmatrix} \right].$$

Schlagen wir nun bei $\mathfrak{V}_{h^{11}}$ in der geometrischen Kristallographie des Diskontinuums nach, so finden wir daselbst die gleichen Symmetrieelemente verzeichnet, nur mit Vertauschung der Indizes, entsprechend der anders gewählten Aufstellung.

Die einem Komplex eigentümlichen Symmetrieelemente sind es nun, welche die einzelnen Flächen und Formen miteinander in Beziehung bringen. Sie würden auch bewirken, daß irgend ein Punkt allgemeiner Lage sich in ähnlicher Weise vervielfältigt. Es entstünde so ein Punktkomplex. Sind die Flächenkomplexe mehr für das Vorstellungsvermögen berechnet, so sind die Punktkomplexe von besonderer Bedeutung für die Strukturbestimmung. Theoretisch gehören Punktkomplexe und Flächenkomplexe zusammen, genau so wie in der Kristallgeometrie Zonen und Flächen studiert werden. Wir können sogar einem Punktkomplex einen ganz bestimmten Flächenkomplex zuordnen und umgekehrt. Dazu benötigen wir aber eine für Flächen- und Punktkomplexe gleich geeignete Symbolik.

Zusammengehörige Koordinatenwerte (P. Niggli) und ihr Zusammenhang mit den Millerschen Symbolen der einfachen Kristallformen. Vier Sätze.

Soweit es nur auf die gegenseitige Lage als solche ankommt, könnte man für den Flächenkomplex die in der Kristallographie üblichen Symbole verwenden und durch beigeschriebene Zahlen zugleich angeben, welches die Koordinaten des für die betreffende Form in Betracht kommenden Nullpunktes seien. Der in Fig. 14 dargestellte Komplex, mit welchem wir soeben exemplifiziert haben, würde sich dann in folgender Weise darstellen:

$$\begin{array}{llll} (\bar{h} \ k \ l)_{000} & (\bar{h} \ k \ l)_{00\frac{1}{2}} & (\bar{h} \ \bar{k} \ l)_{0\frac{1}{2}0} & (\bar{h} \ k \ \bar{l})_{0\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \\ (\bar{h} \ \bar{k} \ \bar{l})_{000} & (\bar{h} \ \bar{k} \ \bar{l})_{00\frac{1}{2}} & (\bar{h} \ k \ \bar{l})_{0\frac{1}{2}0} & (\bar{h} \ \bar{k} \ l)_{0\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \end{array}$$

Nun wird aber auch die Lage der Ebene selber unter Umständen bedeutungsvoll. Es muß also im Symbol noch irgendwie zum Ausdruck gebracht werden, wie sie vom betreffenden Nullpunkt entfernt sei. Am einfachsten geschieht dies so, daß wir einer beliebigen Ebene \mathfrak{F} eine Zone \mathfrak{z} mit gleichen Indizes zuordnen und als die Indizes von \mathfrak{F} gerade die Koordinaten ihres Schnittpunktes mit \mathfrak{z} wählen. Es sei z. B. die Ebene \mathfrak{F} durch das Symbol (321) gegeben. Die zugeordnete Zone \mathfrak{z} hat also das Symbol [321]. Nun sei die Ebene so gelegen, daß sie durch den auf \mathfrak{z} liegenden Punkt $\left[\left[\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right]\right]$ gehe. Dann schreiben wir das Flächensymbol kurz in der Form $(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7})$. Analog bezeichnet das Symbol $(\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2})$ oder $(\frac{20}{30}, \frac{6}{30}, \frac{15}{30})$ eine Ebene von der kristallographischen Symbolisierung (20.6.15), die aber durch den auf der Zone [20.6.15] gelegenen Punkt mit den Koordinaten $\left[\left[\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right]\right]$ gelegt ist.

Durch diese Symbolisierung wird nun eindeutig jede Fläche einem bestimmten Punkt und jeder Punkt einer bestimmten Ebene zugeordnet. Selbstverständlich müssen Punkt und Ebene auf das nämliche Koordinatenkreuz mit dem gleichen Ursprung bezogen werden. Die zusätzlichen Glieder, welche in der Koordinatendarstellung von P. Niggli in so vielen Raumgruppen erscheinen, sind nach dieser Auffassung nicht den Indizes zuzuzählen, sondern bloß als beigeschriebene Zahlen für die Lagebestimmung des Ursprungs zu verwenden. Natürlich hindert nichts daran, sie auf einen einzigen Koordinatenanfangspunkt zu beziehen, falls der Dualismus zwischen Flächenkomplex und Punktkomplex nicht in Frage steht.

Für Flächen und Kanten gleicher Symbolisierung besteht eine interessante Relation (cfr. P. Niggli, Lehrbuch der Min., 1924, 653), die an dieser Stelle ihren Beweis finden möge.

I. Konstruiert man über den kristallographischen Achsen a, b, c als konjugierten Halbmessern ein Ellipsoid und bringt man in jenem Punkt, wo die durch den Ursprung gehende Gerade [uvw] die Ellipsoidoberfläche trifft, die Tangentialebene an, so sind die Indizes dieser Ebenen (uvw).

Der Beweis ist einfach. Es ist nämlich das Ellipsoid gegeben durch die Gleichung

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

X, Y, Z und die Achsen a, b, c sind in der nämlichen Längeneinheit

(z. B. in mm) ausgedrückt. Es vereinfacht sich aber die Rechnung bedeutend, wenn X, Y, Z mit den bezüglichen Achsenlängen als charakteristischen Einheiten gemessen werden. Nennen wir die neuen Koordinaten x, y, z, so kommt also

$$X = ax, \quad Y = by, \quad Z = cz$$

und die Gleichung des Ellipsoides nimmt die Form an:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Nun betrachten wir die der Zone $[uvw]$ parallele, durch den Ursprung gehende Gerade. Ihre Gleichung ist

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w}.$$

Der Schnittpunkt mit dem Ellipsoid ist daher

$$x = \varrho u \quad y = \varrho v \quad z = \varrho w, \quad 1$$

wo

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

Es genügt hier, einzig die positive Wurzel zu betrachten, da wir $[uvw]$ selber vektoriell deuten und somit $[uvw]$ von $[\bar{u}\bar{v}\bar{w}]$ unterscheiden. Die Tangentialebene an das Ellipsoid im Punkte 1 ist nun

$$\varrho ux + \varrho vy + \varrho wz = 1.$$

Betrachten wir nur die Orientierung der Ebene — und für die Bestimmung der Indizes reicht das hin —, so können wir sie durch den Ursprung gelegt denken und bekommen also

$$ux + vy + wz = 0.$$

Nun ist bekannt, daß in einer Ebenengleichung die Koeffizienten der Variablen den Indizes h k l proportional sind. Es ist deshalb für die Tangentialebene

$$h : k : l = u : v : w, \text{ w. z. b. w.}$$

Neben dem Koordinatenkreuz der kristallographischen Achsen betrachtet die Kristallgeometrie noch ein zweites, dessen Zusammenhang mit dem ersten sich am besten vektoriell ausdrücken läßt. Bezeichnen wir nämlich die gewöhnlichen Achsen vektoriell mit a, b, c und die anderen mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, so gelten die Definitionsgleichungen

$$\mathfrak{A} = [bc] \quad \mathfrak{B} = [ca] \quad \mathfrak{C} = [ab]$$

A, B, C können als Längen der neuen Achsen gelten.

Unter diesen Voraussetzungen besteht der weitere Satz:

II. Konstruiert man über A, B, C als konjugierten Halbmessern ein Ellipsoid und legt an dasselbe in jenem Punkt, wo die Normale der Fläche (h k l) die Ellipsoidoberfläche trifft, eine Tangential-

ebene, so hat die Normale dieser letztern die gleichen Indizes wie die Fläche.

Der Beweis ist ganz analog wie bei I.

Wird die Zone $[uvw]$ vektoriell durch

$$\mathfrak{z} = u\mathfrak{a} + v\mathfrak{b} + w\mathfrak{c}$$

und die Flächennormale durch

$$\mathfrak{F} = h\mathfrak{A} + k\mathfrak{B} + l\mathfrak{C}$$

bestimmt, so hat man nicht nur Richtungen, sondern auch Längen, und diese Längen stehen wiederum in engster Beziehung zum Ellipsoid. Ist nämlich im ersten Fall r die Länge des Radiusvektors des Berührungs punktes von Ellipsoid und Tangentialebene und n der Abstand dieser Ebene vom Mittelpunkt und v das Volumen des von den Achsen a, b, c bestimmten Parallelepipeds, so besteht die Beziehung.

$$\text{III. } |\mathfrak{z}| : |\mathfrak{F}| = r : \frac{v}{n}$$

Werden mit R, N und V die analogen Größen im Falle II bezeichnet, so gilt

$$\text{IV. } |\mathfrak{F}| : |\mathfrak{z}| = R : \frac{V}{N}$$

Zum Beweis von III ist zu beachten, daß

$$r = \varrho |\mathfrak{z}| \quad (1)$$

$$\text{und } \frac{n}{r} = \cos(\mathfrak{z}, \mathfrak{F})$$

ist. Für $\cos(\mathfrak{z}, \mathfrak{F})$ findet man (vergl. z. B. P. Niggli, Lehrbuch d. Min., 1924, Seite 112) ganz allgemein den Ausdruck

$$\cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{z}) = v \frac{hu + kv + lw}{|\mathfrak{F}| \cdot |\mathfrak{z}|}.$$

Da in unserem Fall $h = u, k = v, l = w$ ist, erhalten wir

$$\frac{n}{r} = \frac{v}{\varrho^2 |\mathfrak{F}| \cdot |\mathfrak{z}|} = \frac{v}{\varrho |\mathfrak{F}| \cdot r}$$

oder

$$n = \frac{v}{\varrho |\mathfrak{F}|} \quad (2)$$

und es kommt aus 1) und 2)

$$|\mathfrak{z}| : |\mathfrak{F}| = r : \frac{v}{n}, \text{ w. z. b. w.}$$

Der Beweis für die andere Proportion ist ganz analog. Es ist nur zu beachten, daß jetzt das von den Achsen A, B, C gebildete Volumen in Rechnung tritt und daß \mathfrak{z} und \mathfrak{F} ihre Rolle vertauscht haben.

Auf die Analogie dieser Sätze zu gewissen physikalischen Größen hat schon P. Niggli (l. c. 653) aufmerksam gemacht.

Anwendung der viergliedrigen Punktsymbole im Diskontinuum.

Der elegante Dualismus, den wir zwischen Flächenkomplex und Punktkomplex gefunden haben, erleidet eine unangenehme Störung bei hexagonalem Achsenkreuz. Hier erfordert die naturgemäße Symbolisierung vier Indizes. Viergliedrige Flächensymbole sind denn auch in der Kristallographie schon lange üblich geworden. Da aber die Kristallographie von jeher ihr Hauptaugenmerk auf die Flächen gerichtet und mit Zonensymbolen nur in Ausnahmefällen operiert hat, ist es begreiflich, daß viergliedrige Zonen-symbole bisher nie recht im Gebrauch waren, zumal sich in allen Rechnungen, wo sie rein formal erwünscht wären, auch anders auskommen ließ, sei es, daß eine der überzähligen Achsen überhaupt außer Acht gelassen wurde, sei es, daß das sogenannte orthohexagonale Achsenkreuz herangezogen wurde. Letzteres ist z. B. in der geometrischen Kristallographie des Diskontinuums geschehen. In den letzten Jahren hat sich die Sachlage etwas verändert. Verfasser hat gewisse viergliedrige Zonensymbole (= Punktsymbole) vorgeschlagen, die kurz in folgender Weise definiert werden können.

Werden die Koordinaten eines Punktes mit $[m n o p]$ bezeichnet, ähnlich wie die Indizes einer Fläche $(h k l)$, so gilt zunächst die Beziehung $m + n + o = 0$ und für einen Vektor, welcher vom Koordinatenursprung nach dem betreffenden Punkt gezogen ist, ergibt sich

$$\mathfrak{z} = m \mathfrak{a}_1 + n \mathfrak{a}_2 + o \mathfrak{a}_3 + p \mathfrak{c}$$

Um also vom Ursprung aus nach jenem Punkt zu gelangen, legen wir zuerst auf der \mathfrak{a}_1 -Achse m Einheiten zurück, gehen dann n Einheiten parallel der zweiten Achse, hernach o Einheiten parallel der dritten und schließlich p Einheiten längs \mathfrak{c} . Für die positiven Endpunkte der Achsen erhalten wir also folgende Koordinatenwerte:

$$\left| \left[\frac{2}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{3} 0 \right] \right|, \left| \left[\frac{1}{3} \frac{2}{3} \frac{1}{3} 0 \right] \right|, \left| \left[\frac{1}{3} \frac{1}{3} \frac{2}{3} 0 \right] \right|, \left| \left[0001 \right] \right|$$

Wie weit diese Symbole Anklang gefunden haben, ist wohl schwer zu sagen. Es erfüllt aber den Verfasser mit größter Freude, daß gerade P. Niggli diese Symbole im ersten Band der Neuauflage seines Lehrbuches der Mineralogie verwertet hat und im zweiten Band einen noch ausgedehnteren Gebrauch davon machen wird.

Zur Ergänzung der bei P. Niggli angeführten Formeln möchte ich hier wegen der praktischen Wichtigkeit zur Untersuchung hexagonaler Strukturmodelle noch zwei weitere anfügen.

1. Eine Gerade sei durch einen Punkt $m_0 n_0 o_0 p_0$ und ihre Richtung $[uv\omega w]$ gegeben. Irgend einer ihrer Punkte habe die Koordinaten $m n o p$. Es bestehen dann die Gleichungen:

$$\frac{m - m_0}{u} = \frac{n - n_0}{v} = \frac{o - o_0}{\omega} = \frac{p - p_0}{w}$$

Der Beweis ist einfach. Die Punkte $m_0 n_0 o_0 p_0$ und $m n o p$ bestimmen einen Vektor.

$$(m - m_0) a_1 + (n - n_0) a_2 + (o - o_0) a_3 + (p - p_0) c$$

Dieser Vektor muß der Richtung der Zone $[uv\omega w]$, d. h. dem Vektor

$$u a_1 + v a_2 + \omega a_3 + w c$$

parallel sein. Da dies nur bei Proportionalität entsprechender Vektoren möglich ist, so folgt unmittelbar obige Gleichung.

2. Der durch die Verbindungsgeraden zweier Punkte bestimmte Vektor wurde eben zu

$$(m - m_0) a_1 + (n - n_0) a_2 + (o - o_0) a_3 + p c$$

gefunden. Indem man quadriert und umwandelt, kommt als Quadrat des Abstandes

$$d^2 = \frac{3}{2} a^2 \{(m - m_0)^2 + (n - n_0)^2 + (o - o_0)^2\} + c^2 (p - p_0)^2.$$

Fällt der eine Punkt mit dem Ursprung zusammen und stellt der andere den in dieser Richtung dem Ursprung benachbarteste Gitterpunkt dar, so ist d gleich dem Parameter T der betreffenden Zone. Mit Rücksicht auf praktische Fälle seien hier die kürzesten Parameter der in der Basis gelegenen Zonen zusammengestellt:

$[2\bar{1}\bar{1}0]$: . 1 — $[\bar{1}\bar{1}0]$	$[8\bar{7}\bar{1}0]$: 19 — $[\bar{3}\bar{5}2]$	$[4\bar{3}\bar{1}0]$: 39 — $[\bar{5}\bar{7}2]$
$[10\bar{1}0]$: 3 — $[\bar{2}\bar{1}\bar{1}]$	$[\bar{3}\bar{2}\bar{1}0]$: 21 — $[\bar{4}\bar{5}1]$	$[13.\bar{8}.\bar{5}.0]$: 43 — $[\bar{6}\bar{7}1]$
$[\bar{5}\bar{4}10]$: 7 — $[\bar{2}\bar{3}1]$	$[\bar{1}1.\bar{7}.\bar{4}.0]$: 31 — $[\bar{5}\bar{6}1]$	$[13.\bar{1}\bar{1}.\bar{2}.0]$: 49 — $[\bar{5}\bar{8}3]$
$[\bar{7}\bar{5}20]$: 13 — $[\bar{3}\bar{4}1]$	$[\bar{1}1.\bar{10}.\bar{1}.0]$: 37 — $[\bar{4}\bar{7}3]$	$[\bar{5}\bar{3}20]$: 57 — $[\bar{7}\bar{8}1]$

In der ersten Spalte stehen je die Indizes. Daneben ist T^2 angegeben und zuletzt folgt das entsprechende dreigliedrige Miller-Symbol, um den bizarren Gang dieser Zonenfolge klarzulegen.

Für diese viergliedrigen Zonensymbole gelten genau die gleichen Beziehungen, wie wir sie oben für die dreigliedrigen allgemein gefunden haben. Einer beliebigen Fläche $(h k i l)$ wird also wie dort ein bestimmter Punkt $[(h k i l)]$ zugeordnet und jedem Punkt $[(m n o p)]$ entspricht ganz eindeutig die Ebene $(m n o p)$.

Es lohnt sich, die orthohexagonale Koordinatendarstellung von P. Niggli in die hexagonale umzuwandeln. Natürlich würde es weit über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen, wenn die hexagonale Darstellung für alle 52 in Betracht kommenden Raumgruppen in ähnlicher Ausführlichkeit gegeben werden sollte wie in der geometrischen Kristallographie des Diskontinuums. Ich ziehe es vor, im nachstehenden nur die wichtigsten Größen, nach allgemeinen Gesichtspunkten angeordnet, in gedrängtester Kürze mitzuteilen. Wie bei der Beschreibung der trigonalen und rhomboedrisch-trigonalen Raumgruppen, so halte ich auch hier an der kristallographisch üblichen Orientierung fest, so daß das um 30° gedrehte hexagonale Raumgitter ebenfalls zu berücksichtigen ist.

Komponenten der primitiven Translationen.

A. Für das hexagonale Raumgitter normaler Stellung.

$$\frac{2}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{3} 0; \frac{1}{3} \frac{2}{3} \frac{1}{3} 0; \frac{1}{3} \frac{1}{3} \frac{2}{3} 0; 0001$$

Dahin gehören außer allen rein hexagonalen Raumgruppen noch folgende:

$$\mathfrak{C}_3^1, \mathfrak{C}_3^2, \mathfrak{C}_3^3, \mathfrak{C}_{3i}^1, \mathfrak{C}_{3v}^1, \mathfrak{C}_{3v}^3, \mathfrak{D}_3^2, \mathfrak{D}_3^4, \mathfrak{D}_3^6, \mathfrak{D}_{3d}^3, \mathfrak{D}_{3d}^4, \mathfrak{C}_{3h}^1, \mathfrak{D}_{3h}^1, \mathfrak{D}_{3h}^3$$

B. Für das hexagonale Raumgitter der um 30° gedrehten Stellung.

$$\frac{2}{3} 0 \frac{\bar{2}}{3} 0; \frac{\bar{2}}{3} \frac{2}{3} 0 0; 0 \frac{2}{3} \frac{\bar{2}}{3} 0; 0001$$

Hierher gehören:

$$\mathfrak{C}_{3v}^2, \mathfrak{C}_{3v}^4, \mathfrak{D}_3^1, \mathfrak{D}_3^3, \mathfrak{D}_3^5, \mathfrak{D}_{3d}^1, \mathfrak{D}_{2d}^2, \mathfrak{D}_{3h}^2, \mathfrak{D}_{3h}^4$$

Die beiden Tripel

$$\frac{1}{3} \frac{1}{3} \frac{2}{3} 0 \text{ und } 0 \frac{2}{3} \frac{\bar{2}}{3} 0$$

sind neben den beiden ersten nicht im strengen Sinn primitiv, sie leisten aber vielfach gute Dienste und sind für das Gitter selber den anderen völlig gleichberechtigt.

C. Für das rhomboedrische Raumgitter.

$$\frac{1}{3} 0 \frac{\bar{1}}{3} \frac{1}{3}; \frac{\bar{1}}{3} \frac{1}{3} 0 \frac{1}{3}; 0 \frac{\bar{1}}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{3}$$

Es gehören hierher:

$$\mathfrak{C}_3^4, \mathfrak{C}_{3i}^2, \mathfrak{C}_{3v}^5, \mathfrak{C}_{3v}^6, \mathfrak{D}_3^7, \mathfrak{D}_{3d}^5, \mathfrak{D}_{3d}^6.$$

Additive Zusatzglieder der rhomboedrischen Raumgruppen (Z.G.).

$$\frac{1}{3} 0 \frac{\bar{1}}{3} \frac{1}{3}; 0 \frac{1}{3} \frac{\bar{1}}{3} \frac{2}{3}$$

Koordinaten der Einstichpunkte der vertikalen Achsen in der Basisebene.

A. Für das hexagonale Gitter der gewöhnlichen Aufstellung.
0000 mit trigonalen oder hexagonalen Achsen.

$\frac{1}{3}0\frac{\bar{1}}{3}0, 0\frac{1}{3}\frac{\bar{1}}{3}0$ nur mit trigonalen Achsen, z. T. jede für sich z. T. beide zusammengehörig.

$\frac{1}{3}\frac{\bar{1}}{6}\frac{\bar{1}}{6}0; \frac{\bar{1}}{6}\frac{1}{3}\frac{\bar{1}}{6}0; \frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{\bar{1}}{3}0$ nur Digyren, also immer in Verbindung mit 6-zähligen Achsen.

B. Für das hexagonale Gitter der gedrehten Stellung.
0000 nur Trigyren.

$\frac{2}{9}\frac{2}{9}\frac{\bar{4}}{9}0, \frac{\bar{2}}{9}\frac{4}{9}\frac{\bar{2}}{9}0$ zusammengehörige oder einzelne Trigyren.

C. Für das rhomboedrische Gitter.

0000, $\frac{1}{3}0\frac{\bar{1}}{3}0, 0\frac{1}{3}\frac{\bar{1}}{3}0$ Trigyren und 6-zählige Drehspiegelachsen.

$\frac{2}{9}\frac{\bar{1}}{9}\frac{\bar{1}}{9}0, \frac{\bar{1}}{9}\frac{2}{9}\frac{\bar{1}}{9}0, \frac{2}{9}\frac{2}{9}\frac{\bar{4}}{9}0$ linksgewundene
 $\frac{9}{4}\frac{\bar{2}}{9}\frac{\bar{2}}{9}0, \frac{\bar{2}}{9}\frac{4}{9}\frac{\bar{2}}{9}0, \frac{1}{9}\frac{1}{9}\frac{\bar{2}}{9}0$ rechtsgewundene } Schraubenachsen.

Symmetriezentren.

A. Im hexagonalen Gitter gewöhnlicher Stellung.

0000; $\frac{1}{3}\frac{\bar{1}}{6}\frac{\bar{1}}{6}0, \frac{\bar{1}}{6}\frac{1}{3}\frac{\bar{1}}{6}0, \frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{\bar{1}}{3}0$ } Die untereinanderstehenden Gruppen
000 $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\frac{\bar{1}}{6}\frac{\bar{1}}{6}\frac{1}{2}, \frac{\bar{1}}{6}\frac{1}{3}\frac{\bar{1}}{6}\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{\bar{1}}{3}\frac{1}{2}$ } gehören z. T. zusammen.

Bei $\mathfrak{D}_{3d}^2, \mathfrak{D}_{3d}^4, \mathfrak{D}_{6h}^2, \mathfrak{D}_{6h}^4$ ist je 000 $\frac{1}{4}$ zu addieren.

B. Im hexagonalen Gitter der gedrehten Aufstellung.

0000; $\frac{1}{3}0\frac{\bar{1}}{3}0, \frac{\bar{1}}{3}\frac{1}{3}00, 0\frac{1}{3}\frac{\bar{1}}{3}0$

000 $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}0\frac{\bar{1}}{3}\frac{1}{2}, \frac{\bar{1}}{3}\frac{1}{3}0\frac{1}{2}, 0\frac{1}{3}\frac{\bar{1}}{3}\frac{1}{2}$

C. Im rhomboedrischen Gitter.

Eckpunkte: 0000

Raummitten: 000 $\frac{1}{2}$

Kantenmitten: $\frac{1}{6}0\frac{\bar{1}}{6}\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\frac{\bar{1}}{6}\frac{\bar{1}}{3}\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\frac{1}{6}\frac{\bar{1}}{2}\frac{1}{6}$

Flächenmitten: $\frac{1}{6}0\frac{\bar{1}}{6}\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\frac{\bar{1}}{6}\frac{\bar{1}}{3}\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\frac{1}{6}\frac{\bar{1}}{2}\frac{2}{3}$

Zu jedem Quadrupel sind die oben angegebenen Z. G. zu addieren.

Die Zusammengehörigen Koordinatenwerte.

Trigyrisch gehören je zusammen

1. mnop	nomp	omnp	
2. onmp	monp	nomp	Spiegelbilder von 1. nach (1010)
3. <u>mnop</u>	<u>nomp</u>	<u>omnp</u>	obere, 1. gegenüberliegende Punkte
4. <u>onmp</u>	<u>monp</u>	<u>nomp</u>	2. gegenüberliegend, oben.
1'. <u>mnop</u>	<u>nomp</u>	<u>omnp</u>	
2'. <u>onmp</u>	<u>monp</u>	<u>nomp</u>	
3'. <u>mnop</u>	<u>nomp</u>	<u>omnp</u>	
4'. <u>onmp</u>	<u>monp</u>	<u>nomp</u>	

Mit Hilfe dieser Gruppierungen können wir die Koordinatenquadrupel der verschiedenen Raumgruppen folgenderweise zusammenfassen.

IV₁. Trigonal-rhomboedrische Abteilung.

\mathfrak{C}_3^1	1.	\mathfrak{C}_3^2 mnop nomp + $\frac{1}{3}$ omnp + $\frac{2}{3}$	
\mathfrak{C}_3^4	1. mit Z. G.	\mathfrak{C}_3^3 mnop nomp + $\frac{2}{3}$ omnp + $\frac{1}{3}$	
\mathfrak{C}_{3i}^1	1. und 1'.		
\mathfrak{C}_{3i}^2	1. und 1'. beide mit Z. G.		
\mathfrak{C}_{3v}^1	1. und 4.	\mathfrak{C}_{3v}^3	Alle mit 1. und 4.
\mathfrak{C}_{3v}^2		\mathfrak{C}_{3v}^4	4. jedoch mit zusätzlichem $000\frac{1}{2}$
\mathfrak{C}_{3v}^5	1. und 4., aber beide mit Z. G.	\mathfrak{C}_{3v}^6	— hierzu kommen noch Z. G.
\mathfrak{D}_3^1	1. und 4.	\mathfrak{D}_3^7	1. und 4'. und Z. G.
\mathfrak{D}_3^2			
\mathfrak{D}_3^3	mnop nomp + $\frac{1}{3}$ omnp + $\frac{2}{3}$		
\mathfrak{D}_3^4	monp onmp + $\frac{1}{3}$ nmop + $\frac{2}{3}$		
\mathfrak{D}_3^5	mnop nomp + $\frac{2}{3}$ omnp + $\frac{1}{3}$		
\mathfrak{D}_3^6	monp onmp + $\frac{2}{3}$ nmop + $\frac{1}{3}$		
\mathfrak{D}_{3d}^1	1., 1', 4., 4'.	\mathfrak{D}_{3d}^2	1., 4', ferner 4. und 1'. mit zu-
\mathfrak{D}_{3d}^3		\mathfrak{D}_{3d}^4	sätzlichem $000\frac{1}{2}$
\mathfrak{D}_{3d}^5	dazu noch Z. G.	\mathfrak{D}_{3d}^6	dazu noch Z. G.

IV₂. Rein trigonale Abteilung.

\mathfrak{C}_{3h1}	1. und 3'.		
\mathfrak{D}_{3h}^1	1., 4., 2', 3'.	\mathfrak{D}_{3h}^3	1., 3'. Ferner 2', 4. mit zusätz-
\mathfrak{D}_{3h}^2		\mathfrak{D}_{3h}^4	lichem $[000\frac{1}{2}]$

IV₃. Rein hexagonale Abteilung.

\mathfrak{C}_6^1	1., 3.	\mathfrak{C}_6^6	1. Sodann mit zusätzlichen $[000\frac{1}{2}]$
\mathfrak{C}_6^2	$mno\bar{p}$	$\overline{o}mnp + \frac{1}{6}$	$n\overline{o}mp + \frac{1}{3}$
	$\overline{mn}\overline{o}p + \frac{1}{2}$	$o\overline{mn}p + \frac{2}{3}$	$\overline{n}\overline{o}mp + \frac{5}{6}$
\mathfrak{C}_6^3	$mno\bar{p}$	$\overline{n}omp + \frac{1}{6}$	$omnp + \frac{1}{3}$
	$\overline{mn}\overline{o}p + \frac{1}{2}$	$\overline{n}omp + \frac{2}{3}$	$\overline{o}mnp + \frac{5}{6}$
\mathfrak{C}_6^4	$mno\bar{p}$	$n\overline{o}mp + \frac{1}{3}$	$omnp + \frac{2}{3}$
	$\overline{mn}\overline{o}p$	$\overline{n}\overline{o}mp + \frac{1}{3}$	$\overline{o}mnp + \frac{2}{3}$
\mathfrak{C}_6^5	$mno\bar{p}$	$n\overline{o}mp + \frac{2}{3}$	$omnp + \frac{1}{3}$
	$\overline{mn}\overline{o}p$	$\overline{n}\overline{o}mp + \frac{2}{3}$	$\overline{o}mnp + \frac{1}{3}$
\mathfrak{C}_{6h}^1	1., 3., 1', 3'.		
\mathfrak{C}_{6h}^2	1., 1', dazu 3., 3'. mit zusätzlichem $000\frac{1}{2}$		
\mathfrak{C}_{6v}^1	1., 2., 3., 4.		
\mathfrak{C}_{6v}^2	1., 3. 2., 4.		
\mathfrak{C}_{6v}^3	1., 2. dazu 3., 4. je mit zusätzlichem $000\frac{1}{2}$		
\mathfrak{C}_{6v}^4	1., 4. 2., 3.		
\mathfrak{D}_6^1	1., 3., 2', 4'.	\mathfrak{D}_6^6	1., 4', dazu 3., 2'. mit zusätzlichem $000\frac{1}{2}$
\mathfrak{D}_6^2	$mno\bar{p}$	$\overline{o}mnp + \frac{1}{6}$	$n\overline{o}mp + \frac{1}{3}$
	$\overline{mn}\overline{o}p$	$\overline{n}m\overline{p} + \frac{1}{6}$	$on\overline{mp} + \frac{1}{3}$
	$\overline{mn}\overline{o}p + \frac{1}{2}$	$omnp + \frac{2}{3}$	$\overline{n}\overline{o}mp + \frac{5}{6}$
	$\overline{m}\overline{n}o\bar{p} + \frac{1}{2}$	$n\overline{m}\overline{o}p + \frac{2}{3}$	$\overline{o}n\overline{mp} + \frac{5}{6}$
\mathfrak{D}_6^3	$mno\bar{p}$	$\overline{n}omp + \frac{1}{6}$	$omnp + \frac{1}{3}$
	$\overline{m}\overline{n}o\bar{p}$	$\overline{o}n\overline{mp} + \frac{1}{6}$	$n\overline{m}o\bar{p} + \frac{1}{3}$
	$\overline{m}\overline{n}o\bar{p} + \frac{1}{2}$	$n\overline{o}mp + \frac{2}{3}$	$\overline{o}mnp + \frac{5}{6}$
	$\overline{m}\overline{n}o\bar{p} + \frac{1}{2}$	$on\overline{mp} + \frac{2}{3}$	$n\overline{m}o\bar{p} + \frac{5}{6}$
\mathfrak{D}_6^4	$\overline{m}\overline{n}o\bar{p}$	$\overline{m}\overline{n}o\bar{p}$	$n\overline{o}mp + \frac{1}{3}$ $\overline{n}\overline{o}mp + \frac{1}{3}$
	$\overline{m}\overline{n}o\bar{p}$	$\overline{m}\overline{n}o\bar{p}$	$on\overline{mp} + \frac{1}{3}$ $\overline{o}n\overline{mp} + \frac{1}{3}$
		$om\overline{np} + \frac{2}{3}$	$\overline{o}m\overline{np} + \frac{2}{3}$
		$n\overline{m}\overline{o}p + \frac{2}{3}$	$\overline{n}\overline{m}o\bar{p} + \frac{2}{3}$
\mathfrak{D}_6^5	$mno\bar{p}$	$\overline{m}\overline{n}o\bar{p}$	$n\overline{o}mp + \frac{2}{3}$ $\overline{n}\overline{o}mp + \frac{2}{3}$
	$\overline{m}\overline{n}o\bar{p}$	$\overline{m}\overline{n}o\bar{p}$	$on\overline{mp} + \frac{2}{3}$ $\overline{o}n\overline{mp} + \frac{2}{3}$
		$om\overline{np} + \frac{1}{3}$	$\overline{o}m\overline{np} + \frac{1}{3}$
		$n\overline{m}\overline{o}p + \frac{1}{3}$	$\overline{n}\overline{m}o\bar{p} + \frac{1}{3}$

\mathfrak{D}_{6h}^1	1., 2., 3., 4., 1', 2', 3', 4'.
\mathfrak{D}_{6h}^2	1., 1', 3., 3'.
\mathfrak{D}_{6h}^3	1., 2., 1', 2'.
\mathfrak{D}_{6h}^4	1., 4., 1', 4'.

dazu

2., 2', 4., 4'.
3., 3', 4., 4'.
2., 2', 3., 3'.

mit zusätzlichem 000 $\frac{1}{2}$.

Allgemeine und spezielle Gitter.

Kehren wir wieder zu den Flächenkomplexen zurück, um noch einige interessante Beziehungen zur Kristallographie hervorzuheben.

Bei der Ableitung der 230 Flächenkomplexe haben wir immer nur von Flächen allgemeinster Lage gesprochen. Diese sind aber durch keine Symmetrieeigenschaften ausgezeichnet und charakterisieren daher in vortrefflichster Weise die Asymmetrie der zugeordneten allgemeinen Punktlage. Rein äußerlich können wir, wie bereits früher angedeutet, diese Asymmetrie schon durch die unregelmäßig dreiseitige Gestalt des Ebenensegmentes zum Ausdruck bringen. Nun lehrt die Kristallographie, daß mit Ausnahme des triklinen Systems in allen Klassen spezielle Formen auftreten, deren Flächen in geringerer Zahl erscheinen, als im allgemeinsten Fall, dafür aber durch gewisse Symmetriequalitäten ausgezeichnet sind. Denken wir uns im Flächenkomplex den nämlichen Grenzübergang vollzogen, so bekommen wir einen wenigerzähligen Komplex, die einzelnen Flächen aber sind irgendwie symmetrisch geworden.

Von den Symmetriequalitäten abgesehen, gehören die sogen. Grenzformen mehreren Symmetrieklassen an. So kommt z. B. die hexagonale Bipyramide zweiter Stellung in fünf verschiedenen Klassen vor: in der Holoedrie, Paramorphie und Enantiomorphie des hexagonalen Systems, ferner in der Holoedrie des trigonalen und in der Holoedrie des rhomboedrischen Systems. Die auf die normale Stellung des Raumgitters bezogenen symmorphen Raumgruppen dieser fünf Klassen müssen also übereinstimmende spezielle Komplexe haben, welche sich von den Bipyramiden zweiter Stellung ableiten. Es sind dies die Komplexe, welche wir mit $[[2\bar{m}.\bar{m}.\bar{m}.p]]$ symbolisieren können und die mithin zwei Freiheitsgrade besitzen. Ja noch mehr! Selbst die nicht symmorphen Raumgruppen der holoedrischen Klasse müssen die gleichen Komplexe ergeben, denn die für diese Raumsysteme charakteristischen Bipyramiden dritter Stellung oder ditrigonalen Bipyramiden zweierlei Stellung werden — immer von Symmetriequalitäten abgesehen — zu identischen Bipyramiden zweiter Stellung, wenn jener Grenzübergang vollzogen wird.

Vollziehen wir in allen diesen Fällen den Grenzübergang mit Hilfe der ungleichseitigen Dreieckchen, so wird die innere Ungleichheit der resultierenden Bipyramiden ebenso augenscheinlich, wie wir sie am Kristall selber durch die Ätzfiguren deutlich machen können. Es treten nämlich die Dreiecke in ganz individueller Weise zu diesen Pyramiden zweiter Stellung zusammen. Bei D_{3d}^2 z. B. kommt in die Ebene der Bipyramidenfläche nur je ein Dreieck zu liegen, ebenso wie bei D_{3d}^1 . Bei D_{3d}^1 sind sie aber so gedreht, daß je ein oberes Dreieckchen zu einem unteren spiegelbildlich liegt, während sie bei D_{3d}^2 zueinander digyrisch verdreht sind u. s. w.

Das Charakteristikum dieser Grenzübergänge ist, daß sich das Verhältnis der Indizes $(h k l)$ kontinuierlich ändert. Es können aber auch spezielle Gitter dann entstehen, wenn bei gleichbleibendem Verhältnis der Indizes sich nur deren Größe ändert. Knüpfen wir zu dem Zweck wiederum an Fig. 14 an und betrachten etwa die beiden Flächen $(h k l)_{000}$ und $(h k l)_{0\frac{1}{2}0}$. Nun lassen wir h, k und l im gleichen Verhältnis größer werden, d. h. wir multiplizieren sämtliche Indizes mit einem und demselben positiven Faktor. Nimmt dieser Faktor zu, so werden die Flächen immer mehr von ihrem Zentrum wegrücken, berühren sich dann, schneiden sich hierauf in einer beim weiteren Wachsen jenes Faktors sich parallel bleibenden Geraden und schließlich fallen die beiden mit den Ebenen dualistisch verknüpften Punkte zusammen, dann nämlich, wenn $k = \frac{1}{4}$ geworden ist. Ausgangsflächen mit anderen Verhältnissen der Indizes führen auf einen anderen Punkt. Alle Punkte aber liegen in der Symmetrieebene $(010)\frac{1}{4}$, und wir sehen deutlich, wie sich die Zähligkeit der Punktlage vermindert, während sich ihre Symmetrie, welche durch die beiden Ebenen trefflich zum Ausdruck kommt, demgemäß erhöht.

Es ist überaus lohnend, gerade unter solchen Gesichtspunkten die speziellen Gitter zu studieren. Von besonderem Vorteil wird es dabei sein, wenn alle raumgitterartigen Komplexe gleicher Symmetrie, auf die wir bei den einzelnen Raumgruppen hingewiesen haben, mit in Betracht gezogen werden.

Sind Grenzformen unter allen Umständen mehrdeutig, so können Kombinationen von Grenzformen eindeutig sein. So gehört z. B. die Kombination der trigonalen Bipyramide (zweiter Stellung) mit dem Rhomboeder (erster Stellung) einzig der Enantiomorphie an, wiewohl jene in zwei und dieses sogar in drei Symmetrieklassen auftritt. Eine ähnliche Eindeutigkeit vom entsprechenden Strukturkomplex zu behaupten, wäre aber nicht unbedingt

richtig. In \mathfrak{D}_3^2 z. B. würde der Komplex $[[m\bar{0}\bar{m}p]]$ (entsprechend dem Rhomboeder) mit dem Komplex $[[\frac{1}{3}\frac{1}{6}\frac{1}{6}p]]$ (entsprechend einer speziellen Lage der trigonalen Bipyramide) eine Punktverteilung ergeben, die auch in \mathfrak{D}_{3d} möglich ist. Der Flächenkomplex freilich ist verschieden, weil zur Punktlage noch das Moment der Orientierung kommt. Für die Strukturbestimmung ist das aber belanglos, weil wir noch keine „Ätzmethode“ für die Raumgitter haben.

Damit sind wir auf einen Punkt gestoßen, wo sich strukturelle und phänomenologische Kristallographie wesentlich unterscheiden. Die phänomenologische Kristallographie operiert nur mit den Zahlenverhältnissen, die strukturelle aber auch mit den Zahlengrößen. Das Problem der Eindeutigkeit und Vieldeutigkeit einer Kombination von Komplexen, namentlich Punktkomplexen, wird daher nicht bloß die Form (dieser Name auch auf die der *Flächenform* zuzuordnende *Punktf orm* ausgedehnt), sondern noch die gegenseitige Lage der einzelnen Komplexe zu berücksichtigen haben. Wird aber erst noch die Orientierung, d. h. die Lage der Achsen unbestimmt, wie das im monoklinen und triklinen System in besonderem Maße der Fall ist, so braucht es wirklich schon Punkte recht allgemeiner Lage, um Eindeutigkeit zu haben.

Zusammenfassung.

In längeren Ausführungen wurde gezeigt, wie sich die 230 Raumgruppen des Diskontinuums dadurch versinnbildlichen lassen, daß die Punkte der Bravais'schen Raumgitter durch die kristallographischen Polyeder ersetzt werden in der Weise, daß die letztern zwar einerlei Art und gleicher Größe, jedoch nicht sämtlich parallel oder im strengen Sinn identisch sein müssen (rechts und links!). Die Miller'schen Indizes dieser Formen stehen mit den „zusammengehörigen Koordinatenwerten“ (P. Niggli) in engstem Zusammenhang (das Gleiche läßt sich auch für die 4-gliedrigen Symbole zeigen), während die Symmetrie der Fläche für die „Symmetriedingung der betreffenden Punktlage“ charakteristisch ist.

Die Bedeutung der Kristallpolyeder in der Lehre der regelmäßigen Punktsysteme ist also eine doppelte: 1. durch Betonung des für die geometrischen Wissenschaften so befriedigend wirkenden Dualismus zwischen Punkt und Ebene wird die Kristallographie des Diskontinuums vertieft und 2. die Bezugnahme auf geläufige Vorstellungen und Ideen erleichtert dem Kristallographen das Erfassen und Beherrschenden der für ihn immer unentbehrlicher werdenden Theorie der regelmäßigen Punktverteilung.

Zürich, den 8. Januar 1925.