Schweizerische
Lehrerzeitung
Zeitschrift für Bildung, Erziehung, Unterricht · Organ des Schweizerischen Lehrervereins

Sonderausgabe ‹Schulpraxis› · Monatsschrift des Bernischen Lehrervereins

28. 2. 1980 · **SLZ 9**

Denken lernen ist ‹Sehen-lernen›

Schulpraxis / Schweizerische Lehrerzeitung — Nr. 9

Monatsschrift des Bernischen Lehrervereins **28. Februar 1980**

Die «Schulpraxis» wird laufend im Pädagogischen Jahresbericht (Verlag für Pädagogische Dokumenation Duisburg) bibliographisch nachgewiesen.

Redaktion des «Schulpraxis»-Teils: H. R. Egli, 3074 Muri BE
Druck und Spedition: Eicher & Co, 3001 Bern

Hans Egger:

Denken lernen ist «Sehen»-lernen

8 Beispiele aus dem Rechenunterricht:

Umschlagillustration: Foto Walter Studer, Moserstrasse 26, 3014 Bern

Adresse des Autors: Hans Egger, Seminarlehrer, Iffwilstrasse 66, 3349 Zuzwil

Liste der lieferbaren Hefte der «Schulpraxis» (Auswahl)

Nr.	*Monat*	*Jahr*	*Preis*	*Titel*
1	Januar	68	2.—	Schultheater
4/5	April/Mai	68	3.—	Schulschwimmen heute
8/9/10	Aug.–Okt.	68	4.—	Bernische Klöster II
11/12	Nov./Dez.	68	3.—	Simon Gfeller
1	Januar	69	3.—	Drei Spiele für die Unterstufe
2	Februar	69	2.—	Mathematik und Physik an der Mittelschule
4/5	April/Mai	69	2.—	Landschulwoche im Tessin
6/7	Juni/Juli	69	2.—	Zur Erneuerung des Rechenunterrichtes
8	August	69	1.50	Mahatma Gandhi
9	September	69	3.—	Zum Grammatikunterricht
10/11/12	Okt.–Dez.	69	4.—	Geschichtliche Heimatkunde im 3. Schuljahr
1/2	Jan./Febr.	70	4.—	Lebendiges Denken durch Geometrie
4	April	70	1.50	Das Mikroskop in der Schule
8	August	70	1.50	Gleichnisse Jesu
11/12	Nov./Dez.	70	3.—	Neutralität und Solidarität der Schweiz
1	Januar	71	1.50	Zur Pädagogik Rudolf Steiners
2/3	Febr./März	71	3.—	Singspiele und Tänze
5	Mai	71	2.—	Der Berner Jura – Sprache und Volkstum
6	Juni	71	3.—	Tonbänder, Fremdspracheunterricht im Sprachlabor
7/8	Juli/Aug.	71	2.—	Auf der Suche nach einem Arbeitsbuch zur Schweizergeschichte
9/10	Sept./Okt.	71	2.—	Rechenschieber und -scheibe im Mittelschulunterricht
11/12	Nov./Dez.	71	3.—	Arbeitsheft zum Geschichtspensum des 9. Schuljahrs der Primarschule
1	Januar	72	1.50	Von der menschlichen Angst und ihrer Bekämpfung durch Drogen

Fortsetzung 3. Umschlagseite

Offener Unterricht: Ein Freibrief für Schulschlendrian?

In den Kommentaren zu den dargestellten Beispielen trete ich für Spiel-Raum ein, für ein lehrplan- und lehrmittelunabhängiges Arbeiten. Ich versuche, dem Lehrer Mut zu machen, selber Bereiche zu entdecken und zu nutzen, in denen er bei der Themen- und Methodenwahl frei ist und mit seinen Schülern spielerisch-pröbelnd arbeiten kann. Ich möchte, dass Unterricht öfters entspannt und gelassen verläuft, entlastet von Notendruck und Pensenhast. Mit den Kindern sich einlassen, für sie und mit ihnen sich Zeit nehmen; gemeinsam nach Lösungen gemeinsamer Aufgaben suchen; mit ihnen sich stets neu unterwegs wissen, lernend und mit Schwierigkeiten ringend wie sie: Dazu möchte ich anregen. Wer damit sich aber aufgefordert, oder gar gerechtfertigt fühlte, seine Schulmeisterei leichtfertig und obenhin zu betreiben, der hätte mich falsch verstanden. Ich will nicht auffordern zu unbekümmertem Laissez-faire. Ebensowenig möchte ich zu romantisch-schwärmerischer Systemkritik verleiten.

Unterricht wird bei jedem von uns auch aus ganz persönlichen Motiven heraus gestaltet. Wir suchen uns darin selbst zu verwirklichen und für uns Lebenssinn zu finden. Wir möchten uns wohlfühlen und zufrieden sein, Freude an der Arbeit mit unseren Schülern haben. In solchen Motiven hat gewiss auch mein Bedürfnis nach unabhängiger Unterrichtsgestaltung und nach viel persönlicher Bewegungsfreiheit seinen tieferen Grund. Auch darin, dass ich mir einen Gegenpol schaffen möchte gegenüber der Neigung zu eher straffer und enger Führung.

Uns sind aber Kinder anvertraut. Deshalb darf Unterricht kein Freigehege für individualistisches sich Ausleben und Selberfinden sein, weder nach der einen noch nach der andern Seite hin. Mit unseren Schülern übernehmen wir Verantwortung für sie. Auch sie haben Interessen und Erwartungen gegenüber unserem Unterricht. Elementare Lebensbedürfnisse, z.B. nach Freude, Wohlbehagen, Glücklichsein leiten sie. Die Eltern sorgen sich um der Kinder Fortkommen, um deren künftige Existenz. Mit der Schule als öffentliche Einrichtung, mit Lehrplänen und Lehrmitteln wird versucht sicherzustellen, dass diese Erwartungen und Interessen möglichst gut erfüllt werden. Das wiederum ‚engt' unseren Spielraum ein. Wir haben nach Plan und Normen zu fahren. Oftmals fühlen wir

Hans Egger:

Denken lernen ist ‹Sehen›-lernen

Aufmerksame und vertiefende Betrachtung, Sehen-lernen stehen am Beginn jeder Wissenschaft. A. I. Wittenberg.

Über die Entstehung dieser Arbeit

Die Beispiele in diesem Heft gehen zur Hauptsache auf Arbeiten zurück, die ich in den Sechzigerjahren mit eigenen Schülern durchgeführt habe. Zu zweien – Beispiele 5 und 6 – habe ich die Unterlagen bei der Betreuung von Seminaristen im Landeinsatz gesammelt.

Ist es angebracht, derart weit zurückliegende Situationen wieder aufzugreifen, sie anhand von damals angelegten Notizen und von Schülerarbeiten aufzuwärmen und zusammen mit den früher angestellten und später weitergeführten Überlegungen heutigen Kolleginnen und Kollegen vorzulegen?

Ich habe mir diese Frage während der Arbeit am vorliegenden Text, die sich über mehrere Jahre erstreckt hat, ein paarmal gestellt. Dass ich sie nach längeren Unterbrüchen immer wieder aufgenommen und weitergeführt habe, ist meine Antwort. In vielen Situationen eigenen und fremden Unterrichts stosse ich regelmässig auf das zentrale Grundproblem des Lehrens: Was geschieht, wenn Kinder lernen? Wie können wir diesen vielschichtigen Vorgang durch unsere Inszenierungen anregen, unterstützen, fördern? Wie führen wir Kinder und Sachen – Unterrichtsgegenstände – zusammen, dass in den Schülern jene fesselnden Prozesse in Gang kommen, die wir Denken nennen? Wie geht das: Kinder denken machen? Die Beispiele berichten von Versuchen und Überlegungen in Teilbereichen dieses Problemfeldes.

Die ersten drei Beispiele habe ich mit Knaben meiner damaligen fünften und sechsten Klassen durchgeführt. Die Arbeiten am Kreis sind zusammengetragen aus Versuchen, die ich, unterschiedlich angesetzt und ausgebaut, über mehrere Jahre hin mit Achtklässlern unternommen habe. Bei meiner Darstellung handelt es sich somit nicht um einen systematischen Lehrgang, den ich je einmal in dieser Form durchgearbeitet hätte. Es sind nachträglich versammelte Arbeits- und Gedankenstücke eines Unterrichtsbastlers, ein kommentierter Werkstattbericht zu einigen Arbeitsphasen.

Einzelne Beispiele sind, wie eben erwähnt, ausschliesslich mit Knaben durchgearbeitet worden. Das soll nicht heissen, dass die betreffenden Themen und die versuchten Arbeitsweisen nicht auch Schülerinnen ansprächen. Im Gegenteil: Ich habe mehrmals festgestellt, dass Mädchen die Knaben um dieser Arbeiten willen beneideten, wenn sie Ergebnisse zu Gesicht bekamen oder wenn ihnen die Knaben über unsere Pröbeleien berichteten. Mehrmals wurde auch der Wunsch geäussert, ebenfalls an diesem Unterricht teilnehmen zu können. Oder es wurde an mich die leicht vorwurfsvolle Frage gerichtet, warum wir derartige Arbeiten nicht in den übrigen Stunden ausführten. Mein Hinweis auf stundenplantechnische «Zwänge» stellte die Fragerinnen jeweilen wenig zufrieden.

Ich hatte angefangen, in der Bubenschule bereits auf dieser Stufe sehr einfache geometrische «Hand»-Arbeiten durchzuführen, während gleichzeitig die Knaben des siebenten Schuljahres als eine Art Vorkurs zum Technisch-Zeichnen des achten und des neunten Jahres mit Übungen im geometrischen Zeichnen und Konstruieren beschäftigt waren. Anregungen zu allerlei Versuchen auf allen Stufen hatte ich im wesentlichen beim Studium von Martin Wagenscheins Werken gewonnen. Konkrete Ideen für die Arbeiten im fünften und sechsten Schuljahr schöpfte ich überdies aus dem Buch von Alexander Israel Wittenberg «Bildung und Mathematik» (Klett Stuttgart 1963), auf das ich ebenfalls bei der Wagenschein-Lektüre gestossen war. Beeinflusst war ich weiter von den im Otto Maier Verlag Ravensburg erschienenen Bänden «Das Spiel mit den bildnerischen Mitteln», Werkstoff Papier (Band 1) und Werkstoff Holz (Band 2). Für die Arbeiten der Siebentklässler lehnte ich mich teilweise an das Bändchen von Anton Friedrich, «Meine erste Geometrie» an, während denen im Technisch-Zeichnen der Oberstufe der Lehrgang des Staatlichen Lehrmittelverlages zugrunde lag, darüber hinaus aber wesentliche Impulse aus dem Band von Hermann von Baravalle, «Geometrie als Sprache der Formen» schöpfte (Novalis Verlag Freiburg im Breisgau 1957). Während dieser Zeit war ich an der Beratung der Entwürfe für ein neues Rechenbuch für das siebente Schuljahr beteiligt, woraus ich manche Aufgabe für meine Versuche zurechtkrempelte oder sie dem Entwurf entsprechend meinen Buben zum Beissen gab.

Die leitenden Gedanken, die hinter diesem «heimlichen Lehrplan» standen – einzig die Arbeiten im achten und im neunten Schuljahr, und auch diese nur zum Teil, hatten den offiziellen Lehrplan zur Grundlage – möchte ich mit einigen Stichworten zusammenfassen, die zugleich wesentliche Gehalte von Wagenscheins «Genetischem Lehren» wiedergeben.

1. Den Kindern neben den mehr informierenden und übenden Unterrichtsphasen auch immer wieder Gelegenheiten anbieten, bei denen sie zu problemlösenden Einfällen kommen können.

2. In solchen Situationen die Schüler nicht drängen und sie nicht gewaltsam herausreissen aus ihrem Bei-der-Sache-Verweilen. Ihnen Zeit lassen zum Selberdenken und zum suchenden Sprechen, dies vor allem auch gemeinsam mit Partnern.
3. Die Kinder in ihrem Handeln und in ihrem Sprechen ernst nehmen und gelten lassen. Sie Einsicht suchen und finden lassen – auch auf Umwegen.
4. Erst handelnd bei der Sache sein und sich hineinnehmen lassen in das Problem, dann handelnd und sprechend suchen und dabei zu sagen versuchen, was einem einfällt, das Denken laut werden lassen. Erst ganz am Schluss, vielleicht erst später, in kurzer und streng formalisierter Aussage fassen, was vorläufig umgangssprachlich-umständlich beschrieben worden ist.
5. Auf diese Weise mit den Kindern unterwegs sein und unterwegs bleiben, unterwegs von Formen ursprünglich-naiven und weitschweifigen Verstehens und Sagens zu allmählich einschränkenderem und eingeschränkterem, zu immer genauerem und formalisierterem Sprechen und Denken.

Zur bernischen Lehrplantheorie der Sechzigerjahre

Nach dem zu jener Zeit gültigen provisorischen Lehrplan für die Primarschulen des Kantons Bern (Bern 1966) wurden die Schüler erstmals im siebenten Schuljahr an geometrische Erscheinungen herangeführt. Die Aufgaben, die dem Unterricht in der Primarschule aus diesem Gebiet oblagen, blieben darauf beschränkt, die Kinder mit den Flächenmassen vertraut zu machen und sie bei Quadrat und Rechteck den Umfang und den Flächeninhalt, beim Dreieck ebenfalls den Flächeninhalt berechnen zu lehren. Aus den vielen Möglichkeiten, mit Schülern an geometrischen Erscheinungen zu arbeiten, mit ihnen zu zeichnen, zu vergleichen, Elemente umzustellen und dadurch verborgenen Beziehungen hantierend auf die Spur zu kommen, blieben vom Lehrplan und von den Lehrmitteln her alle ungenutzt. Diese beschränkten die Zielsetzungen und die Aufgaben ausschliesslich auf Berechnungsprobleme – wohl aus der Überzeugung, *das* müssten die Kinder später können. Das Ziel bestand somit darin, ihnen eine anwendbare Technik und diese als verfügbare Formel beizubringen, wobei das Vorgehen und der Grad der Formalisierung, den der einzelne Lehrer auf einen bestimmten Zeitpunkt hin zu erreichen trachtete, freigestellt war. Das Ziel war erreicht, wenn die Kinder spätestens im achten Schuljahr in angewandten Aufgaben die gestellten Probleme mittels der entsprechenden Formel lösen konnten: $U = 4 \cdot s$; $F = s \cdot s$; $U = 2 \cdot (l + b)$; $F = l \cdot b$; $F = \frac{g \cdot h}{2}$. Dadurch spitzte sich die Arbeit in vielen Klassen darauf zu, ein Berechnungsschema, einen blossen Kalkül, der durch entsprechende Reizwörter ausgelöst wurde – «Berechnet den *Umfang*.» – technisch richtig handhaben zu lernen. Beobachtungen in Landeinsatzklassen zeigten, dass die Technik der Kinder häufig darin bestand, die Zahlenangaben einer Aufgabe mehr oder weniger intuitiv und zufällig miteinander in Beziehung zu bringen, sie zu addieren, zu multiplizieren und zuletzt eine erhaltene Zahl als Resultat durch doppeltes Unterstreichen zu kennzeichnen. Ihre Überlegung – wie weit war sie zufällig richtig? –: «Da muss man fünfzehnmalachtzig rechnen gibt tausendzweihundert Quadratmeter.» Wer das schnell heraus hatte, der wies sich damit über rechnerische Denkfähigkeit aus.

An dieser Situation waren mehrere Elemente unbefriedigend. Und manches Ergebnis liess einen an der Richtigkeit der offiziellen Lerntheorie zweifeln, und Zielangaben wie «Der Rechenunterricht fördert das selbständige Denken» kamen einem in schwarzen Stunden mehr als fragwürdig vor.

1. Die Arbeit an geometrischen Problemen setzte zu spät ein. Manche Erscheinungen aus der Geometrie hätten früher angegangen werden können. Dabei hätten aber die Kinder ausgiebig Gelegenheit haben müssen, diese hantierend erfahren zu können, die Vergleiche und Schlüsse hätten noch unmittelbar aus konkreten Handlungen hervorgehen und mit solchen vorstellungsmässig verbunden bleiben müssen, das heisst nicht bloss einmal aus solchen abgeleitet, sondern immer wieder auch in solche zurückgeführt werden.
2. Der Lehrplan und das Lehrmittel schränkten die Auseinandersetzung auf einen engen Teilbereich geometrischer Erscheinungen ein. Praktisch formalisierte man dann verhältnismässig rasch zu blossen Kalkül-Fertigkeiten. Einsichten in die Zusammenhänge der Erscheinungen und Verständnis der formalisierten Aussagen wurden wohl angestrebt, waren aber in der Regel nicht vorbereitet und blieben deshalb unerschlossen.
3. Begriffe und Vorstellungen, mit denen die Kinder nun plötzlich umgehen lernen mussten, waren in den vorangehenden Schuljahren überhaupt nicht und im siebenten Schuljahr nur unzureichend vorbereitet. Die Kinder mussten unvermittelt Flächen berechnen, ohne dass sie vorher mit Flächen umgehen, mit ihnen hantieren, allerlei ausprobieren, vergleichen, mit kleineren Flächen hätten belegen können. Sowohl der Begriff «Fläche» als das Verständnis für das Ausmessen von Flächen war nicht hantierend erfahren worden. Die Fertigkeit «Flächen berechnen» verschleierte das Unverständnis und reduzierte mögliche Einsichten auf angelerntes «Wissen wie rechnen».
4. Das in jener Zeit entstehende neue Lehrmittel für das siebente Schuljahr versuchte einige neue Wege zu gehen und solche neuen Formen auch deutlicher zu zeigen, als das bisher der Fall gewesen war. Es entstand unter anderem erstmals ein selbständiger Teil «Einführung in die Geometrie», zu dem der ebenfalls erneuerte Teil «Geometrie: Berechnungen» kam.

Mich beschäftigte damals, im wesentlichen angeregt durch Portmann, Litt, Wagenschein und Wittenberg, der Gedanke, dass Kinder sich mit den Erscheinungen ihrer Umgebung, ihres Alltags, auch mit Erscheinungen aus der Welt der Erwachsenen in einer ihnen eigenen Form auseinandersetzen, lange bevor die offizielle Lehrplan- und Lehrmitteltheorie sie dazu für «reif» hielt. Ein Gedanke leuchtete mir ein, den Lückert im Zusammenhang mit dem Frühlesen einmal formuliert hatte: Wir nähmen seiner Ansicht nach wahrscheinlich manche Dinge in der Schule zu spät in den Unterricht auf, schritten dann aber zu rasch auf ein zu hohes Abstraktionsniveau fort. Von Bruners herausfordernder These, «dass es von jedem Können oder Wissen eine sachgerechte Form der Mitteilung gibt, die man anderen nahebringen kann, in welchem Alter man auch mit dem Unterricht beginnen mag und je provisorischer diese Form der Mitteilung sei», wusste ich damals noch nichts. Erst später begegnete ich dem Gedanken erstmals in der Übertragung von Heinrich Roth: «Es gibt eine angemessene Version einer jeden Fertigkeit oder Information, die irgendeiner Altersstufe, an der man Unterricht ansetzen will, mitteilbar ist, wie sehr die Version einen vorbereitenden Charakter haben mag», dem er gleich einen eigenen Gedanken folgen liess: «Es gibt keinen Abschluss mehr, der alles zu umfassen vermag.» Das schien mir viel Gemeinsames zu haben mit Gedanken, die ich eben früher bei Litt und bei Wagenschein kennen gelernt hatte. Litt: «Der Mensch vergewissert sich der Beschaffenheit der ihm begegnenden Dinge und Vorgänge nicht durch abstandhaltende Betrachtung, sondern indem er es mit ihnen aufnimmt, indem er mit ihnen handgemein wird, indem er sie ‚ausprobiert'. Er macht sich mit ihnen dadurch vertraut, dass er mit ihnen hantiert. Die Eindrücke, die er in dieser Auseinandersetzung empfängt, sind zunächst und vor allem solche, die mit den Sinnen erfasst sein wollen.» Wagenschein: «Erst das Phänomen, dann die Theorie und die Modellvorstellung. . . . Erst die Muttersprache, dann die Fachsprache (und immer wieder zurück auch zur Muttersprache). . . Die Muttersprache ist die Sprache des Verstehens, die Fachsprache besiegelt das Ergebnis in einem letzten Arbeitsgang.»

Schule, Unterricht, Lernen, das ist mir immer deutlicher als ein langes und behutsames Unterwegssein erschienen. Als Lehrer unterwegssein mit sich selber, aber auch mit den einem anvertrauten Kindern. Diese abholen in ihrer Welt, in ihrem Denken und Sprechen, wie es ihnen bereits eigen geworden ist. Mit ihnen ein Stück weit unterwegs bleiben, ihnen Gelegenheiten verschaffen zum Umgang mit Dingen, zum Hantieren, zum Staunen und zum Nachdenken über Erscheinungen an unserem gemeinsamen Weg. Unterwegs sein zu vorläufigen Zielen, von denen aus wir vielleicht später sie weiterführen, von denen aus sie vielleicht allein, vielleicht von andern begleitet, weitergehen werden.

Die folgenden Arbeiten sind Beispiele für Versuche, Lernsituationen, Handlungsgelegenheiten aus dem skizzierten Hintergrund heraus entstehen zu lassen, manchmal geplant im Anschluss an eine Lektürephase, manchmal als spontane Einfälle aus alltäglichen Unterrichtssituationen hervorgegangen.

1. Beispiel: Die Hälfte von einem Halben

Im Rechenunterricht der sechsten Klasse, beim Hantieren mit Ganzen und Halben, waren wir eines Tages auf das Problem aufmerksam geworden. Wir hatten ein Brot, eine Wurst, einen Apfel halbiert, gezeichnet und angeschrieben, schön brav nach dem Vorgehen, wie das Lehrmittel es empfahl. Dann arbeiteten wir mit Kreisscheiben, mit quadratischen und rechteckigen Flächen – wir bezeichneten sie anfänglich als «Kuchen». Später halbierten wir Schnurstücke und Papierstreifen, indem wir sie falteten und mit dem Taschenmesser in der Mitte trennten. Da setzte einer dieses Spiel fort, zur Kurzweil wohl, und aus Lust am Falten und am Trennen mit dem Messer. Ich schaute ihm zu, liess ihn ein kleines Weilchen gewähren. Er ergriff das eine der neu entstandenen Stücke, faltete es, trennte und fuhr so fort, bis er nur noch schmale Streifchen vor sich hatte. Da gewahrte er, dass ich ihn beobachtete, war zuerst verlegen und dann erleichtert, als ich auf sein Tun eintrat.

«Du bist mit Deinem Weiterhalbieren auf etwas Interessantes gestossen. Nachmittags in der Bubenschule wollen wir gemeinsam mit den Fünftelern mit Deinem Einfall weiterarbeiten.»

Das weckte Neugierde; für den Rest dieser Stunde aber setzten wir die vorgesehenen Übungen fort.

Am Nachmittag hatte ich für die Buben der fünften und der sechsten Klasse schwarze Papierblätter Format A 4 bereit. Während ich die Arbeit für die andern Gruppen organisierte, durften sich je zwei zusammen aus einem solchen Blatt für jeden einen 10 cm langen und 2 cm breiten Streifen zurechtschneiden. Danach kehrte ich zu den «Kleinen» zurück.

«Nun denn, Walter, Du zeigst und erklärst jetzt allen, was Du am Vormittag so Interessantes gemacht hast. Beginne mit Deinem schwarzen Streifen so, wie wir angefangen hatten.»

«Zuerst haben wir gefaltet und dann mit dem Messer dem Falt nach entzwei geschnitten. Ich habe dann eine Hälfte wieder gefaltet, diese auch entzwei geschnitten. Und so noch einmal.»

«Warum bist Du nicht weitergefahren?»

«Weil es nicht mehr gegangen ist. Die Stücke sind zu klein geworden. Ich habe sie nicht mehr gut falten und nicht mehr aufschneiden können.»

Die Kameraden schweigen. Wahrscheinlich erwarten sie einen Kommentar von mir. Ich ergreife eines der zuletzt entstandenen Stücke und zeige es allen.

«Ob man da wirklich nicht weiterfahren könnte?»

Bald werden Vorschläge laut. Einer will zuerst in der Mitte einen feinen Strich zeichnen und dann, das Messer wie ein Papiermesser dem angelegten Lineal entlang führend, noch zweimal weiter trennen. Ein anderer denkt an die Schere.

«Also, führt das aus. Wer kommt mit diesem Spiel am weitesten? Bringt am Schluss auch etwas Ordnung in Eure Schnitzel.»

Eine Weile sind die Buben nun beschäftigt, und ich kann unterdessen mit einer andern Gruppe arbeiten.

Ich komme zurück. Sie sind teilweise noch am Ordnen. Nicht jeder legt seine Stücke und Stücklein gleich hin, aber bei allen ist der Gedanke «Es wird immer wie kleiner» erkennbar. Nicht alle haben gleich viele Schnitte ausführen können: Einer war nach einem weiteren Schnitt schon am Ende, die meisten blieben nach zweien stecken, zwei brachten drei zustande, einer gar vier. Einige kritisierten zwar seine kleinsten Stücke, da sehe man ja beinahe keinen Unterschied mehr, das sei ungenau.

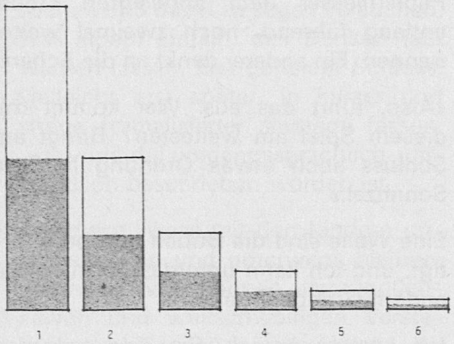
«Warum seid ihr nicht alle gleich weit gekommen?»

«Es hat nicht jeder genau geschnitten. – Es haben nicht alle mit dem gleichen Werkzeug gearbeitet. – Mit der Schere ist es besser gegangen als mit dem Messer. – Peter hat ein kleines Scherlein gebraucht, darum ist er am weitesten gekommen.»

«Könnte man nicht doch noch weiterfahren?»

«Nein, die Stücklein werden zu klein. Man kann ganz kleine Stücklein nicht mehr halbieren. – Das hört einmal auf, wenn nichts mehr da ist.»

Hier liessen wir das Nachdenken für diesmal stehen. Abschliessend stellten wir unsere Arbeit auf einem Blatt dar. Einige hatten bereits ein Muster gelegt. Wir ergänzten jedes Stück, indem wir dazu zeichneten, wie es vor dem Halbieren ausgesehen hatte. Einer meinte, das sehe wie eine Treppe aus, bei der die Tritte immer höher würden. Wir wollten auch aufschreiben, was unser «Bild» zeigte. Aus verschiedenen Vorschlägen gefiel allen «Kleiner immer kleiner» am besten. Besonderen Spass hatten sie an der Beschriftung der Treppenstufen. Einzelne fanden freilich, das sei ein «Gstürm», da kämen sie nicht mehr nach. – Schadet nichts, vielleicht «verstehen» sie später, dass uns neue Sprech- und Schreibweisen dieses «Gstürm» meistern helfen. (Problem: Handeln – Sprechen, Sprache – Zeichenbildung, Zeichen – Verstehen.)



1 ein Halbes
2 ein halbes Halbes
3 ein halbes halbes Halbes
4 die Hälfte von einem halben Halben die Hälfte von der Hälfte von einem Halben
5 die Hälfte von der Hälfte von einem Halben, von dem die Hälfte
6 die Hälfte von der Hälfte von einem halben Halben, von dem die Hälfte, dann von dem nochmals die Hälfte

Res schreibt dazu in sein Heft:

Kleiner immer kleiner

Wir halbierten ein Quadrat. Eine Hälfte halbierten wir. Eine Hälfte halbierten wir. So fuhren wir fort. Wir kommen zu ganz kleinen Teilchen, aber nie zu Null. Rechnen können wir viel weiter als schneiden.

Im Jahr darauf: Ein Teil der letztjährigen Gruppe fünftes/sechstes Schuljahr sind jetzt Siebentklässler und lernen anhand einfacher geometrischer Zeichnungs- und Konstruktionsaufgaben mit Dreieck, Flachlineal und Zirkel umgehen. Eines dieser Übungsthemen: «Strecken halbieren und Strecken beliebig einteilen». Bei den ersten Versuchen zum «Strecken halbieren» fällt uns das letztjährige Spiel mit dem fortgesetzten Falten und Zerschneiden ein. Mit Zirkel und fachmännisch gespitzten Zeichenstiften, mit diesen «haar»-genauen Werkzeugen, müssten wir jetzt doch einen Schritt weiter kommen. Zudem haben wir unterdessen neue Zeichen und neue Sprechweisen gelernt, womit wir jetzt einfacher sagen und zeigen können, was wir anfänglich umgangssprachlich-umständlich ausdrücken und darstellen mussten.

Wir halbieren also Strecken durch Schlagen von Kreisbogen. Wieder kommt uns die Lust an, dieses einfache Hantieren fortzusetzen: Die eine Hälfte der ursprünglichen Strecke wieder halbieren, und dann nochmals so, und nochmals, bis wir wieder an einer Grenze anlagen.

«Jetzt geht's nicht mehr?»

«Wirklich nicht?»

«Nein. Es hört einmal auf, wenn nämlich nichts mehr da ist. – Ja, wenn alles aufgebraucht ist.»

Wieder diese Begründung, fast wörtlich wie letztes Jahr: «. . . wenn alles aufgebraucht ist, ist nichts mehr da.» Die Kinder sehen: Immer kleiner werden die Stücklein, und sie schliessen, einmal wird nichts mehr da sein, alles aufgebraucht. Ich muss sie ein wenig zweifeln machen: «*Brauchen* wir denn alles *auf?* Brauchen wir *alles* auf, wenn wir immer von einem Halben wieder ein Halbes wegnehmen, den Rest dann wieder halbieren?»

Die Buben sind ratlos. Es geht doch einfach nicht mehr weiter. Mit dem Messer war es schon so, ein bisschen besser ging es mit der Schere. Nun mit dem Zirkel? Nein, einmal ist doch einfach nichts mehr da, das wir noch halbieren könnten. So mag es in ihren Köpfen umgehen.

Jetzt nehme ich unsere gelernte Bruchschreibweise zu Hilfe. Gleichzeitig zeigend, sprechend und schreibend leite ich ein:

«Wir haben eine Strecke.	Wir schreiben 1
Diese halbieren wir und schreiben die Hälften an.	Wir schreiben $^1/_2$
Eine dieser Hälften halbieren wir und schreiben diese neuen Teilstücke an.» Einer der Buben führt das aus.	Wir schreiben $^1/_4$
«Wie fahren wir weiter?» Ein anderer zeigt.	Wir schreiben $^1/_8$

«Jetzt versuchen wir das alles als Rechnung darzustellen. Wir schreiben und sprechen:

$1 : 2 = {}^1/_2$	«Ein Ganzes halbieren und die Teile anschreiben.»
$^1/_2 : 2 = {}^1/_4$ $^1/_4 : 2 = {}^1/_8$	«Ein Halbes halbieren; einen Teil bezeichnen.»
$^1/_8 : 2 = {}^1/_{16}$ $^1/_{16} : 2 = {}^1/_{32}$	Der Eifer steigert sich. Jeder will die nächste Operation aufschreiben.
$^1/_{32} : 2 = {}^1/_{64}$	«Könnten wir das auf unserer Zeichnung noch ausführen? Noch zeigen?»

Es herrscht Einigkeit: «Dort wären wir am Ende, schon lange.» «Und beim Rechnen? Kann einer weiterfahren?» Sogleich ist einer bereit.

$^1/_{64} : 2 = {}^1/_{128}$	Es raunt in der Gruppe: «Au, das ist schon
$^1/_{128} : 2 = {}^1/_{256}$	winzig klein, das könnte man nicht mehr sehen.»
$^1/_{256} : 2 = {}^1/_{512}$	Aber noch wollen sie weiterfahren.

Da platzt Fritz heraus: «Weiterfahren könnten wir noch lange. Das hört ja nie auf.»

Und Walter ergänzt sogleich: «Rechnen können wir viel weiter als zeichnen, eigentlich so weit wie wir wollen. Da kommen wir nie an ein Ende. Die Stücklein werden kleiner und kleiner, bis wir sie nicht mehr zeichnen können, aber rechnen, das geht weiter.»

Ich schliesse ab: Rechnen, denken können wir viel, viel weiter als zeichnen, als Handeln.»

Ob die Buben wirklich das entdeckt, begriffen haben, was ich ihnen mit meiner abschliessenden Weisheit hatte zusammenfassen und unterstreichen wollen? Ob sie sich später einmal dessen erinnern? Ob sie in Lebenssituationen gelangen werden, wo sie's brauchen können? Das ist alles wenig wahrscheinlich. Aber schön war es, für sie – und für mich. Ihre eifernde Unruhe, ihr Drängen und ihre wachen Augen zeigten es. Das war mir genug.

Jetzt, wo ich anhand meiner mehrere Jahre alten Aufzeichnungen die damaligen Situationen, Handlungen, Gespräche und Darstellungen rekonstruiert habe, stehe ich in der Versuchung, bereits an dieser Stelle mit schwerem kognitivem Geschütz aufzufahren, das ich unterdessen zu meinen damaligen Wagenschein-Rüstungen hinzu mir angeschafft habe. Ich will es lassen und statt dessen gleich ein nächstes Beispiel folgen lassen.

2. Beispiel: Strukturieren des Quadrates

Anregungen zu diesen Arbeiten hatte ich aus Wittenbergs Buch «Bildung und Mathematik» erhalten. Im Abschnitt «Erschliessung» (S. 72 bis 106) stellt er seine Vorstellungen über einen Zugang zur Mathematik dar, den er als einen «ungezwungenen Spaziergang in der Welt der geometrischen Phänomene» bezeichnet, auf dem die Schüler «in die Welt der geometrischen Figuren hineingelockt» werden sollen. Im hantierenden Umgang mit Material, hier Papier, und Zeichengeräte, Stifte, Lineal, Zirkel, lässt er seine Schüler, von ihm zurückhaltend angeleitet, eine Ahnung von der Vielfalt möglicher Figuren gewinnen. Gleichzeitig sollen sie diese Figuren *sehen* lernen. Damit meint er, Figuren in den Figuren wahrnehmen, mögliche Gesetzmässigkeiten bei der Aufgliederung erkennen, erkennen, dass solche Strukturierungen über eine Anfangsfigur hinaus fortgesetzt werden können. Das Quadratbeispiel ist ein Ausschnitt aus den von Wittenberg angeregten Versuchen, die ich damals mit meinen Fünft- und Sechstklässlern als erste Übungen im Umgang mit geometrischen Erscheinungen durch- und weiterführte.

Unser Arbeitsmaterial ist vorerst ein Blatt Papier (A4); später kommen Bleistift, Flachlineal und Farbstifte hinzu, zuletzt auch noch Zirkel.

Das erste Problem: Aus dem Blatt ein Quadrat herstellen, ohne Bleistift, Lineal und Schere zu gebrauchen. Vielleicht weiss ein Kind, wie man vorgehen muss. Es darf vorzeigen, die Kameraden machen nach. Andernfalls lasse ich die Schüler probieren, dabei einander helfen. Es könnte ja sein, dass jemand die Lösung entdeckt, mit einem Male hantierend sich wieder erinnert: «Ah, jetzt weiss ich wie.» Wenn innerhalb der gesetzten Frist niemand zu einer brauchbaren Lösung kommt, zeige ich vor und lasse nachmachen.

Zweite Aufgabe: Das Quadrat ohne weiteres Hilfsmittel möglichst regelmässig falten, mehrere Male und auf verschiedene Weise. Bedingungen: Das Quadrat wird nach jeder Faltung geöffnet; jede neue wird vom ursprünglichen Quadrat aus vorgenommen. Die Falze zwischen Daumen und Zeigefinger kräftig ausziehen.

Was sich den Kindern sogleich aufzudrängen scheint:

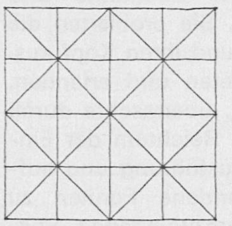
«Über die Ecken falten» (den Diagonalen entlang. Der Begriff «Diagonale» kann hier unvermerkt eingeschmuggelt werden, indem ich ihn zu brauchen anfange und die Schüler ihn allmählich übernehmen).

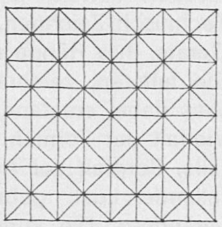
«Halbieren» (entlang den Mittellinien. Auch hier schleicht sich der Gebrauch des Begriffes «Mittellinien» nach und nach ein).

Damit glauben einige, die Aufgabe gelöst zu haben. Sie warten. Einzelne sonnen sich ein wenig mit ihrer Flinkheit. Andere sind noch von der Sache eingenommen. Für die Wartenden ein Anstoss: «Probiert weiterzufahren. Wir sind mit der Arbeit noch nicht am Ende».

Probieren. Zögern. Links und rechts abgucken. (Was nicht verboten ist. Zuschauen und nachmachen sind alltägliche und nicht unbedingt anspruchslose Lernvorgänge, von der Schule zu Unrecht in Verruf gebracht.) Allmählich kommt die Arbeit wieder bei allen in Gang. Da und dort muss zu genauem Falten gemahnt werden.

Nach einer Weile brechen wir ab. Nicht alle sind gleich weit gekommen. Wir legen das Quadrat offen vor uns.

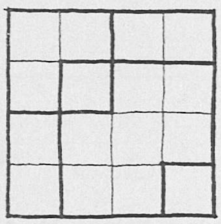




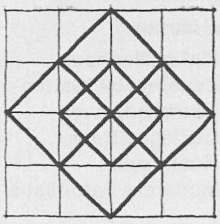
Wir zeigen und erklären einander, wie wir zu neuen Faltspuren gelangt sind.

Damit diese noch deutlicher hervortreten, ziehen wir sie mit Blei- oder Farbstift aus. Das Lineal darf gebraucht werden.

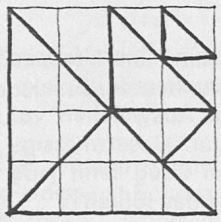
Die Faltspuren grenzen vielerlei Figuren, Teilflächen ab. Wir übertragen Beispiele auf die Wandtafel und beschriften sie.



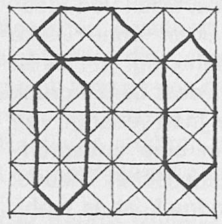
Verschieden grosse Quadrate



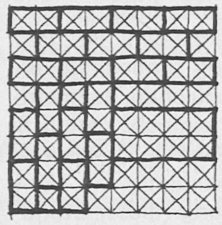
Verschieden grosse Quadrate, «auf der Spitze stehend»



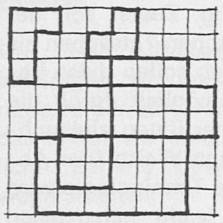
Verschieden grosse Dreiecke, «stehende», «liegende», «hängende», «nach links/rechts zeigende»



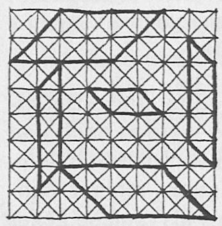
«Schiffe von oben»



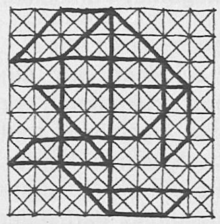
Liegende und stehende «Vierecke» «Ziegelstein-Muster» Grosse und kleine «Vierecke», halbe und ganze



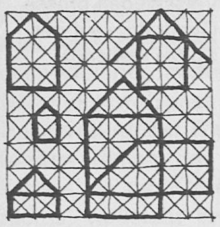
«Winkel», grosse, mittlere und kleine, lange und kurze



«Schräge» Vierecke



«Hausdächer» «Schiffe von der Seite gesehen»



«Häuser»
Einfamilienhaus, Bauernhaus, Gartenhäuschen, zweistöckiges Haus, Hochhaus, modernes Betonhaus

«Das soll Geometrie sein? Ins Uferlose und Ungenaue auswuchernde Spielereien. Zeitvergeudung. Ausweichen vor der Präzision von Figur, Gesetzmässigkeit und Begriff. Dem Zeug fehlt jede Systematik. Wohin soll das führen?»

Wittenberg: «Es ist weder von Axiomen und Beweisen die Rede, noch von idealen Figuren, von Punkten ohne Dicke und Linien ohne Ausdehnung. . . . Es ist unbedingt zu verhüten, dass der Eindruck beim Schüler entstehe, man verlange von ihm das Eindringen in eine unbegreifliche, fremdartige, esoterische Theorie. Dieser anfängliche Eindruck ist es wohl, der heute bei so vielen Schülern von allem Anfang an den Weg zu echtem mathematischem Verständnis verrammelt. Um das zu vermeiden, ist ganz besonders am Anfang unbedingt erforderlich, dass der Schüler die geometrischen Einsichten als einfach, natürlich, klar durchschaubar erfahre, nicht als weit hergeholt, seltsam, fremdartig. . . . Eine unmittelbare Anwendung (dieser Grundsätze) ist, dass der Lehrer äusserst geizig mit Fachausdrücken sein wird – ganz besonders am Anfang. Zuerst soll der Schüler die geometrischen Tatsachen als solche erkennen. *Dann* sollen diese benannt werden – womöglich durch die Schüler selber, in einer ihnen einleuchtenden, zweckmässigen Weise (der Anschluss an die übliche Terminologie wird später immer noch leicht herzustellen sein). Man verschone den Anfänger mit ‚Lehrsätzen', ‚Definitionen', ‚Axiomen', ‚Kongruenzen' und dergleichen mehr.» (a. a. O. S. 72, 79, 80)

Immerhin, einige Begriffe und «Definitionen» entstehen und werden nach und nach gebraucht, auch von den Schülern: Quadrat, Rechteck, Trapez, rechter Winkel (vorläufig noch naiv als «solche Ecke» erkannt und gezeigt), Mittelpunkt, Mittellinien, Diagonalen, diagonal, Parallelen, parallel.

Als nächste Arbeit zeichnen wir ein Quadrat, und zeichnend strukturieren wir es. Wir verwenden nun Flachlineal und Zirkel. Dabei entdecken einige Kinder, dass man Kreise in und um die Quadrate ziehen kann. Zum Abschluss darf jeder Schüler sein strukturiertes Quadrat ganz frei farbig anlegen. Einzige Bedingung: Jedes soll ein eigenes «Bild» entstehen lassen.

Damals kam es mir nicht in den Sinn, trotz der Anregung, die auch Wittenberg macht, Parallelen zur modernen Malerei anklingen zu lassen. Jetzt würde ich anschliessend an diese Arbeiten, zum Teil sie begleitend, im Schulzimmer eine kleine Sammlung moderner Malerei ausstellen, voran vielleicht Richard P. Lohse, Max Bill, dann aber auch Paul Klee, weiter Kandinsky, Mondrian, Vasarély. Ob die Kinder auf diese Weise etwas Neues darüber angeregt bekommen, dass geometrische Erscheinungen das Wahrnehmen, das Sehen und das Gestalten zu bereichern vermögen? Heute würde ich ihnen erzählen und wenn möglich Bilder zeigen von Paul Klees «pädagogischem Werk», in dem er eine immense Fülle von Versuchen mit geometrischen Erscheinungen hinterlassen hat.

Es war eindrücklich, mit welcher Hingabe und Freude jene Kinder (zehn- bis zwölfjährige) bei Arbeiten der geschilderten Art verweilten. Das «Technische», «Genaue», aber auch das Einfache und Überschaubare, das in diesen geometrischen Figuren steckt, fesselte sie. Das handwerklich-hantierende Arbeiten schien sie zu entspannen. Mit sichtlichem Wohlbehagen tummelten sie sich in diesem Vorfeld von Geometrie und Technisch-Zeichnen. Sie probierten die Geräte, ihre Hände und ihren Kopf aus. Sie falteten, zeichneten und erfanden. Was dabei entstand, überraschte durch Vielfalt der Formen, Reichtum der Einfälle, Sorgfalt der Ausführung und auffallende Lust, gefundene Formen zu verändern. Die «ungezwungenen Spaziergänge in die Welt der geometrischen Phänomene» nahmen sie ein. Und wenn ich jetzt, zehn Jahre nach jenen Versuchen, damals entstandene Arbeiten und Notizen wieder vor Augen habe, dann kommt mir aus diesem Material immer noch etwas von der damaligen Schulstubenluft entgegen. Wieder spüre ich etwas von der Freude, die einem als Lehrer zuteil werden kann, wenn man mit Kindern Lernpfade zu suchen anfängt, die nicht bereits durch Lehrmittel vorgespurt und durch alljährliche Wiederholungen breitgetreten sind.

3. Beispiel: Den Umfang von Rechteck und Quadrat berechnen

Nach der üblichen Pensenverteilung wurden diese Probleme im siebenten Schuljahr behandelt. Die Art der Einführung und der Grad der Formalisierung waren dem Lehrer überlassen. Im Lehrmittel tauchten unvermittelt entsprechende Berechnungsaufgaben auf. Weitere Hinweise fehlten auch im Lehrerbuch. Möglich war somit selbst eine Einführung nach dem Verfahren Nürnberger-Trichter:

«Hersehen. Nr. 384. Man berechnet den Umfang des Quadrates $U = 4 \cdot s$. Das Quadrat hat ja vier gleiche Seiten. Bei Nr. 391, Berechnung des Umfangs des Rechtecks, zählt man Länge und Breite zusammen und rechnet das Resultat mal zwei, also $U = (l + b) \cdot 2$. Tragt diese beiden Formeln ins Merkheft ein.»

Es sei hier nicht diskutiert, wie weit diese Karikatur Unterricht verzerrt wiedergibt, wie weit sie gleichzeitig krankhafte Formen verdeutlicht, welche als solche in der Regel nicht wahrgenommen werden, weil darin allgemeine Erwartungen der Öffentlichkeit gegenüber der Schule in guten Treuen und stillschweigend als berechtigt anerkannt sind.

Die allgemeinen Fragen, welche mich zu diesen Arbeiten bewogen, habe ich in den beiden einleitenden Abschnitten bereits dargestellt. Im Zusammenhang mit dem Thema «Berechnen des Umfangs bei Quadrat und Rechteck» ging es mir zur Hauptsache um zwei Anliegen:

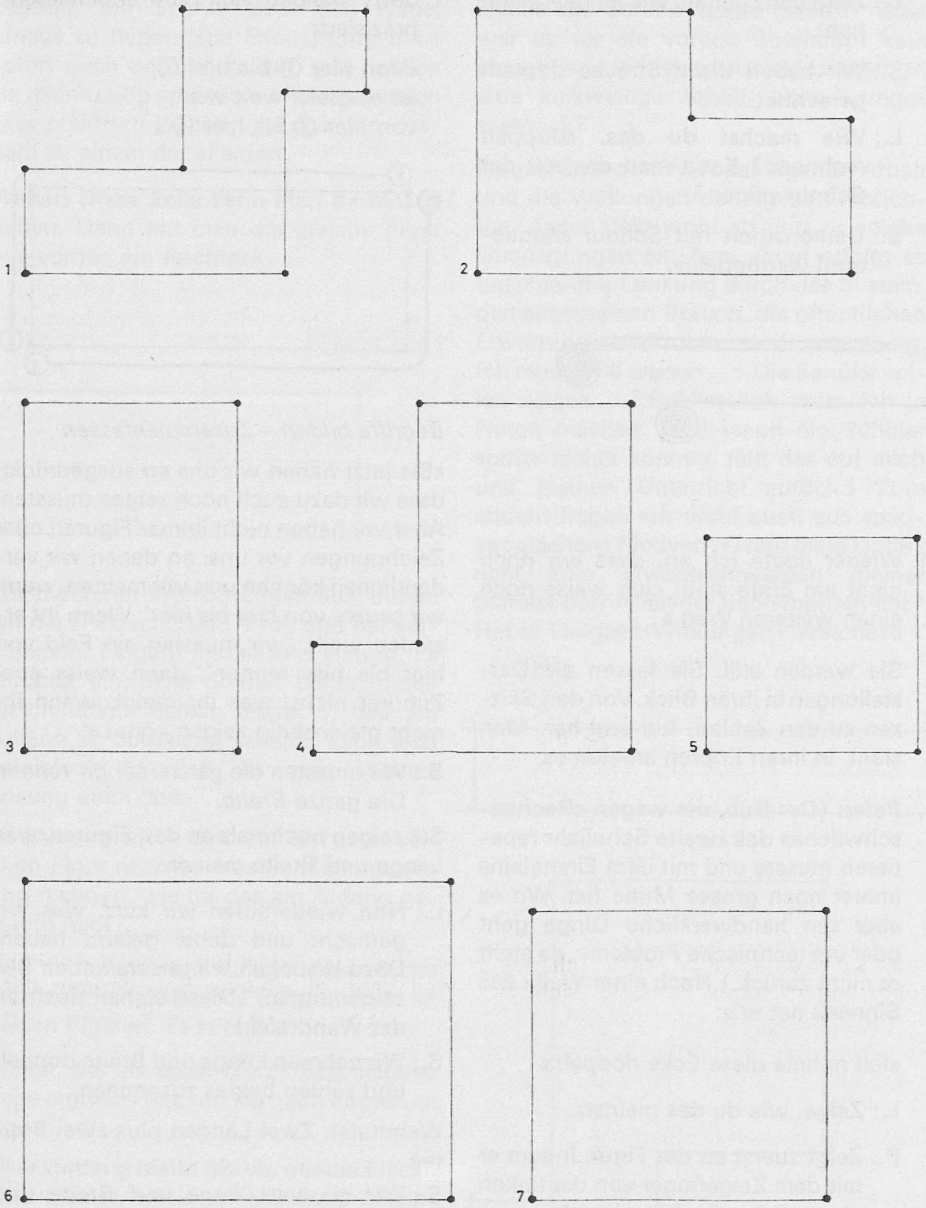
- Ist es möglich, elf- bis zwölfjährigen Schülern das Umfangproblem mit seinen Elementen und Zusammenhängen verstehbar zu machen?
- Können sie den Umfang berechnen lernen? Welche Lösungswege finden sie?

Anhand der damals aufgezeichneten Notizen und Skizzen rekonstruiere ich den Arbeitsverlauf.

Problemstellung

1. Lehrervorbereitung: Mit kleinen Nägeln an den Holzwänden der Schulstube die Ecken von «Feldern» markieren. Schnur bereithalten. Siehe nebenan

Die Proportionen der hier skizzierten «Felder» stimmen nicht mit den an den Wänden markierten überein. Sie zeigen einzig das Prinzip der Ausgangssituation.



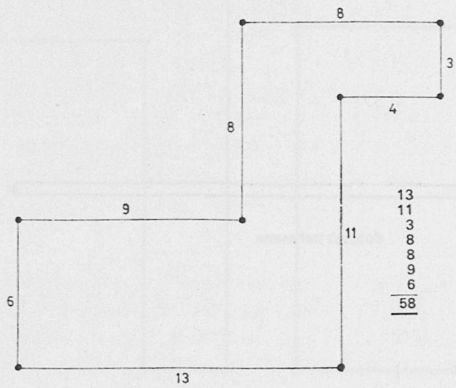
Ich mischte absichtlich einfache und komplizierte Figuren. Das Wechseln zwischen unterschiedlich komplexen Aufgaben soll einerseits verhindern, dass einzelnen Schülern die Sache zu leicht vorkommt. Anderseits soll es mithelfen, in allen «Feldern» enthaltene Elemente sowie Fingerzeige auf Lösungswege zu erkennen.

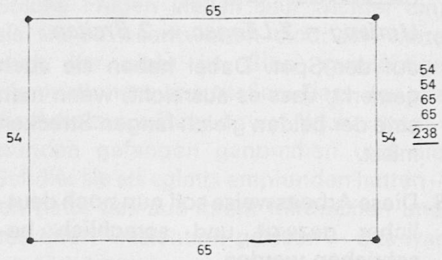
2. Schülerarbeit: Die markierten «Felder» mit Schnur umspannen. Die neun Schüler der Mittelstufe organisieren sich für die weitere Arbeit selber. Partnerarbeit. Gegenseitiges Helfen. Reihenfolge der Arbeit beliebig.

3. Aufgabe: Wieviel Schnur war bei jedem «Feld» nötig. Die Knoten zum Befestigen der Schnur werden nicht berücksichtigt.

Erste Ergebnisse

Die Schüler skizzieren die «Felder» ins Arbeitsheft. In die Skizzen tragen sie die ausgemessenen Masse ein. Einzelne setzen die Zahlen geordnet daneben. Sie zählen die Messergebnisse zusammen. Zwei Beispiele:





Einzelne Schüler schlagen vor, die Schnur abzulösen und ihre Gesamtlänge zu messen.

Das vorangegangene Umspannen der «Felder» mit Schnur und das absichtliche Mischen unterschiedlich schwieriger Aufgaben scheinen die Schüler entsprechend meinen Erwartungen in ihrem Vorgehen gesteuert zu haben. Die Einsicht, dass die ganze Schnur (Strecke), gleich lang ist wie die Summe der einzelnen Schnurteile (Teilstrecken), ist im Hantieren erfahren und die rechnerische Lösung dadurch nahegelegt worden.

Der Begriff Umfang ist bis jetzt von mir bewusst vermieden worden. Noch hat ihn auch kein Schüler gebraucht, obwohl anzunehmen ist, dass ihnen das Wort umgangssprachlich vertraut ist.

Neue Problemstellung – Durcharbeiten

Klassenarbeit: Wir zeigen uns, was wir bis jetzt gemacht haben. Dann überlegen wir, ob wir auch noch anders vorgehen könnten.

Um diese Arbeitsphase vorzubereiten, bereinigen wir vorerst die Messergebnisse zu den Rechtecken und Quadraten, das heisst wir einigen uns auf einheitliche Zahlen, bevor wir gemeinsam weiterarbeiten.

1. Schüler berichten über ihr bisheriges Vorgehen.
   «Feld» 1: «Ich zähle diese und diese und diese und diese . . . Seite zusammen.» Sie zeigen an den Schnurmodellen, was sie mit «diese» meinen.
   «Feld» 2, 4: Ebenso.

2. Bei «Feld» 3 und 6 sieht man aus der Art, wie sie die Messergebnisse an der Wandtafel darstellen, dass sie bereits geordnet haben, das heisst gleiche Werte zusammengenommen:

30	54
30	54
75	65
75	65
210	238

Sie sind der Form

Umfang = 2 Längen + 2 Breiten

auf der Spur. Dabei haben sie auch gemerkt, dass es ausreicht, wenn man eine der beiden gleich langen Strecken misst.

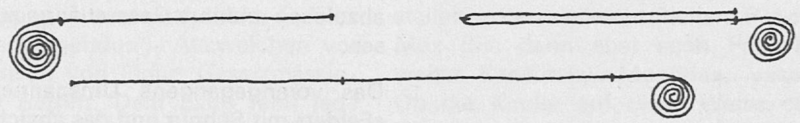
3. Diese Arbeitsweise soll nun noch deutlicher gezeigt und sprachlich beschrieben werden.

L.: Zeigt ganz genau, wie ihr gearbeitet habt.

S.: Wir haben diese Strecke doppelt gerechnet.

L.: Wie machst du das, «doppelt rechnen»? Kann man das mit der Schnur zeigen?

S.: Demonstriert mit Schnur «hantierend verdoppeln».

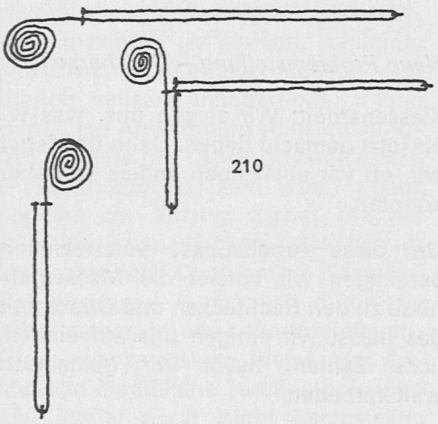


S.: Wir schreiben die gleichen Zahlen zweimal und zählen zusammen («addierend verdoppeln»).

S.: Wir rechnen zweimal die gleiche Zahl («multiplizierend verdoppeln»).

An der Wandtafel entsteht folgende Darstellung, während die Kinder zeigend erklären.

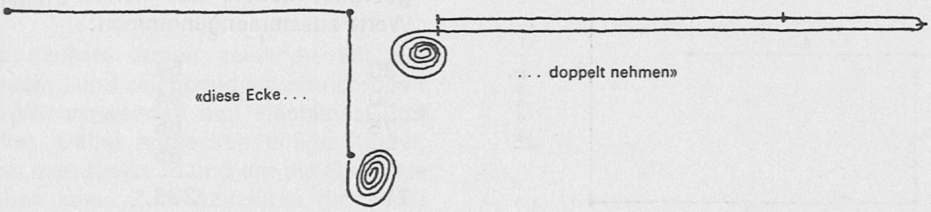
hantierend gemessen



gerechnet

addierend		multiplizierend	
75	150		
75			
30	60	2·75	150
30		2·30	60
210	210		210

P.:



4. Wieder deute ich an, dass wir noch nicht am Ende sind: «Ich weiss noch einen weiteren Weg.»

Sie werden still. Sie fassen die Darstellungen in ihren Blick. Von den Skizzen zu den Zahlen, hin und her. Man sieht, in ihren Köpfen arbeitet es.

Peter: (Der Bub, der wegen «Rechenschwäche» das zweite Schuljahr repetieren musste und mit dem Einmaleins immer noch grosse Mühe hat. Wo es aber um handwerkliche Dinge geht oder um technische Probleme, da steht er nicht zurück.) Nach einer Weile des Sinnens hat er's:

«Ich nehme diese Ecke doppelt.»

L.: Zeige, wie du das meinst.

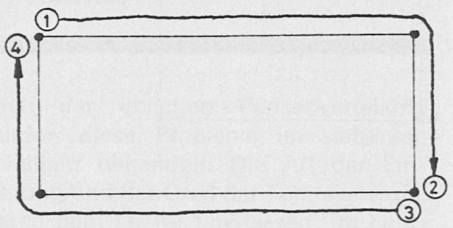
P.: Zeigt zuerst an der Figur, indem er mit dem Zeigefinger von der linken obern Ecke der Länge entlang zur rechten oberen Ecke fährt und von hier senkrecht hinunter zur rechten unteren Ecke.

«Das nehme ich doppelt.»

L.: Zeige das noch ganz genau mit der Schnur.

Jetzt meldet sich ein anderer und präzisiert:

«Von hier ① bis hier ②
ist es gleichweit wie
von hier ③ bis hier ④.»



Begriffe bilden – Zusammenfassen

«Bis jetzt haben wir uns so ausgedrückt, dass wir dazu auch noch zeigen mussten. Aber wir haben nicht immer Figuren oder Zeichnungen vor uns, an denen wir verdeutlichen können was wir meinen, wenn wir sagen ‚von hier bis hier'. Wenn ihr erzählen wollt, 'wir mussten ein Feld von hier bis hier rennen', dann weiss euer Zuhörer nicht, was ihr meint, wenn ihr nicht gleichzeitig zeigen könnt.»

S.: Wir mussten die ganze *Länge* rennen Die ganze *Breite*.

Sie zeigen nochmals an den Figuren, was Länge und Breite meinen.

L.: Nun wiederholen wir kurz, was wir gemacht und dabei gelernt haben. Dazu brauchen wir unsere neuen Bezeichnungen. (Diese stehen noch an der Wandtafel.)

S.: Wir nehmen Länge und Breite doppelt und zählen beides zusammen.

Wandtafel: Zwei Längen plus zwei Breiten.

S.: Wir messen Länge und Breite und zählen diese Strecken zusammen. Das Resultat verdoppeln wir.

Wandtafel: Länge plus Breite zweimal.

Wir wenden uns noch dem Quadrat zu. Es bereitet keine Mühe.

S.: Es sind vier gleich lange Strecken. Wir rechnen diese viermal.

Damit könnten wir die Arbeit abschliessen, wenn da nicht noch die Felder mit den «Winkeln» wären. Mit diesen Knorren nehmen wir es nun noch auf.

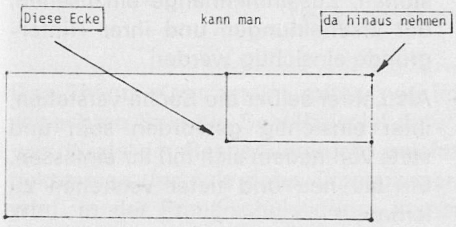
Anwenden

L.: Die «Felder» 2 und 4 geben uns noch eine letzte Knacknuss auf. Sogleich weist ein Schüler auf «Feld» 1 hin. Dort sei «das Gleiche» zweimal drin.

Schweigen. Angespanntes Hinsehen.

Dann ergreift unvermittelt ein Fünftklässler – guter Rechner, gute praktische Intelligenz – die hineingeschlagene Ecke. Er beginnt, die Schnur über den Nagel hinaus zu heben. Die Erleuchtung blitzt sofort auch bei andern auf. Alle wollen sie gleichzeitig sprechen. Mehrere wollen «es» praktisch zeigen und drängen deshalb zu einem der «Felder».

Walter: Diese Ecke kann man da hinaus heben. Dann hat man die gleiche Figur wie vorher, ein Rechteck.



Wir probieren Walters Einfall aus, indem wir die «Felder» 2 und 4 hin und her verwandeln. Es geht immer und stimmt. Es leuchtet ein: «Die Schnur bleibt immer gleich lang.» Selbst «Feld» 1, das am Anfang so schwierig aussah, kann jetzt vereinfacht werden. Es geht Walters Lösung auch dort.

L.: Müssen wir in dem Fall bei einer solchen Figur noch so umständlich messen und rechnen, wie ihr das am Anfang gemacht habt?

Wir demonstrieren «Länge plus Breite zweimal» mit Hilfe der Schnur auch an diesen Figuren. Es stimmt.

Walter, der als erster die eingeschlagene Ecke ergriffen hat, um sie nach aussen zu legen:

«Der Umfang bleibt gleich, nur die Fläche wird kleiner, wenn wir die Ecke hineinlegen.»

Der Begriff Umfang ist bisher nie gebraucht worden. Jetzt ist er unvermittelt da, tritt in der Situation aus dem passiven Sprachschatz heraus und wird gehandhabt, als wäre man immer mit ihm umgegangen. Und gleich wird er von diesem Tüfteler auch zur Fläche in Beziehung gesetzt. (Mit dem Thema «Flächen» hatten wir uns in Arbeiten auseinandergesetzt, die dem Thema «Umfang berechnen» vorausgegangen waren.)

Erprobung – Bewährung?

Haben die Schüler bei den dargestellten Arbeiten etwas gelernt? Was? Wie gut? Wie nachhaltig?

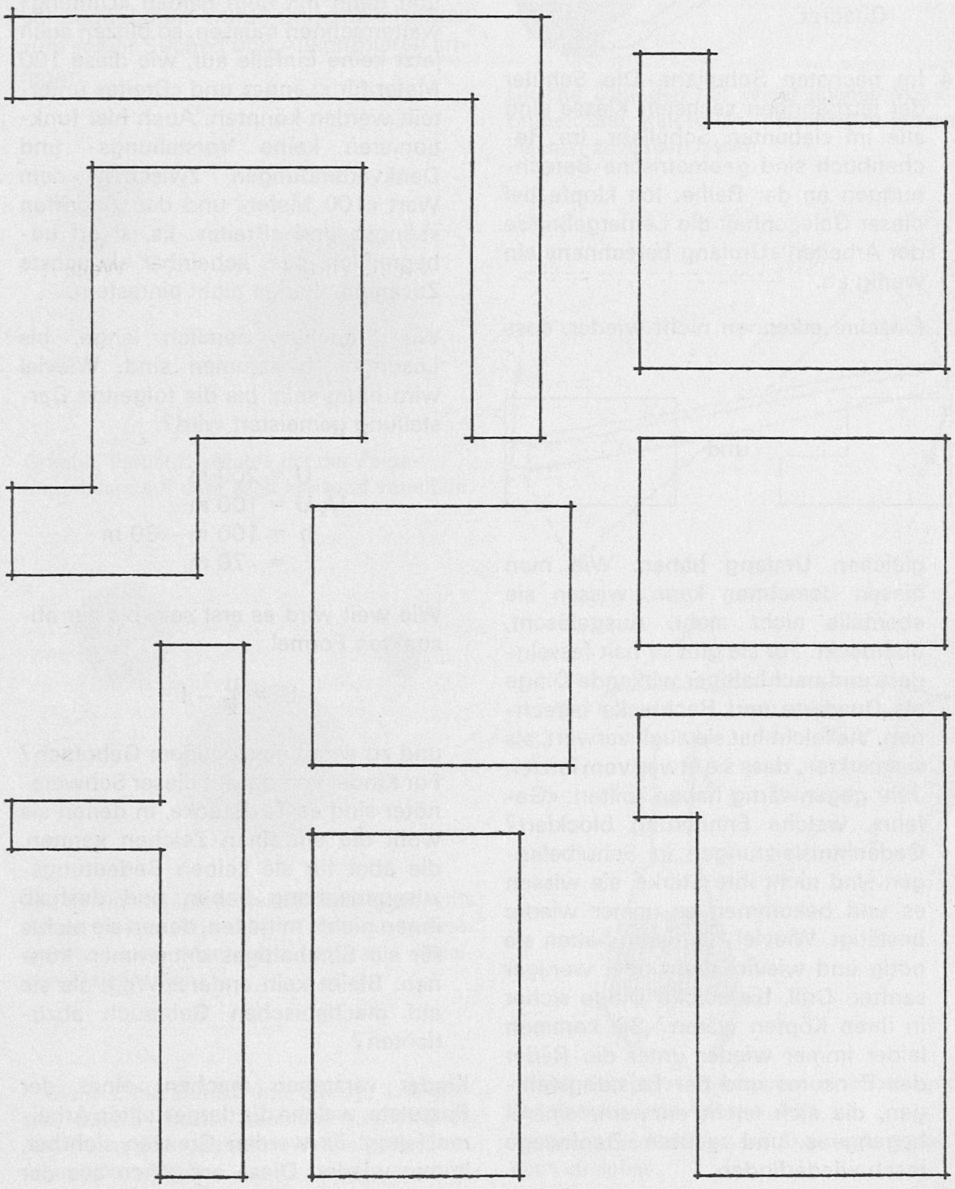
Hat dieser «Spaziergang» entsprechend der ihm zugrunde liegenden «Theorie» gewirkt? Hat er bei allen Schülern Gleiches oder doch Ähnliches ausgelöst?

Haben die Schüler gerne gelernt? Oder war es für sie vorerst überhaupt kein Lernen, sondern eben ein «Spaziergang», eine kurzweilige Arbeit, ohne Lerngeschmack?

Fragen über den Wert der eigenen Arbeit und die Wirkungen der eigenen Absichten. Jeder stellt wohl ab und zu solche Überlegungen an. Zum einen erfolgt es unter sanfter Lenkung durch das System, den allgemeinen Brauch, die öffentlichen Erwartungen: «Proben sind notwendig. Ich muss/will wissen . . . Die Schüler sollen zeigen . . . Schliesslich muss ich ja Noten machen. Und wenn die Schüler später nichts können, fällt das auf mich und meinen Unterricht zurück.» Zum andern fragen wir wohl auch aus «pädagogischen» Motiven: «Trägt mein Unterricht zum Erwachsenwerden meiner Schüler bei? Auch der Rechenunterricht? Hat er Langzeit-Wirkungen? Welche?»

Solche Fragen stellen sich leichter ein, als sie zu beantworten sind. Ich hatte auch gar nicht im Sinn, gewichtige «Evaluationen» anzustellen. Dass uns alle die Arbeiten während zwei Nachmittagsstunden gefangen genommen und die Schüler sie als «glatt» empfunden hatten – ich hatte das aus ihrem Mitmachen und aus ihren Gesichtern gelesen – das war mir fürs erste genug. Wenn ich an einem nächsten derartigen Nachmittag die zwei folgenden Teilarbeiten auch noch anschloss, ging es mir in erster Linie ums Üben unter leicht veränderten Situationen und weniger um Erfolgskontrollen.

1. Messt die folgenden «Felder» aus und berechnet deren Umfang. Schreibt die Messergebnisse zu den Skizzen, die Berechnungen und das Resultat ins entsprechende «Feld».



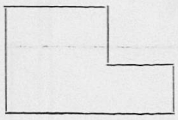
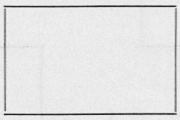
2. Zeichnet selber solche Aufgaben und tauscht sie zum Lösen untereinander aus.

3. Füllt die folgende Tabelle aus. Die Zahlen sind so gewählt, dass jede Aufgabe im Kopf gerechnet werden kann.

Länge	Breite	Umfang
80	40	
55	55	
17	8	
25 Quadrat		
38	27	
26	19	
40		100
25		90
	30	200
Quadrat		120
24		80
	11	60
28		90
	12	60
	25	110
Quadrat		140

4. Im nächsten Schuljahr. Die Schüler der letztjährigen sechsten Klasse sind alle im siebenten Schuljahr. Im Rechenbuch sind geometrische Berechnungen an der Reihe. Ich klopfe bei dieser Gelegenheit die Lernergebnisse der Arbeiten «Umfang berechnen» ein wenig ab.

Einzelne erkennen nicht wieder, dass

 und 

gleichen Umfang haben. Wie man diesen berechnen kann, wissen sie ebenfalls nicht mehr. Ausgelöscht, überdeckt. Für sie gibt es halt fesselndere und nachhaltiger wirkende Dinge als Quadrate und Rechtecke berechnen. Vielleicht hat sie auch verwirrt, als sie merkten, dass sie etwas vom letzten Jahr gegenwärtig haben sollten: «Gefahr», welche Erinnerung blockiert? Gedächtnisleistungen in Schulbelangen sind nicht ihre Stärke, sie wissen es und bekommen es immer wieder bestätigt. Wieviel Hantieren hätten sie nötig und wieviel mehr oder weniger sanften Drill, bis solche Dinge sicher in ihren Köpfen wären? Sie kommen leider immer wieder unter die Räder des Pensums und der Leistungsfähigen, die sich leicht erinnern, einmal begangene und geübte Denkwege rasch wiederfinden.

Ich probiere noch ein wenig weiter: Wir haben 200 Meter Draht zur Verfügung. Berechnet Zäune, die damit erstellt werden könnten. Es soll aller Draht aufgebraucht werden.

Auch damit stosse ich bei den meisten an. «Rechnen, berechnen, da sind wir doch schwach. Wir wissen es, und er weiss es auch. Warum sollen wir trotzdem berechnen?» Es braucht helfende Rückgriffe auf die Arbeiten des letzten Jahres, bis wir wieder gegenwärtig haben, dass wir zuerst den Umfang halbieren müssen. Aber eben, «zweihundert Meter Draht» und «Umfang», die sind offenbar in den Köpfen dieser Lerner nicht aufeinander bezogen, «strukturell unverbunden». Die Handlungs-, Denk- und Sprechspuren müssen erst wieder aufgebaut, zum mindesten aktiviert werden, welche diese Verbindungen sicherstellen. Ist einmal wieder gegenwärtig, dass wir zuerst die 200 Meter in Gedanken halbieren und dann mit dem halben «Umfang» weiterrechnen müssen, so blitzen auch jetzt keine Einfälle auf, wie diese 100 Meter für «Länge» und «Breite» unterteilt werden könnten. Auch hier funktionieren keine Vorstellungs- und Denkverbindungen zwischen dem Wert «100 Meter» und den Begriffen «Länge» und «Breite». Es ist oft unbegreiflich, dass scheinbar einfachste Zusammenhänge nicht einrastern.

Wir brauchen ziemlich lange, bis Lösungen beisammen sind. Wieviel wird nötig sein, bis die folgende Darstellung gemeistert wird?

$$\begin{aligned} U &= 200 \text{ m} \\ {}^{1}/_{2}\,U &= 100 \text{ m} \\ b &= 100 \text{ m} - 30 \text{ m} \\ &= 70 \text{ m} \end{aligned}$$

Wie weit wird es erst sein bis zur abstrakten Formel

$$b = \frac{U}{2} - l$$

und zu deren einsichtigem Gebrauch? Für Kinder von der Art dieser Schwerenöter sind es Textstücke, in denen sie wohl die einzelnen Zeichen kennen, die aber für sie keinen Bedeutungszusammenhang haben und deshalb ihnen nichts mitteilen, denen sie nichts für sie Sinnhaltiges entnehmen können. Bleibt kein anderer Weg, als sie auf mechanischen Gebrauch abzurichten?

Kinder verstehen machen: eines der Postulate, welche die dargestellten Arbeiren leiten. Es werden Grenzen sichtbar, immer wieder. Diese entstehen aus der Sache, durch uns Lehrer und die Kinder selber. Verstehen ist ein Ereignis. Es wird möglich in je besonderer Situation. Am einzelnen Kind und seinen Lebens- und Lerndaten kommen wir nicht vorbei. Wo es anders zu sein scheint, täuschen wir uns aufgrund unserer Wünsche.

Mit Kindern sich auf den Weg machen zum Verstehen umfasst drei Aspekte:

- Kindern helfen, eine Sache zu verstehen, Zusammenhänge einzusehen, der Erscheinungen und ihrer Hintergründe einsichtig werden.
- Als Lehrer selber die Sache verstehen, ihrer einsichtig geworden sein und stets von neuem sich mit ihr einlassen, um sie neu und tiefer verstehen zu lernen.
- Selber gelernt haben und immer tiefer zu verstehen bereit sein, wie Kinder zum Verstehen gelangen. Den Abstand verstehen zwischen dem Verstehen der Kinder und dem der Erwachsenen. Verstehen, was gegenüber Kindern an Hilfen notwendig und möglich ist.

Verstehen ist ein Menschenrecht.

(Wagenschein)

Während der letzten Arbeiten an den Texten dieses Heftes ist in der Schweizerischen Lehrerzeitung ein Aufsatz von Paul Neidhart, Basel erschienen: Ein Experiment zur Apperzeption des Begriffs «Flächeninhalt» (SLZ 11, 15. März 1979, S. 427–429). Paul Neidharts Versuch führt das Thema «Umfang» weiter und verdeutlicht das Flächenproblem, das ich in den «Arbeiten am Kreis» im nächsten Beispiel ebenfalls angehe, am Thema «Flächenmasse». Im Kommentar zu den Ergebnissen seiner Versuche hält er einen Gedanken fest, der ein Motiv auch dieser Arbeiten ist und damit zeigt, dass das Problem offenbar weiterbesteht. Man müsse sich fragen, folgert Neidhart, «ob der Begriff ‚Flächeninhalt' vom Elfjährigen noch gar nicht wirklich erfasst werden kann oder ob generell Unterricht nach einer viel zu kurzen einführenden Anschauungsphase allzu rasch bei einem Algorithmus lande und die Kinder in ihrem Irrglauben bestärke, sie hätten etwas verstanden, wenn sie den Algorithmus beherrschten».

Irrglaube der Kinder? Ist es nicht auch ein Irrglaube von uns Lehrern, von der Öffentlichkeit ganz allgemein?

Somit das Grundproblem: Mit dem Können das Verstehen bewahren. Wie kommt man dazu gegen den Irrglauben von uns allen?

4. Beispiel: Arbeiten am Kreis

«Erst erfahre es, dann sage es beteiligt, schliesslich fasse es nüchtern.»

(Wagenschein)

Das Thema Kreis ist im guten wie im schlechten Sinn ein Schulbeispiel dafür, was Kinder im Rechenunterricht gelehrt bekommen und wie dabei vorgegangen wird. In der Primarschule dürfte immer noch die Berechnung von Umfang und Kreisfläche im Vordergrund stehen, das heisst wissen und gebrauchen können der Formeln $U = d \cdot \pi$ und $F = r^2 \cdot \pi$. Denn mindestens so viel – oder so wenig? – müssen die Schüler in den noch folgenden Schulsituationen verfügbar haben. Somit beschränkt man sich im Unterricht darauf, diese Formeln einzuführen; vielleicht versucht der Lehrer sie zu entwickeln, zu erarbeiten. Jedenfalls leiten Lehrmittel ihn in dieser Richtung. Beobachtungen in Klassen und Gespräche mit jungen Kollegen zeigen, dass dies in der Regel recht summarisch vor sich geht. Ein Sinn in ausgedehnt hantierendem Umgang mit Kreiserscheinungen wird nicht gesehen. «Dazu haben wir keine Zeit.» Entsprechende Einführungsarbeiten bleiben deshalb auf die allernotwendigste Lehrerdemonstration beschränkt. Dabei haben die Schüler in der Rolle mehr oder weniger stummer Zuschauer im allgemeinen längst auf das zu warten gelernt, was am Ende als zu lernende Formel an der Tafel stehen und ins Heft zu schreiben sein wird.

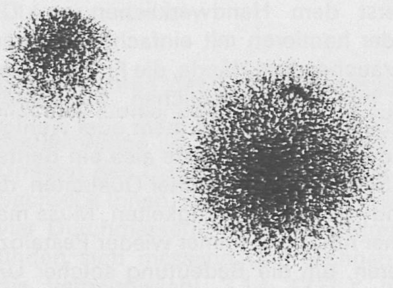
Andererseits ist der Kreis ein Schulbeispiel für mögliche Arbeiten, die mit den Stichworten «offen geführter Unterricht», «probierendes und entdeckendes Lernen», «mit Kindern unterwegs sein» gekennzeichnet werden können. Er könnte ein Beispiel dafür sein, dass Lernen sich nicht einzig auf End-Ergebnisse, auf feststehende Lerngegenstände – hier Berechnungsformeln und deren Gebrauch – auszurichten bräuchte. In langfristig angelegtem und auf fortgeschritteneren Stufen immer wieder aufgenommenem Umgang mit Erscheinungen dieses einen Themas könnten die Kinder sich mit diesem einlassen, Zusammenhänge entdecken, die Ergebnisse sprachlich darstellen lernen, dies allmählich abkürzen, bis schliesslich die knappste sprachliche Form, die Formel daraus hervorgeht und einleuchtet. Und das von früh an, nicht erst in jenen Schuljahren, denen der gültige Lehrplan das Thema Kreis zuschreibt.

Die Asphaltplätze und die zementierten Lernwege der Lehrpläne und der Lehrmittel aufbrechen. Anregungen in dieser Richtung enthält das Heft «Lebendiges Denken durch Geometrie», Schulpraxis 1/2 Januar/Februar 1970, darin vor allem Ernst Bühlers Beitrag «Freihandgeometrie». Die im folgenden skizzierten Arbeiten ergänzen Ernst Bühlers Anregungen. Sie stehen im Zusammenhang mit dem Thema «Fläche und Umfang» und dienen der Vorstellungs- und Begriffsbildung.*

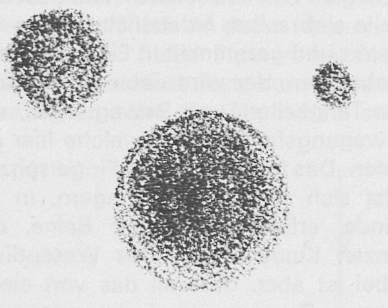
Kreise: Fläche, Umfang

Aufgabe: Kreisflächen anlegen.

Die Kinder möglichst viele Techniken erfinden lassen. Lösungen nicht vorzeigend vorwegnehmen. Durch «minimale Hilfen» zum selber Suchen und Ausprobieren anregen.

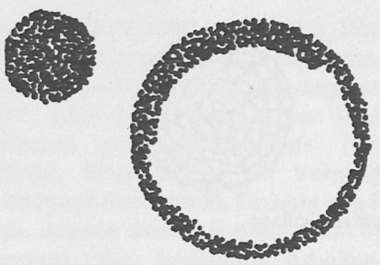


Graphit, Farbstift-«Mehl» mit der Zeigefingerbeere auf dem Blatt kreisend verreiben.



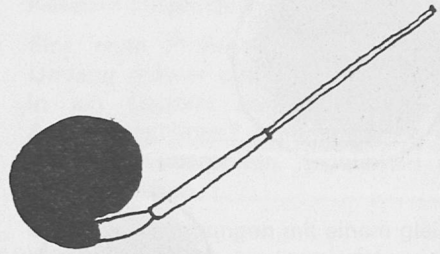
Mit einem stumpfen Bleistift links und rechts herum kreisen. Von einem Punkt aus grösser werden lassen. Man darf zuletzt keine einzelnen Linien sehen.

* Siehe Ernst Bühler und andere: Lebendiges Denken durch Geometrie. Arbeitskreis der Freien pädagogischen Vereinigung Bern. Haupt Bern 1978.

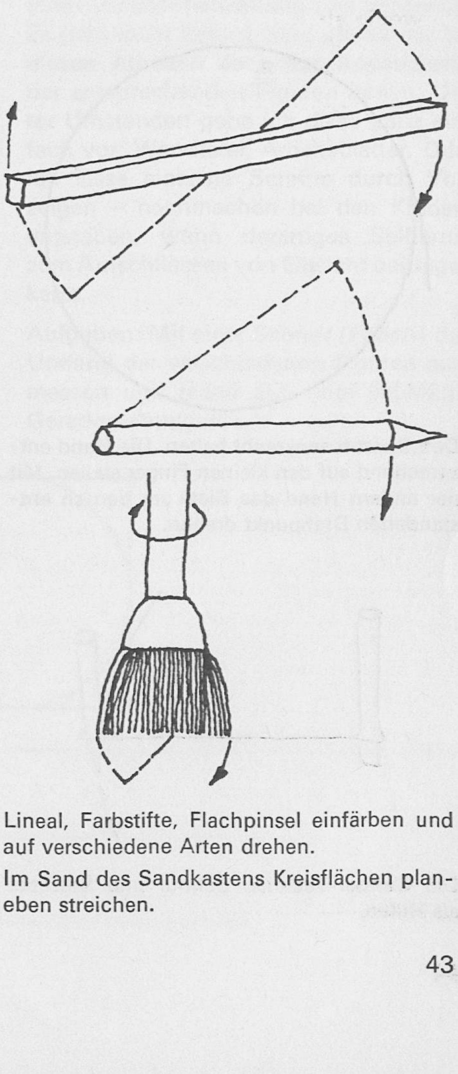


Ähnliche Übung: Fläche mit kleinen, möglichst dicht liegenden Tupfen belegen. Innen beginnen.

Was entsteht, wenn man aussen beginnt? Worin bestehen die Schwierigkeiten?

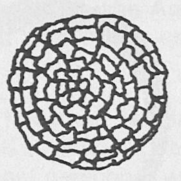


Gleiche Übungen mit verschiedenen Werkzeugen und Materialien. Verschieden grosse Flächen entstehen lassen.



Lineal, Farbstifte, Flachpinsel einfärben und auf verschiedene Arten drehen.

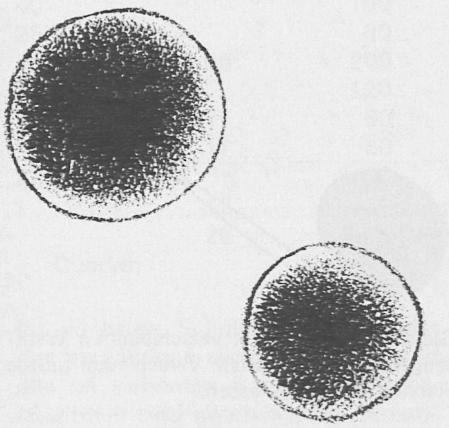
Im Sand des Sandkastens Kreisflächen planeben streichen.



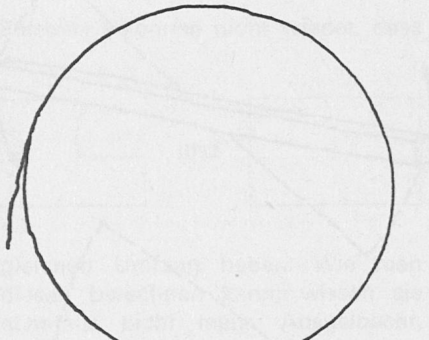
Papierriss-Collage.

Neue Aufgabe: Den Kreisumfang hervorheben.

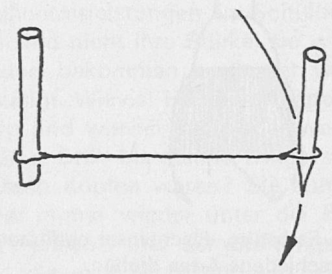
Unterschiedliche Techniken erfinden und anwenden lassen. Als Gerät ausgeschlossen bleibt vorläufig der Zirkel. Eigene Hilfsmittel konstruieren.



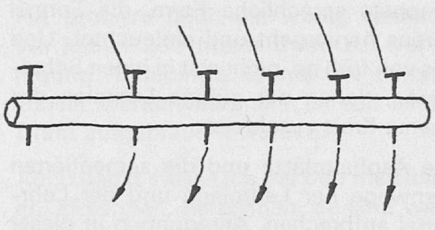
Aus freier Hand die Trennlinie zwischen eingefärbter und freier Fläche verstärken.



Den Bleistift senkrecht halten. Die Hand entsprechend auf den kleinen Finger stellen. Mit der andern Hand das Blatt um den so entstandenen Drehpunkt drehen.



Die Gärtner-Technik: Schnur und Setzholz als Hilfen.



Saatrinnen in einem runden Beet ziehen: Stock mit Nägeln als «Vielfach»-Gerät.

Die Arbeiten zu den Themen Fläche und Umfang sind in Wirklichkeit nicht auf den Kreis beschränkt. Ich verzichte aber im Rahmen dieser Darstellung darauf zu zeigen, wie die beiden Begriffe im Zusammenhang mit beliebigen Figuren, unregelmässigen und regelmässigen, erarbeitet werden können. Ebenso lasse ich erste einfache Übungen zum Flächenzerlegen und Flächenverwandeln weg. Sie gehören in die naiv-hantierende Beschäftigung mit Flächenerscheinungen hinein; denn sie bauen Erfahrungen auf, welche unter anderem den späteren Arbeiten mit Kreisflächen zugrunde liegen werden.

Der Sinn solcher Arbeiten? Zeitvergeudende Spielereien? – Bedeutung kommt vorerst dem Handwerklichen zu. Die Kinder hantieren mit einfachen Geräten, gebrauchen ihre Hände, die Finger, arbeiten mit unterschiedlichen Materialien. Sie bekommen all das mehr oder weniger «in den Griff». Fürs erste also ein Beitrag zur Schulung motorischer Qualitäten, der Hand- und Fingerfertigkeiten. Muss man immer noch und immer wieder Pestalozzi zitieren, um die Bedeutung solcher Unterrichtselemente für die menschliche Entwicklung glaubwürdig zu machen? Dieses Tätigsein ist aber mehr und anderes als blosse Hand- und Fingerfertigkeit üben. Wer aus solchem Arbeiten eine Weile sich selber heraushält, um es ungestört und gesammelt in Einzelheiten zu beobachten, der wird dabei der Vielzahl von Tätigkeiten, von Bewegungen, von Bewegungsfolgen inne, welche hier ablaufen. Das fängt an in den Fingerspitzen, setzt sich fort zu den Fingern, in die Hände, erfasst Arme und Beine, den ganzen Kinderkörper. Das Wesentliche dabei ist aber, dass all das von einem inneren Zentrum aus gesteuert wird, bei jedem Kind auf seine Weise, in seinen Organen und Bahnen. Wenn man zu entdecken versucht, was dabei an Denken, Vergleichen, Verändern, Erfinden mit im Spiele ist, und wenn man sich dann unvermittelt in eins fühlt mit dieser eigenartig gelösten und doch gesammelten Kinderaktivität, dann sind alle Zweifel über den Sinn solchen Tuns mit einem Male weg. Wie so ganz anders ist hier die Atmosphäre als das oft in Phasen mit einseitig intellektueller Beanspruchung der Fall ist, wo unbeteiligte Kinder mehr oder weniger brav etwas an sich vorüber gehen lassen, das keines ihrer Glieder zu bewegen und nichts in ihrem Innern in Gang zu setzen vermag. Im Unterschied dazu sind in den geschilderten Arbeiten die Kinder selber am Schaffen. Sie sind von einer Aufgabe eingenommen und dabei, diese ihrerseits zu erfassen. Ab und zu steigt zwar das Lärmpegel. Man muss mahnen, eindämmen, an Grenzen erinnern und an Kameraden, welche durch aufkommendes Schwatzen gestört werden. All das ist eben mehr als «Schulen der Feinmotorik». Was sich dabei an Formempfinden aufbaut, an Einsichten in einfache Zusammenhänge vorbereitet, für stille Selbsterfahrungen aufschliesst, was als Anforderung gegenüber dem gesamten neurologischen «Steuerungsapparat» dessen Entwicklung herausfordert und fördert, das alles ist durch keine noch so ausgeklügelte «operationale Lernzieldefinition» festzumachen. Kein Strukturschema oder Prozessdiagramm vermag es darzustellen. Dass die Kinder sich bei den Arbeiten wohlfühlen, dass sie davon eingenommen sind, dass sie in der Regel entspannt, willig und konfliktfrei mithalten, ist schon Grund genug, hantierendem Umgang auch im Bereich des Mathematischen viel Spielraum zu geben und das sich vergessende Verweilen immer wieder zu ermöglichen.

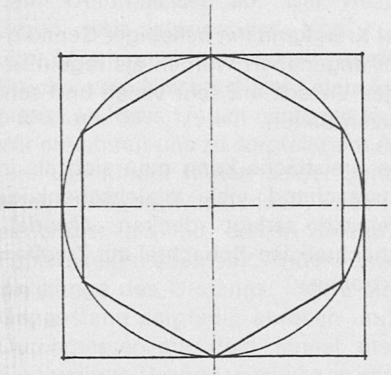
Eine Sache ergreifen, sich von dieser ergreifen lassen, sie erfassen und von ihr erfasst werden: Ist das idealisierende Überhöhung von Schulalltag? Pädagogisierendes Verklären von Wirklichkeit? Vielleicht haben sie recht, die Realisten, die Pragmatiker, die Entzauberer, für die nur die sicht- und messbaren Ergebnisse erheblich sind. Aber vielleicht sind Inselchen des ergriffenen Verweilens, auch wenn es ganz bescheidene Ansätze im nüchternen Schulalltag sind, in anderer Weise bedeutsam. Vielleicht sind es notwendige Gelegenheiten, wenn menschliche Qualitäten ebenfalls sollen wachsen können, die sich nicht unmittelbar vermünzen lassen. Sich von etwas ergreifen lassen, um der Ergriffenheit fähig zu werden, der Hingabe und der Ausdauer.

Kreise: Umfang, Durchmesser, die Zahl Pi

In den bisherigen Arbeiten wurde weder exakt gemessen noch etwas Bestimmtes berechnet. Wir verglichen zwar viel, «massen» dazu mit den Augen, stellten fest: «. . . ist doppelt/halb so lang . . . je grösser die Bewegung, umso grösser die Fläche . . .». Allmählich lernten wir neue

Bezeichnungen gebrauchen und auseinanderhalten: Kreisfläche, Kreisumfang. Durchmesser, Halbmesser/Radius. Wir erkannten, dass Durchmesser/Halbmesser die Grösse der Kreisfläche, die Länge des Kreisumfanges bestimmen. Verändern wir die eine Erscheinung, so verändert sich die andere. Naive Erfahrungen, welche den Grund legen zum Aufbau sprachlich-begrifflicher Kategorien zum Sachbereich Kreis, die später weitergeführt werden zum mathematisch-formalen be-Greifen bestimmter Sachverhalte aus dem Erscheinungsfeld Kreis.

Für die Primarschulen des Kantons Bern ist das Berechnen von Kreisumfang und Kreisfläche dem achten Schuljahr zugewiesen. Das Rechenbuch führt das Berechnen des Umfangs folgendermassen ein:



Vergleiche den Umfang von Quadrat und Sechseck mit dem Kreisumfang!

Quadrat:
1 Seite = Durchmesser des Kreises
Umfang = ? Durchmesser

Sechseck:
1 Seite = Radius des Kreises
Umfang = ? Radien
= ? Durchmesser

Kreis: Umfang zirka ? Durchmesser

Lösungen

Quadrat: Umfang = 4 Durchmesser

Sechseck: Umfang = 6 Radien = 3 Durchmesser

Kreis: Umfang zirka 3–4 Durchmesser (näher bei 3 Durchmesser)

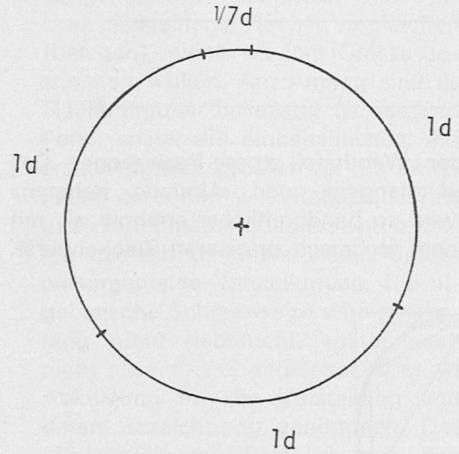
Aufgabe: Messt den Umfang und den Durchmesser von kreisrunden Gegenständen!

Berechnet nach den gemessenen Beispielen, wie viele Durchmesser den Umfang ergeben! Vergleicht eure Resultate! Streicht die, welche weitab liegen; denn sie sind wahrscheinlich schlecht gemessen. Rechnet den Durchschnitt aus!

Lösungen

Eigene Aufgaben!

Je grösser die Zahl der Messungen und je genauer die Messungen, um so näher wird der Durchschnitt der Resultate der Zahl π kommen!



Merke: Der Umfang des Kreises ist 3,14 ($3^1/_7$) mal grösser als der Durchmesser. Die Zahl 3,14 nennt man π!

Die Absichten des Lehrmittels leuchten ein: Die Kinder erkennen die Länge des Kreisumfangs als Grösse zwischen dem Umfang des Quadrates aussen und dem Sechseck innen, somit zwischen drei und vier Durchmessern – näher bei drei. Sie finden sich messend und rechnend an die Verhältniszahl 3,14 ($3^1/_7$) heran. Dann kann berechnet werden: Wie gross ist der Umfang des Kreises?

Verstehen Kinder, was hier verstanden werden soll? Sehen sie, was eingesehen werden kann? Ich bin dessen immer noch nicht sicher. Beide Figuren halten Zustände, Ergebnisse fest; den Kindern ist das Dynamische, das auch darin steckt, nicht ohne weiteres einsichtig. Wir müssen die Resultate, die Ergebnisse aus einer Handlungsphase hervorgehen lassen, «das Gewordene in den Werdensprozess zurückverwandeln» (Heinrich Roth). Einsehen ist ein Vorgang, ein zeitliches Geschehen, Einsicht das Ergebnis, das aus diesem Prozess dann herausspringt. Die folgenden Arbeiten sind Wegstrecken solcher Prozesse, welche den vom Lehrmittel gestellten Aufgaben vorausgehen, diese von drohender Kopflastigkeit lösen und sie auch den Händen anvertrauen. Es sei nur nebenbei angemerkt, dass hantierende Erfahrungen zeitlich wesentlich früher als erst im achten Schuljahr angesetzt werden können. Ich habe sie zum Teil mit Sechstklässlern ausprobiert.

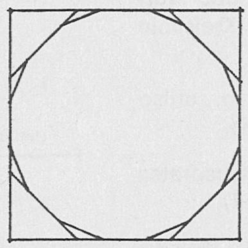
Eine erste *Problemstellung:* Wird der Umfang grösser oder kleiner, wenn wir in ein Quadrat das eingeschriebene Achteck zeichnen? Hantierend die Vermutungen überprüfen. Ergebnisse begründen lassen.

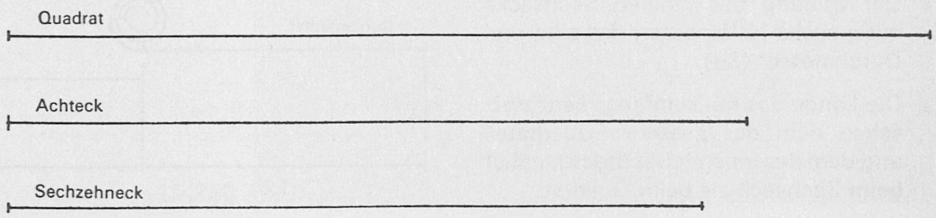
Gleiche Überlegungen mit einem gleichseitigen Dreieck, das man nach aussen zu einem Sechseck und dieses zum Zwölfeck erweitert.

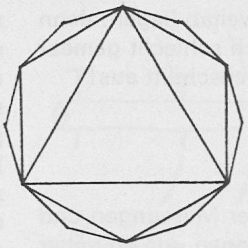
Die beiden folgenden Figuren halten Endstadien der Arbeitsfolge fest, in der dritten sind beide zusammengefasst.

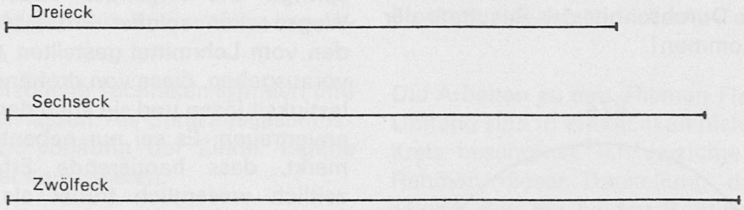
Eine Zwischenbemerkung zum Vorgehen: Es geht nicht darum, dass die Kinder bei diesen Arbeiten auch das Konstruieren der entsprechenden Figuren lernen. Unter Umständen gebe ich diese ganz einfach vor: Wandtafel, Arbeitsblätter. Oder ich lasse einzelne Schritte durch Vorzeigen – nachmachen bei den Kindern entstehen, wenn derartiges Selbertun zum Aufschliessen von Einsicht beitragen kann.

Aufgaben: Mit einer Schnur (Faden) den Umfang der verschiedenen Figuren ausmessen und jeden auf einer separaten Geraden abtragen.

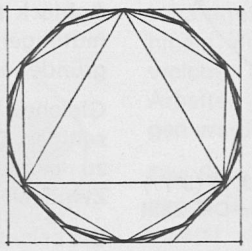


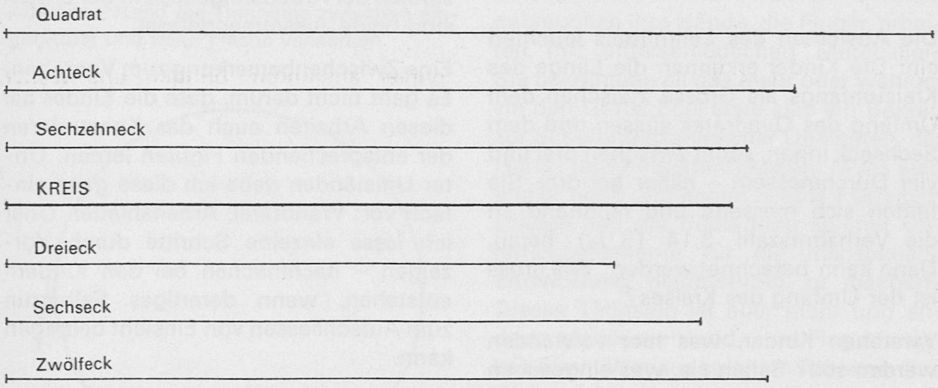






Man lasse unbedingt mit einer Schnur oder einem Faden messen und übertragen, nicht mit dem Stechzirkel. Dafür arbeite man an möglichst grossen Figuren: Wandtafel, grosse Papierbogen. Das «Umfangen», den «Umfang nehmen» wird so handgreiflicher erfahren als mit dem technisch präziseren Zeichengerät.

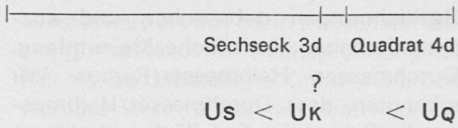




Ergebnisse, Einsichten, wie sie am Ende dieser Phase von den Kindern formuliert werden können:

- Wir kommen von aussen und von innen immer näher an die Kreislinie heran.
- Je mehr Ecken wir machen, umso näher gelangen wir zum Kreis.
- Der Umfang des äusseren Quadrates ist vier Durchmesser lang (4d).
- Der Umfang des inneren Sechsecks misst sechs Halbmesser; das sind drei Durchmesser (3d).
- Die Länge des Kreisumfangs liegt zwischen dem des äusseren Quadrates und dem des inneren Sechsecks, näher beim Sechseck als beim Quadrat.

Wir fassen die Ergebnisse aus der vorangehenden Darstellung und die Aussage des letzten Satzes in einer einzigen Darstellung zusammen:



- Der Kreisumfang ist grösser als der Umfang des inneren Sechsecks, aber kleiner als der Umfang des äusseren Quadrates. Er ist näher beim Sechseck.

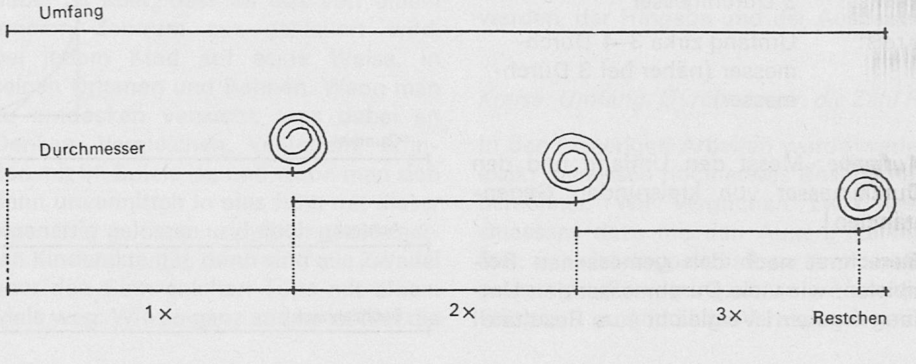
Wir schreiben und stellen abgekürzt dar:

$U_K > U_S$ und $U_K < U_Q$

Eine weitere Einsicht, welche hier vorbereitet worden ist, wird bei den Arbeiten zur Berechnung der Kreisfläche wieder angesprochen. Sie wird dort weiteren Arbeiten zugrunde liegen.

- Der Kreis kann mit beliebiger Genauigkeit angenähert werden als regelmässiges Vieleck mit sehr vielen und sehr kurzen Seiten.
- Die Kreisfläche kann man sich als in entsprechend viele gleichschenklige Dreiecke zerlegt denken (Modell: Schachtelkäse-Schachtel mit Zwölferportionen).

Mit einer weiteren Folge von Arbeiten versuchen wir anders an das Verhältnis zwischen Kreisumfang und Durchmesser heranzukommen. Als Arbeitsmaterial dienen verschieden grosse runde Gegenstände: Büchsen, Büchsendeckel, Walzen, Vasen, Baumstämme. Dazu brauchen wir Faden, Schnur, Messband. Mit der Schnur umfassen wir den Umfang einer Büchse und übertragen ihn auf eine Gerade an der Wandtafel oder auf einem grossen Blatt Papier. Danach nehmen wir den entsprechenden Durchmesser ebenfalls «in die Schnur» und tragen diese Strecke auf derjenigen des Umfangs ab.



Wir führen diese Arbeiten an mehreren, möglichst verschieden grossen Gegenständen durch. Einzelarbeit, Partner- oder Gruppenarbeit.

Ergebnisse:

- Wir können den Durchmesser *immer* dreimal auf dem Umfang abtragen. Ein kleines Stücklein bleibt jedesmal übrig. Der Kreisumfang ist somit ein wenig länger als drei Durchmesser.

Damit haben wir Ergebnisse der vorangegangenen Arbeiten bestätigt gefunden.

Später versuchen wir auf die gleiche Weise die Grösse des Reststückes zu ermitteln. Vorerst tragen wir wieder mit der Schnurmethode das Restchen auf dem Durchmesser ab. Die Resultate liegen weit auseinander. Von $^1/_2$ bis über $^1/_{10}$ hinaus kommen alle gemeinen Brüche vor. Niemand sieht den Ergebnissen an, dass $^1/_7$ am nächsten kommt. Wir ermahnen uns zu sorgfältigem Arbeiten. Die Kinder finden selber genauere Messverfahren: Mit dünnem Faden geht es besser als mit dicker Schnur, mit Papierstreifen ebenfalls. Andere ermitteln die Länge des Umfangs, indem sie den Gegenstand sorgfältig abrollen und den Durchmesser mit dem Lineal messen. Eine weitere Gruppe versucht es mit dem Stechzirkel, indem die Kinder sehr kurze Vieleckseiten auf einem gezeichneten Kreis abzählen und ebensoviele Seiten auf eine Gerade übertragen. Sie knüpfen damit bereits an ein Ergebnis der vorausgegangenen Arbeiten an.

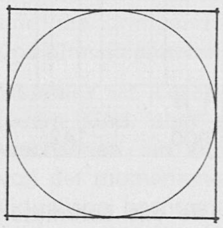
Die Resultate aus den verschiedenen Verfahren werden gesamthaft nicht mehr wesentlich genauer. Die mittleren Ergebnisse: $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_7$, $^1/_8$, $^1/_9$, $^1/_{10}$. Im ganzen bewegen sie sich innerhalb der Grössen, welche auch das Verfahren ergibt, das im Lehrmittel vorgeschlagen wird.

Wichtig an diesen Arbeiten scheint mir die aus dem Hantieren hervorgehende Einsicht, ja Gewissheit: Der Durchmesser ist im Umfang dreimal enthalten, und ein kleines Stück bleibt übrig. Ein wenig mehr als drei Durchmesser ergeben den Kreisumfang. Ohne solche sinnenfällige Erfahrungen bleibt die Zahl Pi unverständlich, höchstens Element eines auswendig zu lernenden Kalküls. Wenn wir am Ende den Kindern den Wert $3^1/_7$/3,14 und gleichzeitig die Bezeichnung und die Schreibweise π mitteilen, dürfen wir annehmen, diese Grösse habe nun in der Sprache der Kinder auch einen realen Bedeutungshintergrund.

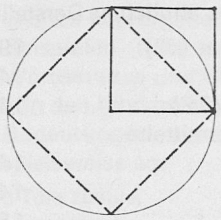
Kreise: Fläche ausmessen

Als Vorarbeiten zu den Aufgaben und Erklärungen des Lehrmittels (S. 81–83), diese teilweise ergänzend, versuchen wir auch die Kreisfläche vorerst zeichnend, zählend und vergleichend zu ermitteln. Ich skizziere die einzelnen Arbeitsphasen.

- In vorausliegenden Arbeiten haben die Kinder erfahren, dass wir Strecken mit Längenmassen ausmessen und Flächen mit kleineren Flächen vergleichen (belegen), wenn wir ihre Grösse bestimmen wollen. Am Anfang sind es Flächenfiguren beliebiger Grösse und Form, später die Einheitsflächen. Als erste Vergleichsgrössen für die Kreisfläche brauchen wir «Radiusquadrat» und «Durchmesserquadrat» und schaffen deshalb in einem ersten Schritt entsprechende Vorstellungen. Die algebraische Schreibweise wird am Anfang nicht gebraucht, später auch nicht als $r \cdot r = r^2$ abgeleitet, aber als Abkürzung für die Vorstellung und deren Bezeichnung genommen. Das «Durchmesserquadrat» ist aus den Arbeiten zum Kreisumfang bereits bekannt.



Durchmesser-
quadrat



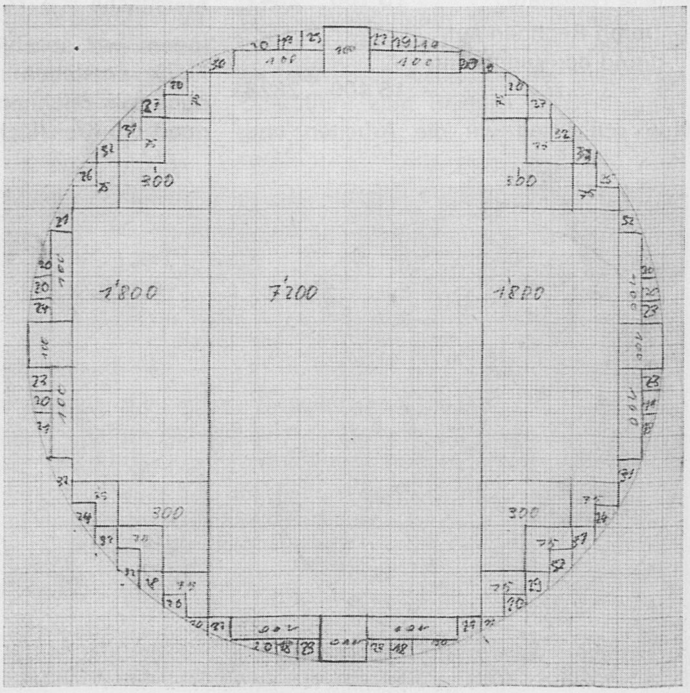
Radiusquadrat
2 Radiusquadrate

- Anhand der Darstellungen einsehen,
  – dass das Durchmesserquadrat grösser ist als die Kreisfläche, das Radiusquadrat aber viel kleiner;
  – dass vier Radiusquadrate gleichgross sind wie das Durchmesserquadrat;
  – dass zwei Radiusquadrate kleiner sind als die Kreisfläche.
- Schätzen der Restfläche, nachdem wir zwei Radiusquadrate herausgeschnitten haben. Ist der Rest grösser oder kleiner als ein Radiusquadrat?
- Erste Ergebnisse festhalten:
  – Kreisfläche $<$ Durchmesserquadrat
  – Kreisfläche $>$ 2 Radiusquadrate
  – Wir vermuten: Kreisfläche $\sim$ 3 Radiusquadrate.

An dieser Stelle erinnern wir uns der Erfahrungen mit dem Kreisumfang: Umfang = $3^1/_7$ Durchmesser. Ist vielleicht die Kreisfläche $3^1/_7$ Radiusquadrate gross?

Zwei Arbeiten, die wir auf Millimeterpapier ausführen, bringen uns weiter, und schliesslich leuchtet uns die Flächenformel ein.

- Auf Millimeterpapier einen Kreis mit dem Radius 7 cm zeichnen. Rechnend und zählend ermitteln wir Teilergebnisse zu dessen Flächengrösse.



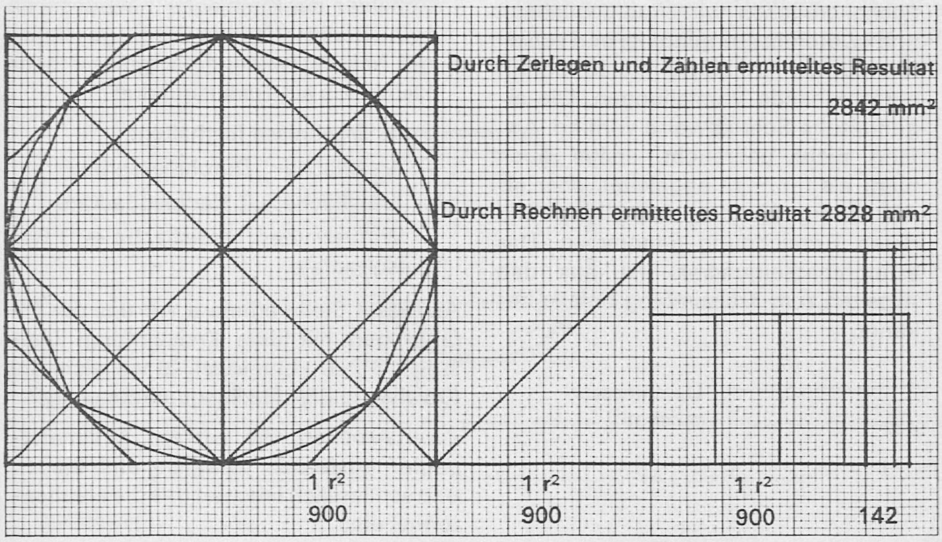
15 250

- Resultate aus sechs ähnlichen Darstellungen zusammenstellen, auswerten:

Durchmesserquadrat (d^2)	=	19600	
Radiusquadrat (r^2)	=	4900	
3 Radiusquadrate ($3r^2$)	=	14700	
Durch Auszählen ermittelte Resultate		14920	15250
		14860	15604
		15125	15324
Durchschnitt		15180	
Errechnete Fläche (Vermutung: $F = 3\,^1/_7$ Radiusquadrat)		15400	

Die Resultate werden ebenfalls ausreichend genau, wenn man bloss die Hälfte oder gar einen Viertel der Kreisfläche auszählt. In dem Fall kann man mit Kreisen vom Radius 10 cm arbeiten.

- Kreisflächen zerlegen (schneiden oder zeichnen) und in Rechteckflächen verwandeln (kleben oder zeichnen). Teilflächen auszählen oder ausrechnen. Gesamtfläche ermitteln.



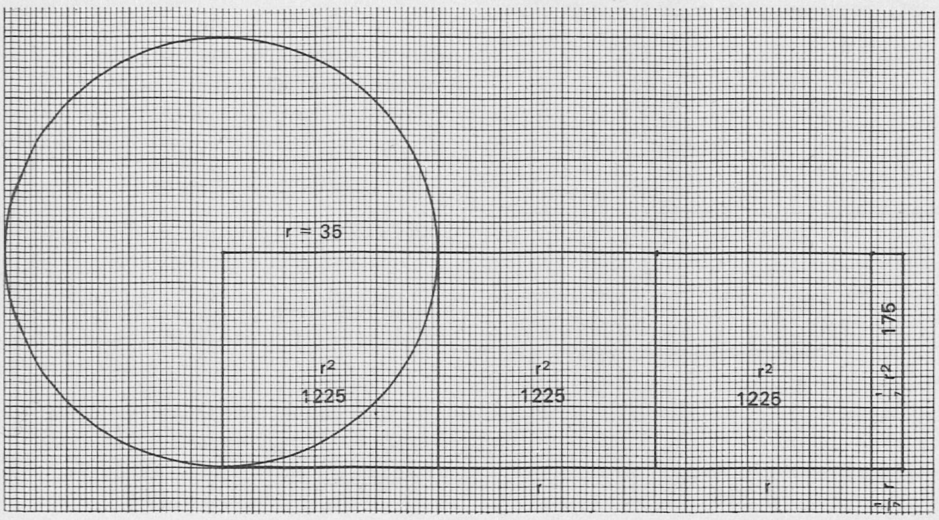
- Wir vergleichen die Resultate mit unserer geäusserten Vermutung:

Durch Zählen ermittelte Resultate	15 180	2842
Durch Rechnen aufgrund der Vermutung $F = 3\,^1/_7 r^2$	15 400	2828

Nun schliessen wir die Arbeiten und Ableitungen an, wie sie das Lehrmittel anbietet und finden im Laufe dieser Arbeiten unsere Vermutung bestätigt:

Kreisfläche = $\pi \cdot r^2$

Indem wir abschliessend die folgende Figur entstehen lassen, können wir nochmals zeichnend, zählend und rechnend die Kreisflächenformel überprüfen.



«Erst erfahre es, dann sage es beteiligt, schliesslich fasse es nüchtern.»

5. Beispiel: Eine Text-Aufgabe aus dem dritten Schuljahr

Die Unterlagen zu diesem Beispiel wurden im Landeinsatz der Sechzigerjahre gesammelt. Das Lehrmittel, welches damals dem Unterricht zugrunde lag, ist seither ersetzt worden und zur Zeit nicht mehr überall im Gebrauch. Somit ist das Ausgangsmaterial auch hier veraltet, und ich frage mich einmal mehr, ob es angebracht sei, die Sache nach so langer Zeit aufzugreifen. Kann das jemanden interessieren?

Nicht veraltet sind freilich die Lehr- und Lernprobleme, welche sich den damaligen Lehranfängern gestellt haben. Ähnliche Situationen können immer wieder beobachtet werden; in Lehrübungen und Praktika sind sie, in den verschiedensten Abwandlungen, beinahe alltägliche Erscheinungen. Sieht man genauer hin, so handelt es sich stets um die gleichen Grundprobleme: Anschaulichkeit des Unterrichts; Vorstellungs- und Begriffsbildung; sorgfältiges Darstellen und Klären von Sachverhalten; nichts als selbstverständlich voraussetzen; berücksichtigen, dass Kinder anders denken als Erwachsene, als der Lehrer, und jedes Kind anders als sein Nachbar. Ich will versuchen, durch schrittweises Auseinanderlegen des Materials diese Probleme aufzudecken. Tiefer in die Zusammenhänge und die Prozesse hineinsehen verhilft uns vielleicht zu angemessenerem Handeln.

Ein Seminarist, der nach Neujahr im Landeinsatz stand, berichtete bei einem Besuch bei ihm:

«Meine Drittklässler haben mit den folgenden Sachverhalten Schwierigkeiten:

882. Hans bezahlt auf der Post 3 Pakete zu 30 Rp. und 1 Paket zu 60 Rp.

883. Der Ausläufer Martin führt mit dem Veloanhänger 7 Pakete zu 60 Rp. auf die Post und gibt 5 Fr.

884. Markus bezahlt für 4 Pakete 3 Fr. 60 Rp.

885. Ernst gibt für 5 Pakete zu 90 Rp. ein Fünffrankenstück.

923. Erna holt in der Käserei 4 Liter Milch zu 49 Rp.

924. Erika bezahlt in der Stadt für den Liter Milch 54 Rp. und bringt 3 Liter heim.»

Aufgaben aus: Rechenbuch für die Primarschulen des Kantons Bern. Drittes Schuljahr. Staatlicher Lehrmittelverlag Bern 1958. S. 89 und 92.

In einem anderen Schulhaus notierte ich mir das folgende kleine Gespräch, das entstanden war, nachdem eine Schülerin eine ähnliche Aufgabe wie die wiedergegebenen vorgelesen hatte:

«L.: Welches Wörtlein ist hier wichtig?

S.: Zu.

L.: Was heisst das?

S.: Man muss mal rechnen.

L.: Ja.»

Was zeigen diese Situationen an? Worin bestehen für die Kinder – und für die Lehrer – die Schwierigkeiten? Was muss von den Schülern gemeistert, das heisst als Situation verstanden und als mathematische Operation gekonnt werden?

In einer ersten groben Übersicht kann man drei Problemfelder umreissen, welche sich den Kindern stellen:

- Da ist einmal ein sprachlich vermittelter *Sachverhalt,* eine schriftsprachlich dargestellte Realsituation, die es zu *verstehen* gilt.
- Die Aufgabe wird nicht durch eine Frage abgeschlossen. Die Autoren und Begutachter dieses Lehrmittels waren der Auffassung, die Kinder sollten lernen, aus einem dargestellten und richtig verstandenen Sachverhalt die *Problemstellung,* die Frage nach der rechnerischen Aufgabe *selber* zu *formulieren.*
- Dann sollen die Kinder dieses Problem mittels rechnerischer *Operationen* lösen und abschliessend eine Antwort auf die Problemfrage geben können. Dabei geht es um das Vollziehen der beiden elementaren Schlüsse von der Einheit zu einer Vielheit (Vervielfachen) und von einer Vielheit zur Einheit (Verteilen und Aufteilen).

Es sind somit von den Kindern innert kürzester Zeit drei anspruchsvolle geistige Teilleistungen zu erbringen. Das erfolgt in einem komplexen inneren Prozess, bei dem einerseits Vorstellungen des Sachverhalts die Grundlage zu Folgerungen bilden. Anderseits werden aus dem «Vorwissen» zum Sachverhalt und aus den Vorräten an rechnerischem Wissen und Können Elemente abgerufen. Im Denkprozess müssen sie mit den Gegebenheiten des Sachverhalts zusammenwirken, sodass am Ende das in der Aufgabe verschlossene Ergebnis genannt werden kann.

Ich versuche nun, diese drei Teilleistungen etwas genauer zu analysieren. Dadurch sollte deren Vielschichtigkeit deutlicher werden und der Anspruch bewusster, der mit solchen Aufgaben an die Kinder gestellt ist.

1. In einem ersten Schritt geht es also darum, den schriftlichen *Text zu lesen.* Das Kind muss die Situation, den Sachverhalt erfassen, sich eine Vorstellung machen von den Gegebenheiten und den Handlungen der «Geschichte». Es steht im Rechenunterricht somit vor der gleichen Aufgabe, die sich ihm bei jeder Lektüre stellt: Einen schriftlichen Text entschlüsseln, ihn umsetzen in innere Bilder von Gegenständen, Handlungen und Zusammenhängen.

Nun ist Lesen für manchen Drittklässler eine noch mühsame Tätigkeit, die bedächtig und Schritt für Schritt ausgeführt wird. Nicht selten bedeutet «lesende Sinnentnahme» auf dieser Stufe so etwas wie ein allmähliches Zusammenbuchstabieren einzelner Teilinhalte zu einem Aussageganzen. Es braucht bei einigen Kindern mehr Zeit als unser Programm und die drängenden flinkeren Schüler uns oftmals annehmen lassen.

Überdies ist Lesen in jedem Fall, bei jedem Kind, aber auch bei jedem Erwachsenen, ein Vorgang, der sehr stark von der momentanen psychischen Individuallage bestimmt wird. Darin eingeschlossen ist nicht bloss eine augenblickliche Gestimmtheit oder Motivation, sondern auch der aus der individuellen Lerngeschichte jedes Kindes herrührende Sinngehalt einzelner Wörter. Es können Bedeutungskonflikte auftreten, welche aus der ungleichen mundartlichen und schriftsprachlichen Verwendung eines Wortes hervorgehen. In den angeführten Beispielen trifft das bei den kleinen Wörtern «zu» und «für» zu. Beide werden von den Kindern in umgangssprachlichen Bedeutungen bereits verwendet, beispielsweise so:

d'Türe zuetue, zuemache	zutun, zumachen, schliessen
es Couvert zuechläbe	zukleben
zu mir cho, zu dir	zu mir, zu dir
es geit z'lut	zu laut
es geit mir z'wit	zu weit
z'Visite gah	auf Besuch
für e Vater, für d'Ching	für
für i d'Schuel	um . . . zu
für nes Halbfränkli	für
für nes Kilo	für

Das «zu» in den Aufgabenbeispielen ist vom Mundartgebrauch her bereits durch bestimmte Bedeutungen belegt. Diese ergeben aber im Zusammenhang mit den übrigen Zeichen des Textes für die Kinder keinen Sinn. Sie müssen zuerst lernen, eine der bisherigen Bedeutungen des Zeichens «für» auch dem Zeichen «zu» zu entnehmen:

Sie verchoufe s'Kilo *für* 90 Rappe.
Sie verkaufen das Kilo *zu* 90 Rappen.

Schriftsprachlich soll mit dem Zeichen «zu» (später auch «à») die Aussage «kostet», «gilt» verknüpft werden. Die Bedeutung, welche damit das «zu» erhält, ist manchen Kindern neu und muss handelnd und sprechend eingeführt und unter Umständen über einige Zeit im Gebrauch gefestigt werden. Es kann also nicht darum gehen, das Wörtchen «zu» mit dem Vervielfachen zu verknüpfen nach dem Rezept «Wenn es ‚zu' heisst, muss man ‚mal' rechnen», sondern darum, den neuen Bedeutungsgehalt des Zeichens zu erfassen. Darum sind Verknüpfungsübungen mit unterschiedlichen Aussageweisen vorerst wichtiger als der Griff nach der rechnerischen Operation; zum Beispiel folgendermassen:

a) Die gleiche Situation in unterschiedlichen Aussagen darstellen

Äpfel verkaufen:	eis Kilo für 90 Rappe s'Kilo für 90 Rappe	ein Kilo für 90 Rappen das Kilo zu 90 Rappen
Briefmarken kaufen:	ei Margge für 40 Rappe s'Stück für 40 Rappe	das Stück für 40 Rappen das Stück zu 40 Rappen

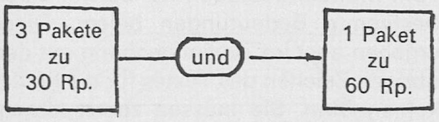
b) Zwei Sätze in einem zusammenfassen

- Die Mutter kauft 5 Packungen Eier. In jeder Packung sind 6 Stück
- Im Vorratsgestell stehen 4 Reihen Flaschen. In jeder Reihe sind 5 Flaschen
- Multipack-Angebote: 4 Pakete Papiertaschentücher. In jedem Paket sind 10 Stück
  10 Pakete WC-Rollen. In jedem Paket sind zwei Rollen
  2 Pakete Toilettenseifen. Jedes Paket enthält 4 Seifen
  8 x 10 Papiertaschentücher

c) Umformen von gegebenen Aussagen

Geschrieben:	Die Schüler lesen:
3 l Milch zu 1 Fr.	1 Liter Milch kostet 1 Franken
2 kg Äpfel zu 1 Fr. 40 Rp.	1 kg Äpfel kostet 1 Fr. 40 Rp.

Ist die Bedeutung der Wendung «zu» klar, so ist damit für die Kinder eine wichtige Voraussetzung für das Erfassen des ganzen Sachverhaltes der Aufgabe 882 geschaffen. Nun erst können sie diesen weiter aufgliedern. Aus dem Text müssen sie erfassen, dass die «Geschichte» aus den Elementen «3 Pakete zu 30 Rappen», «1 Paket zu 60 Rappen» besteht. Das «und» als dritte gliedernde Teilaussage muss ihnen einerseits helfen, die beiden bisherigen Gegebenheiten auseinanderzuhalten, zu unterscheiden, anderseits sollte es ihnen anzeigen, dass diese Teilaussagen zusammengehören, in der rechnerischen Operation zusammengenommen werden müssen.

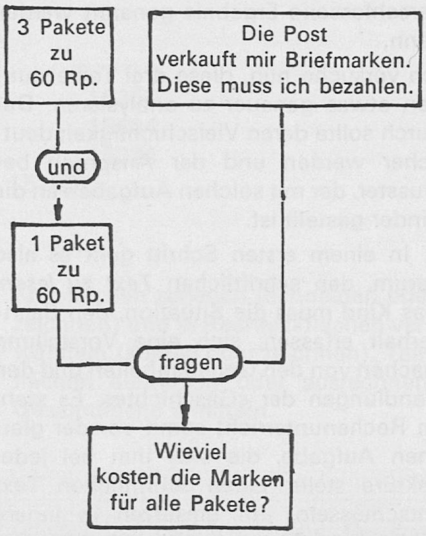


Die drei Teil-Sachverhalte weisen bei beweglichen Schülern sofort auf die entsprechenden rechnerischen Operationen hin. Solche Kinder erfassen auch die Problemstellung so rasch, dass ihnen dieser Schritt gar nicht bewusst wird; sie merken «es» einfach. Es sind das jene Schüler, die meistens ohne unsere besondere Hilfe rechnen lernen.

2. Die zweite Teilleistung besteht darin, im erfassten Sachverhalt die mathematische *Problemstellung zu erkennen*. Wenn wir das Kind die fehlende Frage formulieren lassen, so suchen wir auf diesem Weg zu erfahren, ob und wie es die Problemstellung verstanden hat. Wir verschaffen uns einen Zugang zu seinen inneren Reaktionen. Wir versichern uns, ob es imstande war, einzelne, für die Problemstellung bedeutsame Elemente des Sachverhalts aus dem ganzen Text herauszulösen und denkend in einen Zusammenhang zu bringen. Gleichzeitig musste es aus vorausgesetztem Vorwissen zum Sachverhalt über weitere Elemente verfügen können, damit nun aus dem Zusammenschluss des Ganzen die Frage hervorgehen kann.

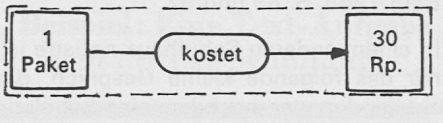
Dieses Bewusstwerden des Problems setzt aber voraus, dass eine Art innerer Plan, etwas wie eine vorgegebene Übersicht über das Ganze, ein inneres Ordnungs- und Beziehungsgefüge bereits vorhanden ist. Wie so etwas zustande kommt, ist im einzelnen schwer durchschaubar. Doch wäre ohne die Annahme eines vorhandenen «inneren Organisators» nicht zu verstehen, wie sonst der geschilderte «Schaltprozess» in Gang kommen und die Fragestellung herausspringen könnte.

Sachverhalt *«Vorwissen» zum Sachverhalt*



3. Bei der dritten Teilleistung geht es darum, das Problem mittels rechnerischer *Operationen* zu lösen. Dabei handelt es sich um eine grossartige kombinatorische Leistung des kindlichen Geistes und der gesamten cerebralen Organisation des Lebewesens Kind, das mit der Lösung der Aufgabe beschäftigt ist. Da müssen Beziehungen zwischen einzelnen Gegebenheiten hergestellt werden:

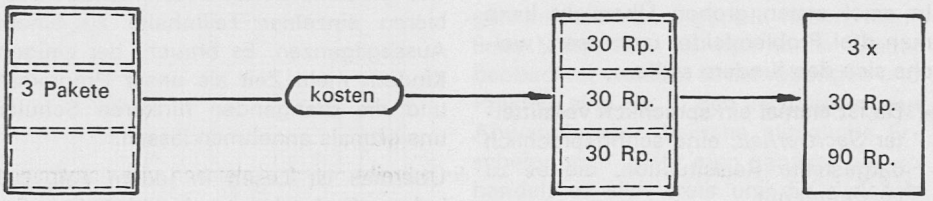
«Ein Paket kostet dreissig Rappen.»



Die dargestellte Beziehung zwischen der Einheit und dem Preis für die Einheit wird als Ganzes neue Ausgangsgegebenheit für den nächsten Satz:

«Drei Pakete kosten dreimal dreissig Rappen.» (dreimal ein Paket)

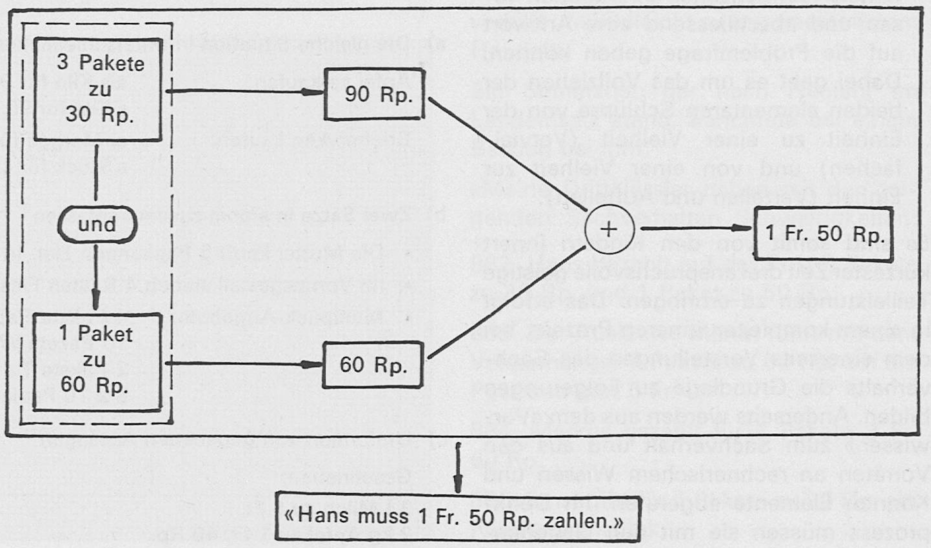
Es wird dabei die Einheit mit der gegebenen Vielheit verknüpft (dreimal ein Paket) und entsprechend der Preis für eine Einheit mit dem Preis für die Vielheit (den Preis für die Einheit auch verdreifachen).



«Drei Pakete kosten 90 Rappen.»

Das Resultat, das aus diesen operativen Verknüpfungen hervorgeht, wird durch die Antwort wieder mit der Problemstellung in Verbindung gebracht, womit der Lösungsprozess zum ersten Teilproblem des Sachverhalts abgeschlossen wird.

Singgemäss wird das zweite Teilproblem gelöst, «ein Paket zu sechzig Rappen», der ganze Lösungsvorgang mit der Addition der Zwischenergebnisse abgeschlossen und das Endergebnis in die Antwort auf das Gesamtproblem verarbeitet.



Bereitet manchen Kindern schon der Schluss vom Einheitspreis auf den Preis der gegebenen Menge und das Erkennen der entsprechenden Operation (Multiplikation) Schwierigkeiten, so nehmen diese zu, wenn sie vom Mengenpreis auf den Einheitspreis oder die Anzahl der Einheiten (Division) schliessen müssen. Gegebene Sachverhalte auf ihre Problemstellung hin zu erfassen und auf die Problemstellung die entsprechende mathematische Operation anzuwenden, erfordert mehrere auf unterschiedlichen Ebenen liegende und miteinander verknüpfte kognitive Leistungen. Deren Komplexität ist uns oft nur deshalb nicht bewusst, weil uns Aufgaben dieser Anspruchshöhe längst keine Schwierigkeiten mehr bereiten und uns die gewandten Schüler immer in der Meinung bestärken, das alles sei doch «ganz einfach». Dabei übersehen wir erst noch, dass die Lösungsprozesse sehr oft zusätzlich verzögert und erschwert werden durch mangelnde arithmetische Fertigkeiten (Unsicherheit im Addieren und Subtrahieren, noch nicht automatisiertes Einmaleins).

6. Beispiel: Erklären einer Aufgabe

In einem vierten Schuljahr wird folgende Aufgabe besprochen:

8. Viehhändler Gfeller nimmt 8300 Fr. mit auf den Markt. Er kauft zwei Kühe, die eine für 2380 Fr., die andere für 2190 Fr. Am Abend hat er noch 3543 Fr. Wieviel Geld hat er sonst noch ausgegeben?

Aus: Rechenbuch für die Primarschulen des Kantons Bern. Viertes Schuljahr. Staatlicher Lehrmittelverlag Bern 1961. S. 92.

Zuerst liest ein Kind den Text. Danach sollen die Schüler erklären, was es hier zu rechnen gebe.

Dieser Start ist fragwürdig: Der Lehrer fixiert die Kinder auf den rechnerischen Kalkül, bevor nur sicher ist, dass sie den Sachverhalt erfasst, die «Geschichte» verstanden haben. Damit lenkt er sie vom Wesentlichen des ersten Schrittes ab: Verstehen, was der Text aussagt. Die daraus hervorgehende Ratlosigkeit der Kinder macht deutlich, dass sie den für Viertklässler anspruchsvollen – weil mehrschichtigen – Sachverhalt und die Problemstellung nicht durchschauen. Sie «sehen» weder den Ablauf der ganzen Handlung, noch erkennen sie die einzelnen Handlungsteile und deren Zusammenhang. In dieser unklaren Ausgangssituation führt die Frage nach den rechnerischen Operationen zu einem haltlosen Raten.

Der Lehrer versucht zu helfen. Er mobilisiert methodisches Wissen: Veranschaulichen; übersichtlich darstellen; Hilfsmittel brauchen; farbige Kreiden sind auch eines.

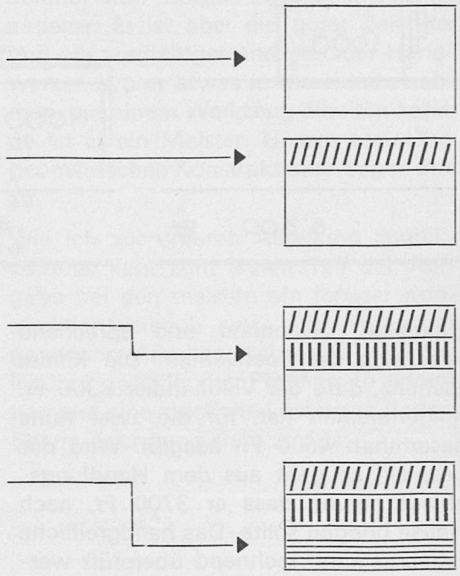
Er erklärt:

Wir wissen, wieviel Geld der Händler mitgenommen hat. Das zeichnen wir so (an der Wandtafel entsteht ein grünes Rechteck):

Er kauft eine Kuh für soviel:
(das wird mit roter Kreide im grünen Rechteck abgegrenzt und schraffiert)

Eine andere für soviel:
(wird mit blauer Kreide markiert)

Soviel Geld bringt er heim:
(braune Kreide)
Wieviel Geld hat er sonst noch ausgegeben? Das können wir nun leicht aus der Zeichnung ablesen. Wer kann es zeigen?



Ein Mädchen geht an die Wandtafel und zeigt stumm auf den leeren Raum.

L.: Richtig. Nun können wir auch die Rechnung darstellen.

Er schreibt mit den gleichen vier Farbkreiden, mit denen er die Figur gezeichnet hat, vier Zahlen untereinander und spricht dazu:

«Soviel hat er mitgenommen	8300 Fr.	Jetzt muss man doch
Für eine Kuh	2380 Fr. ◄	die und
Für eine andere	2190 Fr. ◄	die und
Heimgebracht	3543 Fr. ◄	die Zahl zusammenzählen
	▲	und ergänzen auf die oberste, dann erhält man hier unten, wieviel er noch gebraucht hat.

Habt ihr das alle verstanden?»

Ein einziges Kind, ein Mädchen, schüttelt zaghaft den Kopf. Alle andern Schüler schweigen oder nicken so etwas wie ja. – Zuzugeben, dass man etwas, das der Lehrer doch so schön erklärte, nicht verstanden hat, ist schwer – und manchmal gefährlich.

Aber freundlich und wohlwollend erklärt er nochmals, ein wenig eindringlicher die Stimme und nachdrücklicher die begleitenden Zeigegesten.

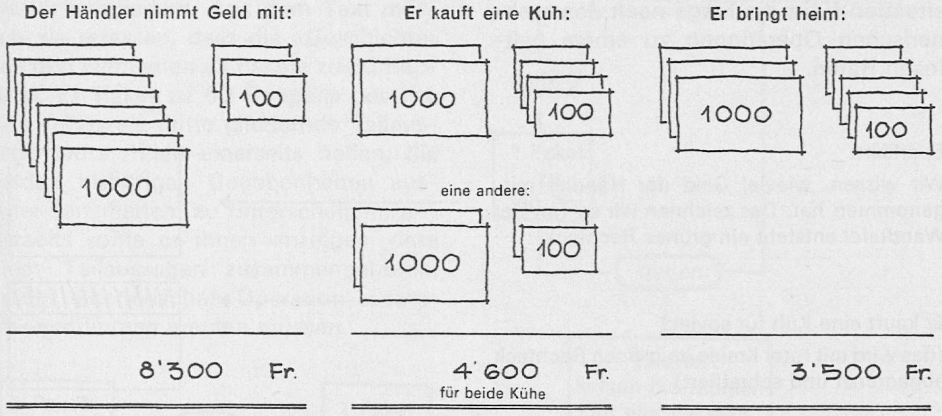
«So, jetzt hast auch du es begriffen, gelt Vreni.» Das Mädchen schüttelt den Kopf nicht mehr. Der Lehrer hat sich doch einzig seinetwegen so sehr Mühe gegeben.

Erklärt, aber nicht geklärt. Überredungs- und Beschwörungsritual des Lehrers.

Es muss doch wohl anders gehen. Vielleicht so: Die «Geschichte» in den Hauptzügen spielen. Spielhandeln mit Spielgeld. Zuerst muss der Sachverhalt klar werden, der Handlungsablauf. Die Aussagen des Textes müssen innere Bilder eines Geschehensablaufs entstehen machen. Damit wir handelnd gleich im Kopf rechnen können, vereinfachen wir die Zahlen. Die Ergebnisse müssen wie selbstverständlich aus der Situation heraustreten. Die Operationen mit den Zahlen dürfen den Prozess der Vorstellungsbildung nicht konkurrenzieren. Die handelnden Kinder sollen sich ganz auf den Spielablauf und die Abfolge der einzelnen Teilszenen konzentrieren können. Es geht in dieser Phase nicht ums Rechnen, nicht um Operationen mit Zahlen. Darum vereinfachen wir diese:

Prinzip der minimalen Hilfe durch Schaffen minimaler Schwierigkeiten in der mitverbundenen Teilleistung «Operieren mit Zahlen».

Gleichzeitig stellen wir die einzelnen Phasen in einem Wandtafelbild dar.



Handelnd, zeichnend und sprechend klärt sich der Sachverhalt. Die Kinder «sehen», dass der Viehhändler 8300 Fr. mitgenommen hat, für die zwei Kühe gesamthaft 4600 Fr. ausgibt. Wird das gespielt, so geht aus dem Handlungsablauf hervor, dass er 3700 Fr. nach Hause bringen sollte. Das handgreifliche Ergebnis kann rechnend überprüft werden: Haben wir uns vielleicht beim Zahlen verzählt? Doch stimmen unsere Resultate. Somit fehlen 200 Franken. Diese hat er für andere Ausgaben gebraucht. Wofür wohl? Wir lassen vermuten.

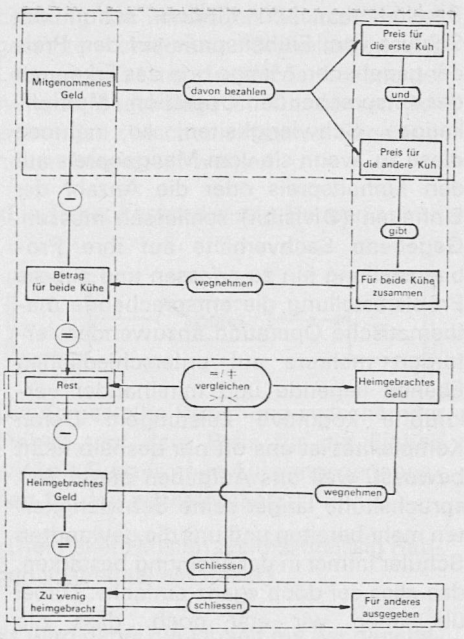
Wie stellen wir im Heft dar? Die Form, die wir an der Wandtafel entwickeln, ist für die Kinder verständlich, weil sie teilweise der bildhaften Darstellung folgt.

Für eine Kuh	2400 Fr.
Für die andere	2200 Fr.
Zusammen	4600 Fr.
Mitgenommen	8300 Fr.
Für die zwei Kühe	4600 Fr.
Rest	3700 Fr.
Rest aus dem Handel	3700 Fr.
Heimgebracht	3500 Fr.
Noch gebraucht	200 Fr.

Der Bauer hat für anderes noch 200 Fr. gebraucht.

Aber einen Haken hat die Sache: Wie ist den Kindern weis zu machen, dass man nicht mit dem mitgenommenen Geld beginnen muss, sondern mit den Ausgaben? Wie lernen sie den Ablauf der ganzen Handlungskette mathematisch als Folge bestimmter Operationen erkennen? Wie lernen sie, in der richtigen Phase – welches ist die «richtige»? – eine noch nicht verwendete Angabe heranzuziehen und diese durch eine Operation bestimmter Richtung mit dem Ergebnis einer vorausgegangenen Operation zu verknüpfen?

Im Spielhandeln haben wir das mitgenommene Geld zur Verfügung, wir könnten sonst die beiden Kühe nicht bezahlen. Beim rechnerischen «Handeln» geht es scheinbar ohne dieses Geld. Doch zeigt sich hier einmal mehr, dass die einzelne Operation beziehungslos bleibt und deshalb wahrscheinlich gar nicht gefunden werden kann, wenn nicht von Anfang an das Handlungsganze gegenwärtig ist. Die Addition von etwas, das eigentlich ausgegeben – weggenommen – wird, kann von Kindern dieses Alters erst verstanden werden, wenn sie erfasst haben, dass beide Ausgaben *zusammen* vom gleichen Anfangsbetrag genommen werden. Ebenso verhält es sich mit der Folge der Operationen innerhalb der ganzen Aufgabe. Ohne diese in ihrem mehrschichtigen Aufbau gegenwärtig zu haben, ohne das Ganze auf einmal als eine geordnete Handlungsfolge zu überblikken, wird es nicht möglich sein, die richtigen Beziehungen innerhalb der Teilschritte herzustellen und im mathematischen Operieren die einzelnen Gegebenheiten durch die entsprechende Operation zu verbinden. Der Versuch, in einer Art Netzplan darzustellen, welche Daten in welcher Phase durch welche Operation miteinander verknüpft werden, gibt einem eine Ahnung von den Ansprüchen, welche mit derartigen Aufgaben und mit der Forderung nach angemessener Darstellung des Lösungsweges an die Kinder gestellt sind.



In solchen «Strukturen»-Labyrinthen sollen die Kinder sich bewegen lernen, sollen ihre «Denk-Ströme» in der richtigen Richtung zum Fliessen kommen. Wodurch eigentlich? In welcher «richtigen» Richtung? Wir meinen, etwas wie ein auslösendes Gefälle, eine Spannung zwischen den einzelnen Gegebenheiten mittels klaren Darstellungen aller Art anzuregen. Wir meinen zu sehen oder zu spüren, wie der Denkstrom beim Kind zu fliessen anhebt, sobald wir uns in solchen Netzen tummeln. Aber es sind unsere eigenen Ströme, die da fliessen. Wir schaffen Abbilder der Vorgänge, die wir für unser eigenes Überlegen und Kombinieren zu erkennen glauben. Denken Kinder wirklich und ausschliesslich auch in solchen Bahnen? Wir sind immer zufrieden und fühlen uns in unseren Vorstellungen bestätigt, wenn Schüler – oft nur einzelne – zu den gleichen Ergebnissen kommen wie wir. Bestätigt das, dass sie wirklich jenen Spuren entlang gedacht haben? Und die andern, die keine Ergebnisse «zeigen», nichts sagen, denken sie nichts? Manchmal entdecken wir zufällig eigenartige Umwege und eigenwillige Sprünge kindlichen Denkens, Irrwege auch. Was steckt dahinter, woher dieses oft so ganz Andere? Gehen wir darauf ein?

Den Sachverhalt erfassen, *lesend zum Verstehen* dessen kommen, was ein Text darstellt: Wenn das selbst im Mathematik-Unterricht *die* Aufgabe wäre, von deren Bewältigung alle weiteren Lösungsschritte abhangen? Lesen lernen, Lesen üben und anwenden im Mathematik-Unterricht? Wenn Lesen-können die Leistung wäre, auch in mathematischen Problemsituationen der Prozess und die Voraussetzung, welche zum Verstehen führt?

Handelnd, hantierend mit Spielmaterial versuchen wir uns mit den Kindern des Sachverhalts zu vergewissern. Wir versuchen, Beschriebenes sichtbar zu machen, Gedrucktes in Handlungsabläufe umzusetzen. Auf allen Darstellungsebenen – handelnd, zeichnend und sprechend – hin und her wechselnd und möglichst ohne drängelnde Ungeduld arbeiten wir mit den Kindern an den Voraussetzungen, aus denen die inneren «Schaltnetze» aufgebaut und die «Schaltprozesse» sich einspielen können. Das heisst auch: Zeit lassen und Zeit geben, warten können, nicht bei allen gleichviel und alles auf einmal erreichen wollen, aber selber sprechend, zeichnend und handelnd Hilfen bereitstellen und Anregungen geben.

Für das weitere Verarbeiten der Aufgabe im Heft bleibt die an der Wandtafel entstandene Lösungsdarstellung stehen; unter Umständen löschen wir die in der Aufbauphase verwendeten Zahlen aus. Die Schüler arbeiten mit den Angaben aus dem Buch weiter.

In einer Anwendungs- und Wiederholungsphase könnte mittelmässigen und schwachen Schülern eine genau gleiche Aufgabe, aber mit veränderten Zahlen gegeben werden. Eine Erschwerung wäre es, wenn man die Reihenfolge der sprachlichen Teilaussagen ändern würde, zum Beispiel so:

«Ein Händler bringt vom Markt noch 1562 Fr. heim. Er hat dort eine Kuh für 2170 Fr. und eine andere für 2350 Fr. gekauft. Am Morgen hatte er 6500 Fr. mitgenommen. Wieviel Geld hat er am Markttag sonst noch ausgegeben?»

Guten Rechnern dürfte auch der Sachverhalt durch zusätzliche Teilhandlungen verändert werden. Aber nicht enttäuscht sein, wenn sie stecken bleiben oder an unseren Fallstricklein stolpern, sondern Freude darüber zeigen, dass man ihnen solche Aufgaben schon zutrauen darf. Vielleicht solche:

«Ein Händler geht mit zwei Rindern und 7500 Fr. Bargeld auf den Markt. Er kauft dort eine Kuh für 2350 Fr. und eine andere für 2580 Fr. Das eine Rind verkauft er für 1970 Fr., das andere für 2050 Fr. Auf der Bank macht er eine Einlage von 5500 Fr. Er bringt noch 853 Fr. heim. Wieviel Geld hat er sonst noch gebraucht?»

Bei beiden Gruppen müssten die Kinder angstfrei arbeiten können, das heisst, es sollte nicht eine Prüfungs- oder Probenatmosphäre erzeugt werden. Wir wollen einzig Hinweise darauf erhalten, wie weit das einzelne Kind mehr oder weniger veränderten Aufgaben gewachsen ist. Welchen Anspruchsgrad bewältigt es? Veränderte Aufgabensituationen, Arbeitsgelegenheiten bieten ausreichend Anhaltspunkte, um uns Urteile über die Leistungsdimensionen eines Kindes zu bilden. Dazu sind Droh- und Imponiergebärden, wie sie von Proben fast immer miterzeugt werden, nicht nötig.

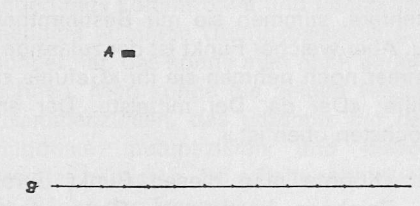
7. Beispiel: Parallelen konstruieren

In den beiden letzten Beispielen haben uns stärker als in den vorausgegangenen einige lerntheoretische Probleme beschäftigt. Ich bin dabei von Unterlagen ausgegangen, welche ich in fremden Schulstuben gesammelt hatte. Nun kehre ich zu Material aus dem eigenen Unterricht zurück.

Wieder einmal in der Bubenschule setzte ich der unteren Abteilung (fünfte/sechste Klasse) eine Konstruktionsaufgabe vor, die in den Entwürfen zum Geometrieteil des Rechenbuches für das siebente Schuljahr aufgetaucht war. Wir hatten vorher mit Zirkel und Lineal das Halbieren von Strecken und das Konstruieren von Senkrechten auf eine gegebene Gerade in spielerischen Arbeiten geübt. Nun wollte ich die Buben mit der neuen Aufgabe etwas auf die Probe stellen und selber ein wenig auf Entdeckungen ausgehen. Ich wusste, dass die Anforderungen der Aufgabe ziemlich über unsere bisherigen Übungen hinausgriffen. Aber ich wollte pröbeln und die Buben in ihrem Lösungsverhalten beobachten.

Die neue Aufgabe besteht aus zwei Teilen.

1. Vom Gehöft A aus soll der kürzeste Weg zur Bahnlinie gezeichnet werden.



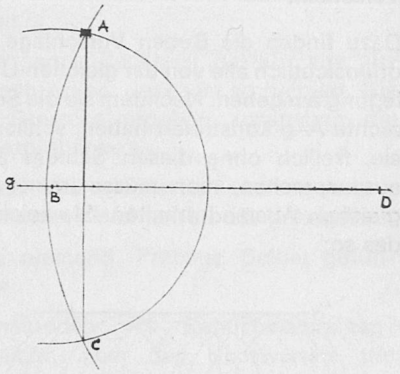
2. Von A aus soll ein Weg erstellt werden, der immer gleich weit entfernt von der Bahnlinie verläuft.

Als Arbeitsgeräte sind erlaubt: Zirkel, Lineal, Bleistift, unliniertes Papier.

Ich lasse die Buben eine Weile allein arbeiten. Es ist nicht verboten, miteinander gedämpft zu sprechen. Ideen und Lösungsversuche dürfen untereinander besprochen und verglichen werden.

In der Gruppe ist Peter weitaus der schwächste Rechner. Das Einmaleins bereitet ihm Sorgen wie kaum etwas anderes. Er ist aber ein guter Zeichner und ein sorgfältiger und genauer Handwerker. Wo er etwas in die Hände nehmen, mit einem Werkzeug arbeiten kann, da ist er ein Meister. Unsere einfachen geometrischen Konstruktionen sagen ihm zu.

Wie ich zur unteren Abteilung zurückkomme, liegt zum ersten Teil der Aufgabe bei den meisten ein fertiger Konstruktionsversuch vor. Die vorausgegangenen Arbeiten haben sie offenbar instand gestellt, das Problem zu erkennen und eine mögliche Lösung zu finden. Peters Zeichnung sieht so aus:



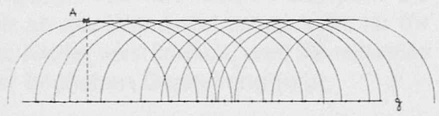
An der Wandtafel wiederholt er seine Konstruktion und erklärt sein Vorgehen:

- «Hier (B) den Zirkel einstecken. Öffnen bis zum Haus (A). Einen Bogen zeichnen.
- Dann hier einstecken (D). Öffnen bis zum Haus. Den andern Bogen zeichnen.
- So (AC) einen Strich ziehen. Man braucht nicht ganz durchzuziehen, weil man nur bis zur Bahnlinie einen Weg macht.»

Peter weiss aus vorausgegangenen Arbeiten, dass die Einsteckpunkte B und D auf der Geraden g (Bahnlinie) beliebig gewählt werden können. Er weiss die Abfolge der Teilhandlungen innerhalb der Gesamtoperation «Fällen einer Senkrechten auf eine Gerade von einem Punkt ausserhalb der Geraden aus». Sein Vorzeigen begleitet er mit Teilsätzen. Aus diesen und aus dem Satz am Schluss wird deutlich, dass er nicht ausschliesslich geometrisch-konstruktiv denkt und handelt, sondern sachbezogen. In seinem Arbeiten bleiben das Haus, der Weg, die Bahnlinie als reale Gegebenheiten gegenwärtig.

Man könnte Bedenken anmelden gegen dieses geometrisch und sprachlich noch wenig präzisierte Hantieren. Ich nehme Unschärfen bewusst in Kauf. Das begrifflich und konstruktiv genauere Arbeiten geht allmählich daraus hervor. Es kommen fortschreitend Phasen, in denen wir auf das Unzulängliche des momentanen Vorgehens stossen und die Ungenauigkeiten zu überwinden versuchen. Die Fachsprache gewöhnen wir uns allmählich an, teils durch unbewusstes Nachahmen, teils durch gezielte Instruktion. Ich achte darauf, dass ich in meinem Begleitsprechen die geometrischen Begriffe verwende, bevor ich sie bei den Schülern bewusst einführe. Etwas von diesem tastenden Suchen nach genaueren Verfahren und nach angemessenen sprachlichen Aussagen kommt in der Arbeit an der zweiten Teilaufgabe zum Vorschein.

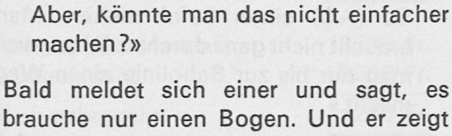
Dazu finden die Buben Vorschläge, die offensichtlich alle von der gleichen Überlegung ausgehen. Nachdem sie die Senkrechte A–g konstruiert haben, schliessen sie, freilich ohne diesen Schluss auch auszusprechen, man müsse immer den gleichen Abstand erhalten. Sie zeichnen das so:



Diese Lösung leuchtet allen ein, vorerst auch dem Lehrer. Die Buben gäben sich wahrscheinlich mit dem Ergebnis zufrieden. Sie hielten das Problem für gelöst, wenn jetzt nicht des Lehrers Einwand käme:

- «Schön, ich sehe, wie ihr überlegt habt. Aber, könnte man das nicht einfacher machen?»

Bald meldet sich einer und sagt, es brauche nur einen Bogen. Und er zeigt vor, wie er das meint:



Nun bereitet es einige Schwierigkeiten, den Knaben weis zu machen, dass eine solche Lösung unzulässig ist. Dabei gehe ich einer schnellen Erklärung durch Vorzeigen und referierendes Begründen bewusst aus dem Wege. Das wäre in dieser Phase vorwegnehmendes Überreden, und das «AH JA» würde des Schülers Abhängigkeit vom Eh-schon-Wissen des Lehrers ebenso demonstrieren, wie es vielleicht auch Einsicht anzeigt, die aus dem inneren Nachvollzug hervorgegangen sein kann. Möglichst keine Lösungs-Vorwegnahmen, keine zu weit vorausgreifenden Belehrungen; aber durch kleine Hinweise die Buben finden machen. Das wäre schöner.

Vorerst sollte ihnen einleuchten, warum ihre bisherigen Lösungsversuche nicht ausreichend sind. Dazu lasse ich sie ihre Konstruktion an der seitlichen Streifentafel wiederholen. Ich stelle die Bedingung auf, mit möglichst grossen Bogen zu arbeiten.

(Wir geben hier nur den oberen Teil der an der Wandtafel entstandenen Zeichnung wieder.)

L.: «Beobachtet genau, wie ihr das Lineal anlegt, bevor ihr die Gerade – den ‚Weg' – zeichnet.»

S.: «Im linken Bogen, da ist es der Punkt A, auf den wir achten, auf den wir den Zeichenstab ausrichten.»

L.: «Und beim rechten?» (D)

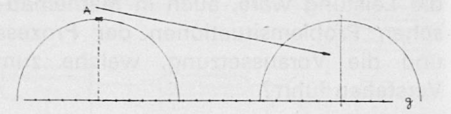
Sogleich sprudelt einer hervor: «Auf den da, den obersten.»

Ich zweifle: «Warum nicht auf den da, links oder rechts davon? Die sind doch gleich weit oben.»

Allmählich scheinen sie zu begreifen, dass es beim zweiten Kreisbogen mehrere Punkte gibt, die wir für «richtig» annehmen könnten. Wenn auch noch undeutlich, scheinen sie doch etwas von der Unschärfe der bisherigen Lösungen zu spüren. Dem Entscheid, dass es nur *einen* richtigen Punkt geben könne und nicht mehrere, stimmen sie mit Bestimmtheit zu. Aber welcher Punkt ist der zulässige? Immer noch nehmen sie ihr «Gefühl» zu Hilfe: «Der da. Der mittelste. Der am höchsten oben ist.»

L.: «Könnte man diesen Punkt durch Zeichnen bestimmen. Genau festlegen? Nicht ungefähr, von blossem Auge, probierend einen annehmen?»

S.: «Ich ziehe hier einen Strich.»



L.: «Wie ziehst du diesen Strich? Von Hand? Ungefähr?»

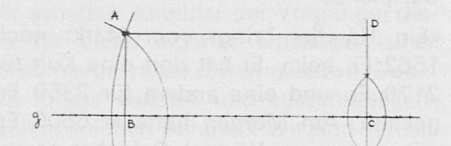
S.: «Man sollte das (rechtwinklige) Dreieck brauchen dürfen.»

L.: «Könnte man sich nicht mit dem Zirkel helfen?»

Man sieht es ihren Gesichtern an und den auf die angefangenen Zeichnungen gerichteten Blicken: Sie denken nach. Man hört es am Schweigen. Nach einer kurzen Weile greift Peter zum Zirkel und führt eine Lösung in einem Zuge, ohne Anstossen, ohne weiteres Tasten zu Ende. Sie fällt zu meiner Überraschung anders aus, als ich sie aufgrund einer Bemerkung, die er am Platz gemacht hatte, als er eben die erste Teilaufgabe gelöst hatte und daran war, die zweite in Angriff zu nehmen, nun erwartet habe. Peter hatte dort erklärt: «Man müsste jetzt eine neue Spiegellinie von A aus machen.»

(Mit «Spiegellinie» meint er die Senkrechte zum gezeichneten Weg in den Punkt A.) Mit deren Konstruktion war er aber nicht zurecht gekommen. Zeitmangel? Unterbruch der Arbeit durch das auswertende Gespräch? Schwierigkeiten mit der Umorientierung?

Peters Lösung, die er nun an der Wandtafel entstehen lässt, sieht so aus:



Er erläutert sein Vorgehen:

- «Die Senkrechte von A aus auf g zeichnen.
- Einen Punkt C auf g wählen.
- In diesen Punkt eine Senkrechte fällen.
- Auf dieser mit dem Zirkel den Abstand AB von C aus abtragen.
- Auf dieser mit dem Zirkel den Abstand AB von C aus abtragen.
- D mit A verbinden: Der gesuchte Weg.»

Jetzt haben wir's: Wir müssen einen zweiten Punkt durch Zeichnen festlegen, um die gesuchte Gerade ziehen zu können.

Ich frage die Buben, worauf man beim Wählen des Punktes C achten müsse. Sie erklären sofort:

S.: «Möglichst weit aussen.»

L.: «Warum?»

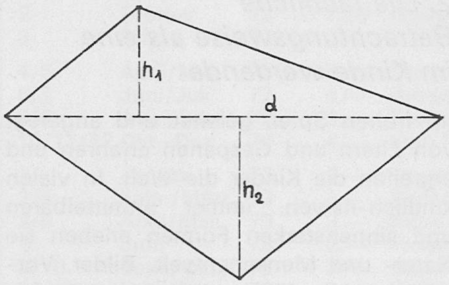
S.: «So wird es genauer. Wenn man einen kleinen Fehler macht, wird er immer grösser, je weiter weg man kommt.»

Was ich hier dargestellt habe, ist in mancher Hinsicht haarsträubend ungenau. Ein Mathematiker schüttelt möglicherweise den Kopf, wenn er diesen Bericht liest. Das Zeichnen meiner Buben ist freilich noch nicht technisch korrekt und ihr ergänzendes Sprechen unbeholfen und vage. Vieles muss man aus ihren Aussagen erspüren. Naiv-unpräzis schliessen sie, wobei sie das Richtige mehr ahnend erfassen, als dass sie es Schritt für Schritt logisch ableiten. Sie «sehen», wie «es» sein müsste, ohne bereits den Weg zu erkennen, auf dem sie zur Lösung gelangen könnten. Ihr Denken tastet um mathematische und geometrische Sachverhalte herum. Zeichnend hantieren sie mit den bewilligten Hilfsmitteln, passen ihre Hand an diese, und probieren einfache konstruktive Verfahren aus. Ich korrigiere wenig an ihren Arbeiten herum. Es werden keine «schönen» Endprodukte zurechtgedökterlet. Die Freude am naiven Handeln, die Sorgfalt im Umgang mit Geräten und Material, den stillen Stolz über gemachte Entdeckungen und Erfahrungen und das allgemeine Wohlbehagen mag ich hier nicht durch schulmeisterliches Eingreifen und Korrigieren erdrücken. Präzision in der zeichnerischen Ausführung und bewussteres Erfassen und Formulieren von Gesetzmässigkeiten sind Ziele späterer Stufen.

8. Beispiel: Berechnen von Trapezoiden

Das Berechnen der Fläche unregelmässiger Vierecke gehört ins Pensum des neunten Schuljahres. In der Regel führte ich diese Aufgaben im Herbstquartal ein. Dabei folgte ich der Anleitung des Schülerbuches: Das Trapezoid in zwei Dreiecke zerlegen, deren Flächen berechnen und die Gesamtfläche durch Addieren der beiden Teilflächen ermitteln.

Wir erlernten das Zerlegen der Trapezoide zeichnerisch darstellen, und entsprechend baute sich unser Lösungsverfahren auf.



$$F_{\triangle_1} = \frac{d \cdot h_1}{2}$$

$$= \frac{8 \cdot 2}{2} \text{ cm}^2 = 8 \text{ cm}^2$$

$$F_{\triangle_2} = \frac{d \cdot h_2}{2}$$

$$= \frac{8 \cdot 3}{2} \text{ cm}^2 = 12 \text{ cm}^2$$

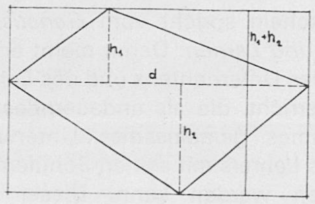
$$F_{⏢} = 20 \text{ cm}^2$$

Aus Rücksicht auf die schwächeren Schüler sah ich jeweilen davon ab, dieses schrittweise Berechnen in einer einzigen Formel zusammenzufassen. Der Weg über das Zerlegen und das Berechnen der Teildreiecke als einander zugeordnete Tätigkeiten soll für die Kinder das Ganze durchschaubar machen. Er soll als Verfahren jederzeit reproduzierbar bleiben. In der Gesamtformel sind die Teilhandlungen nicht mehr erkennbar, das Nacheinander ist aufgehoben. Sie verdunkelt den ganzen operativen Prozess. Legt man das Schwergewicht auf das Vermitteln dieser Formel, so kommt das dem Lernen eines unverstandenen Kalküls nahe. Solche Lernergebnisse entziehen sich aber erfahrungsgemäss leichter dem Gedächtnis als handlungs- und vorstellungsgestützte. Ein selbständiges Wiederfinden aus vorstellbaren Teilhandlungen ist wesentlich schwerer.

Anderntags kommt Sämi und behauptet, nachdem er einige Übungsbeispiele gerechnet hat, das könne man noch anders rechnen. Man könne die beiden Höhen zusammenzählen, das Ergebnis mit der Diagonale multiplizieren und dieses Resultat halbieren. So erhalte man auch die Fläche des Trapezoids.

Ich bin im ersten Moment überrascht. Wie kommt der Bub zu diesem Verfahren? Geben ihm die zwei Schritte zu viel zu tun? Sucht er ein bequemeres Verfahren, das weniger Arbeit gibt? Schulmeisterliches Argwöhneln.

Also frage ich ihn, wie er zu diesem Vorgehen gekommen sei. Was er sich überlegt habe. Seine Erklärung begleitet er mit Skizzieren und Zeigen.



«Also nid he, wenn man die Höhen zusammensetzt, dann wird das ganze Feld so hoch. Und es ist so breit wie die Diagonale. Das gibt jetzt so ein Rechteck mit dem Trapezoid darin. Das Rechteck rechnet man Diagonale mal ganze Höhe. Die Trapezoidfläche ist die Hälfte davon.»

«Woher weisst du, dass die Trapezoidfläche die Hälfte der Rechteckfläche ausmacht?»

«Das ganze Rechteck besteht aus vier Teilrechtecken. Jedes ist so halbiert. Die vier Dreiecke ergeben zusammen die Trapezoidfläche.»

«Prima. Aber wie bist du auf diese Lösung gekommen? Wer hat dir das gezeigt?»

«Hm, niemand. Probiert. Selber gefunden.»

Sternstunden im Schulmeisteralltag? Vielleicht. Aber das Unerwartete tritt nicht ein, wo es nicht erwartet wird.

Aspekte von Wagenscheins pädagogischem Denken

An einigen Stellen dieser Arbeit weise ich auf Martin Wagenschein hin. Mit einer kurzen Skizze über die wesentlichsten Gesichtspunkte seines pädagogischen Denkens schliesse ich das Heft ab.

Wagenschein spricht vom *Genetischen Lehren und Lernen*. Damit meint er eine Weise des Unterrichtens und des Lernens im Unterricht, die als andauerndes und behutsames gemeinsames Unterwegssein des Lehrers mit seinen Schülern beschrieben werden kann. Dieser Weg setzt dort ein, wo Kinder noch auf ihre eigene Weise den Erscheinungen nahe sind, wo sie hingegeben anschauen, selbstvergessen etwas tun und mit ihrem Sinnen und Fühlen Menschen und Welt wahrnehmen und begreifen. Er führt aus dem ursprünglichen Erfahren heraus zu nach und nach genauerem Denken und zu umfassenderem Verstehen. Unterrichten wird Teil des pädagogischen Prozesses, der in eine nie endgültig abgrenzbare und immer über den Bereich des sachbezogenen Lehrens und Lernens hinausgreifende Gesamtsituation eingewurzelt ist.

Aus dem gesamten pädagogischen Denken Martin Wagenscheins können vier Aspekte besonders hervorgehoben werden.

1. Wissenschaftliche Betrachtungsweisen als Gewordenes

Die Wissenschaften in ihrer heutigen Gestalt sind hervorgegangen «aus einer Ehe zwischen der Philosophie und dem Handwerk» (C. F. v. Weizsäcker). Am Anfang war das nachdenkliche Anschauen, das probierende Hantieren und das Nachdenken über das sinnenfällig Erfahrene. Dann rückten die Menschen immer mehr von den Erscheinungen und von deren sinnlicher Wahrnehmung ab, verliessen das reine Anschauen, setzten Hilfsmittel ein, «Instrumente», Geräte. Sie sahen von bestimmten Blickrichtungen ab, beschränkten sich auf besondere Hinsichten. Die Wissenschaften entstanden und damit die Fächer. In ihrer heutigen Gestalt sind sie ein Gewordenes und ihr Werden Spuren des die Welt und ihre Erscheinungen erobernden menschlichen Geistes.

Das ist der *menschheits-genetische* oder der *historisch-genetische Aspekt* in Martin Wagenscheins pädagogischem Denken.

2. Die fachliche Betrachtungsweise als eine im Kinde werdende

Im frühen Spiel, geleitet und angeregt von Eltern und Gespanen erfahren und ergreifen die Kinder die Welt. In vielen kindlich-naiven, immer unmittelbaren und sinnenstarken Formen erleben sie Natur- und Menschenwelt. Bilder, Vorstellungen erfüllen ihr Inneres, bereichern und bewegen Fühlen und Denken. Die Sprache bricht in ihnen auf. Sprache, Umwelt, ihre eigene innere Lebensneugierde und die Herausforderungen der Schule führen sie ihren Weg aus naiven Erfahrens-, Denk- und Verstehensweisen näher und näher an «genauere», an fachspezifischere heran. Sie sind unterwegs «vom ursprünglichen Verstehen zum exakten Denken». Das ist der *kindheits-genetische* oder auch *jugend-genetische Aspekt*.

Der historisch-genetische und der jugend-genetische Weg sind Wegstrecken des erwachenden Geistes. Sie zeigen verwandte Züge. Der Werdegang einer Wissenschaft, des Faches, und die Art und Weise, wie sich kindliche Beziehungen zu den Gegenständen und Themen des Faches entfalten, ähneln sich. In den kindlichen Lernprozessen spiegeln sich geistesgeschichtliche Entwicklungslinien. Im Werdegang des Kindes wiederholt sich manches Wesentliche – nicht alles – aus dem Werden des Faches.

3. Unterricht: Helfen durch tätige Aneignung und Sprechen

Dem genetischen Weg entsprechend führt der Unterricht vorerst mit den Dingen, den Themen und Problemen zusammen. Anschauen, still werden, warten. Im Stillwerden hebt das Nachdenken an, und aus dem Nachdenken erwacht das Sprechen und das Gespräch. Aber dieses Sprechen ist nicht gleich fertig da. Es wächst heraus aus der kindlich-naiven Verbundenheit mit den Erscheinungen und aus dem Hören auf das, was die Kameraden, der Lehrer, die Mitmenschen zu der zur Sprache stehenden Sache sagen. Anfangs holperig, unscharf, bruchstückhaft und trotzdem oft eigenwillig treffsicher. Deshalb: Das Sprechen und das Aufschreiben in Obhut nehmen und es behutsam von Stufe zu Stufe führen auf dem Weg zu immer grösserer Klarheit und Präzision. Da ist es wichtig, dass die Kinder Vertrauen haben – zum Lehrer, zu den Kameraden, zur Sache – und zu sprechen und zu schreiben wagen. Sie müssen in diesem Vertrauen sich geborgen und ermutigt fühlen und daraus das Zutrauen zu sich selbst finden. Nicht alles gleich korrigieren, keine Aussagen zurückweisen, aussprechen lassen und die kindlichen Beiträge ernst nehmen. Mut machen. Das bedeutet, dass der Lehrer selber zu lernen bereit bleiben muss. Zu lernen an den Sachen und an der Art, wie die Kinder sich mit ihnen einlassen und sie ergreifen. Er muss erkennen lernen, welche Stadien auf ihrem Weg sie erreicht haben und wie er ihnen fühlsam weiterhelfen kann.

4. Auswählen: Das exemplarische Prinzip

Nicht alles, was Wissenschaft an Inhalten bereithält, ist in gleichem Masse geeignet, den Heranwachsenden zu dienen. Nicht alles fördert und fordert heraus. Bei der Betrachtung der historisch-genetischen und der jugend-genetischen Entwicklung etndecken wir verwandte Züge. Phasen des Durchbruchs im jugendgenetischen Prozess, die sich gleichsam in solchen des historisch-genetischen Weges spiegeln, weisen uns beim Auswählen, beim Akzentuieren unserer Themen auf jene inhaltlichen Verdichtungen hin, um die sich Schwerpunkte unseres Unterrichts herausbilden lassen. In ihnen sind geistige Auf- und Ausbrüche möglich, welche aber die Schule wohl erwarten kann und erhoffen muss, die wir planend vorsehen und wollen dürfen, über die wir hingegen trotz solcher Voraussicht nicht zu gebieten vermögen.

Werke von Martin Wagenschein

Die pädagogische Dimension der Physik. Westermann Braunschweig 1965². Wagenscheins aufschlussreichstes Werk.

Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken. 2 Bände. Klett Stuttgart 1965 und 1970. Diese Sammelbände enthalten alle vor 1970 in Zeitschriften erschienen Aufsätze und Abhandlungen.

Verstehen lehren. Beltz Weinheim 1973⁴. Enthält die für den Begriff des exemplarischen und des genetischen Lehrens zentralen Aufsätze.

uns dabei über Gebühr gebunden, abhängig und eingespannt in einen unpersönlichen Betrieb. Wir fühlen uns in unserem Bedürfnis nach Selbstsein bedroht. Doch weder von unseren Bedürfnissen und Erwartungen allein noch von denen der Eltern und der Öffentlichkeit dürften wir uns im Grunde genommen leiten lassen, sondern in erster Linie von denen der Kinder. Ist es ihnen wohl in unserem Unterricht? Haben sie Freude an den Aufgaben und Arbeitssituationen, die wir ihnen anbieten? Fühlen sie sich gefordert, etwas zu lernen und zu leisten? Empfinden sie Genugtuung über erzielte Resultate, oder baut sich bei ihnen das Gefühl auf, sinnlos Stunden abzusitzen? Lernen sie den gesitteten Umgang mit andern, auch Unlust und Missmut ertragen, überwinden? Lernen sie Dinge und Menschen wertschätzen und achten? Verstehen und bejahen sie sogar das Wechselspiel zwischen Fordern und Entspannen? Auch jenes zwischen Eigen- und Gemein-Sinn?

Verantwortung bedingt Bindung. Das bedeutet, dass wir unsere Eigeninteressen zügeln, uns selber kontrollieren und führen. Auch wenn ich oft unter dem Eindruck stehe, Schule werde zu eng, zu stur gestaltet, und das auch da und dort in dieser Arbeit zum Ausdruck bringe, als einen Freipass für zielloses Experimentieren und für sorgloses Treibenlassen dürfte das Postulat für einen offenen Unterricht niemals genommen werden. Unterricht findet nicht zu beliebigem Zeitvertreib statt. Er hat weder Unterhaltungs- noch Konsum-Mentalitäten zu dienen. Wir sind und bleiben gebunden durch Verantwortung, die nicht allein auf uns bezogen sein darf, auch dort, wo wir uns Spiel-Räume schaffen. Unser persönliches Bedürfnis, aus dem System Schule ab und zu auszubrechen, seine Rituale und Normen nicht immer bierernst zu nehmen, kann nicht einzige Leitlinie sein. Wir tragen Verantwortung für etwas, das ausserhalb unseres Eigen-Sinns liegt: Kinder brauchen uns als Fordernde und Fördernde.

Deshalb entstehen vor, nach, zwischen grösseren und kürzeren Phasen spielerischer Offenheit auch wieder solche mit straffer und fordernder Führung. Sie sollen von Wohlwollen und Fühlsamkeit gegenüber den Bedürfnissen und Schwierigkeiten der Kinder getragen sein. Fordern und entspannen, abgrenzen und offen halten, führen und gewährenlassen: Zwischen diesen Polen fortwährend die «feine Linie» suchen, das ist gemeinsame Aufgabe in einer gemeinsamen Lebenssituation, die Schule heisst.

Hans Egger

Liste der lieferbaren Hefte der «Schulpraxis» (Auswahl)

Nr.	*Monat*	*Jahr*	*Preis*	*Titel*
2	Februar	72	1.50	Audiovisueller Fremdsprachenunterricht
3	März	72	2.—	Die Landschulwoche in Littewil
4/5	April/Mai	72	3.—	Das Projekt in der Schule
6/7	Juni/Juli	72	4.—	Grundbegriffe der Elementarphysik
8/9	Aug./Sept.	72	3.—	Seelenwurzgrat – Mittelalterliche Legenden
10/11/12	Okt.–Dez.	72	4.—	Vom Fach Singen zum Fach Musik
1	Januar	73	3.—	Deutschunterricht
2/3	Febr./März	73	3.—	Bücher für die Fachbibliothek des Lehrers
4/5	April/Mai	73	3.—	Neue Mathematik auf der Unterstufe
6	Juni	73	2.—	Freiwilliger Schulsport
9/10	Sept./Okt.	73	3.—	Hilfen zum Lesen handschriftlicher Quellen
11/12	Nov./Dez.	73	3.—	Weihnachten 1973 – Weihnachtsspiele
1	Januar	74	2.—	Gedanken zur Schulreform
2	Februar	74	1.50	Sprachschulung an Sachthemen
3/4	März/April	74	3.—	Pflanzen-Erzählungen
5	Mai	74	2.—	Zum Lesebuch 4, Staatl. Lehrmittelverlag Bern
6	Juni	74	1.50	Aufgaben zur elementaren Mathematik
7/8	Juli/Aug.	74	3.—	Projektberichte
9/10	Sept./Okt.	74	2.—	Religionsunterricht als Lebenshilfe
11/12	Nov./Dez.	74	3.—	Geschichte der Vulgata – Deutsche Bibelübersetzung bis 1545
1/2	Jan./Febr.	75	3.—	Zur Planung von Lernen und Lehren
3/4	März/April	75	3.—	Lehrerbildungsreform
5/6	Mai/Juni	75	3.—	Geographie in Abschlussklassen
7/8	Juli/Aug.	75	3.—	Oberaargau und Fraubrunnenamt
9	September	75	1.50	Das Emmental
10	Oktober	75	3.—	Erziehung zum Sprechen und zum Gespräch
11/12	Nov./Dez.	75	3.—	Lehrerbildungsreform auf seminaristischem Wege
15/16	April	75	4.—	Schulreisen
5	Januar	76	3.—	Gewaltlose Revolution, Danilo Dolci
13/14	März	76	3.—	Leichtathletik
18	April	76	3.—	Französischunterricht in der Primarschule
22	Mai	76	3.—	KLunGsinn – Spiele mit Worten
26	Juni	76	3.—	Werke burgundischer Hofkultur
35	August	76	3.—	Projektbezogene Übungen
44	Oktober	76	3.—	Umweltschutz
48	November	76	3.—	Schultheater
4	Januar	77	3.—	Probleme der Entwicklungsländer (Rwanda)
13/14	März	77	3.—	Unterrichtsmedien
18	Mai	77	3.—	Korbball in der Schule
21	Mai	77	3.—	Beiträge zum Zoologieunterricht
26–31	Juni	77	3.—	Kleinklassen/Beiträge zum Französischunterricht
34	August	77	3.—	B. U. C. H.
39	September	77	3.—	Zum Leseheft «Bä»
47	November	77	3.—	Pestalozzi, Leseheft für Schüler
4	Januar	78	3.—	Jugendlektüre
8	Februar	78	3.—	Beiträge zur Reform der Lehrerbildung im Kt. Bern
17	April	78	3.—	Religionsunterricht heute
25	Juni	78	3.—	Didaktische Analyse
35	August	78	3.—	Zum Thema Tier im Unterricht
39	September	78	3.—	Australien
			2.—	Arbeitsblätter Australien (8 Blatt A4)
43	Oktober	78	3.—	Geschichte Berns 1750–1850, Museumspädagogik
			2.50	Arbeitsblätter (9 Blatt A4)
4	Januar	79	3.—	Lehrer- und Schülerverhalten im Unterricht
8	Februar	79	3.—	Die Klassenzeichnung
17	April	79	3.—	Didaktik des Kinder- und Jugendbuchs
25	Juni	79	3.—	Alte Kinderspiele
35	August	79	3.—	Umgang mit Behinderten
43	Oktober	79	3.—	Theater in der Schule
5	Januar	80	3.—	Die ersten Glaubensboten / Bernische Klöster 1
9	Februar	80	3.—	Denken lernen ist «Sehen-lernen»

Die Preise sind netto, zuzüglich Porto (keine Ansichtssendungen)
Mengenrabatte: 4–10 Expl. einer Nummer: 20%, ab 11 Expl. einer Nummer: 25%

Bestellungen an: **Keine Ansichtssendungen**

Eicher+Co., Buch- und Offsetdruck

3011 Bern, Speichergasse 33 – Briefadresse: 3001 Bern, Postfach 1342 –Telefon 031 22 22 56