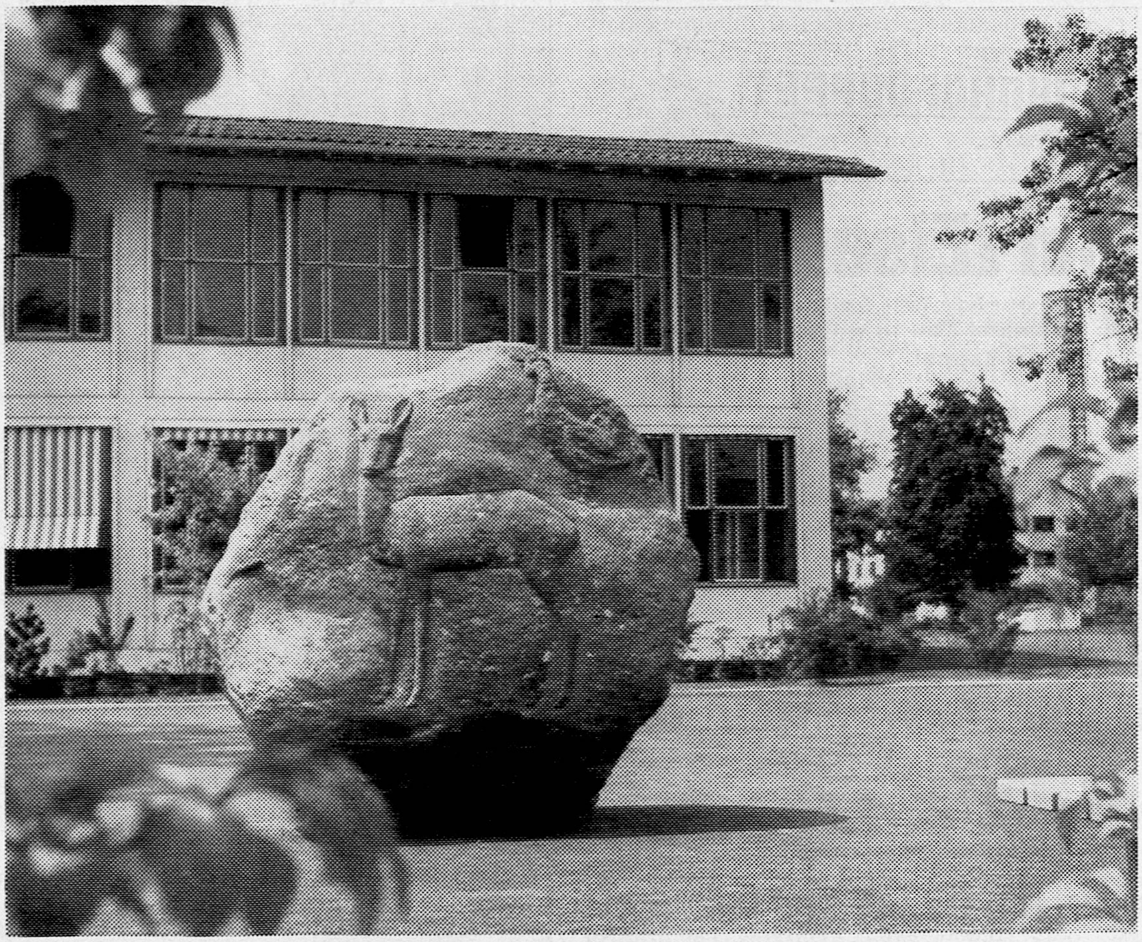
SCHWEIZERISCHE
LEHRERZEITUNG
ORGAN DES SCHWEIZERISCHEN LEHRERVEREINS



(Aufnahme: Theo Frey; Klischee: NZZ)

Künstlerischer Schmuck einer Schulhausanlage

Mit schönem Erfolg bemühen sich die heute wirkenden Architekten nicht bloss um Gebäulichkeiten, sondern auch um die sinnvolle Ausgestaltung des Umschwungs, was für das Leben und Wirken in einem Schulhaus von grosser Bedeutung ist. Unsere Abbildung macht mit einer originellen Parkanlage vor dem kürzlich eingeweihten Schulhaus an der Eugen-Huber-Strasse in Zürich-Altstetten bekannt. Bildhauer Hans Aeschbacher hat einen massiven roten Ackerstein mit Tierreliefs geschmückt. Da sind mit geschmacksicherer Hand Fische und Eidechsen, ein Reh, eine Stockente und ein Hahn, eine Eule und Kröten in den farbig lebendigen Block eingehauen. Der ungezwungen in die vorstädtische Atmosphäre sich einfügende Stein, der von der Stadt Zürich gestiftet wurde, stellt eine schöne Lösung dar, den Erst- bis Drittklässlern Freude an der einheimischen Kunst beizubringen.

SLZ 95. Jahrgang Nr. 14/15 S. 257…280 Zürich, 14. 4. 1950

Versammlungen

LEHRERVEREIN ZÜRICH.

— **Lehrerturnverein.** Montag, 17. April, 17.45 Uhr, Turnhalle Sihlhölzli. Lektion II. Stufe, Knaben. Leitung: Dr. E. Leemann.

— **Lehrergesangverein.** Freitag, 21. April, 19.30 Uhr, Hohe Promenade. Sängerversammlung (Arbeitsprogramm).

— **Lehrerinnenturnverein.** Dienstag, 18. April, 17.30 Uhr, Turnhalle Sihlhölzli. Uebungsgruppen II. Stufe. Leit.: Dr. Wechsler.

— **Lehrerturnverein Limmattal.** Montag, 17. April, 17.30 Uhr, Kappeli. Training, Spiel. Leiter: A. Christ. Montag, 24. April, und 1. Mai fallen die Uebungen aus.

— **Lehrerturnverein Oerlikon und Umgebung.** Freitag, 21. April, 17.30 Uhr, Turnhalle Allenmoos. Halbjahresziele Knaben II. Stufe; Spiel. Leitung: Dr. W. Wechsler.

REALLEHRERKONFERENZ DES KANTONS ZÜRICH. Samstag, 29. April, in Wallisellen. Voranzeige: Naturkundlicher Lehrausflug in Hagenholz.

ANDELFINGEN. Lehrerturnverein. Dienstag, 25. April, 18.30 Uhr. Lektion Mädchenturnen III. Stufe.

BASELLAND. Lehrergesangverein. Samstag, 22. April, Männerstimmen 14 Uhr, Frauenstimmen 15.30 Uhr, im Restaurant «Ziegelhof», Liestal. Probe: Deutsches Requiem von Johannes Brahms.

SCHWEIZERISCHE LEHRERZEITUNG

Beilagen — 6mal jährlich: Das Jugendbuch, Pestalozzianum, Zeichnen und Gestalten — 4mal jährlich: Der Unterrichtsfilm 2mal monatlich: Der Pädagogische Beobachter im Kanton Zürich

95. Jahrgang Nr. 14/15 14. April 1950 Erscheint jeden Freitag Redaktion: Beckenhofstr. 31 Postfach Zürich 35 Telephon (051) 28 08 95
Administration: Stauffacherquai 36 Postfach Hauptpost Telephon (051) 23 77 44 Postcheck VIII 889

Ein Mathematikexamen

Dass die Examen ein uraltes, aber leider immer noch notwendiges Übel sind, wird von niemandem bestritten. Dass dieses Übel auch ganz grosse Männer in ihrer Jugend in schwierige Situationen gebracht haben, zeigt ein Bericht, den uns Churchill in seinen Jugenderinnerungen bietet. Er erzählt darin von seinem Mathematikexamen, das ihm die Tore für den Eintritt in die Kavallerieschule von Sandhurst öffnen sollte. Ein Erfolg in mindestens drei Fächern war unerlässlich. Zu diesen drei Fächern gehörte auch die Mathematik, zu der er während der ganzen Schulzeit nur sehr entfernte Beziehungen gehabt hatte. Er schreibt in seinem ca. vierzig Jahre später geschriebenen Rückblick wie folgt:

«Während meines ganzen Lebens hatte ich von Zeit zu Zeit sehr plötzlich unangenehme Dinge zu bewältigen, aber ich betrachte die Erlernung der Mathematik in sechs Monaten als meinen Lebenstriumph — moralisch und technisch. Wenn ich zurückschaue auf diese mit schweren Sorgen beladenen Monate, so tauchen ihre hervorstechendsten Züge aus dem Abgrunde meines Gedächtnisses wieder herauf.

Wir waren in dem Märchenlande angelangt, an dessen Toren geschrieben stand: ‚Quadratische Gleichung'. Diese wies mit einer seltsamen Grimasse den Weg zu der Index-Theorie, welche wiederum den Eindringling der vollen Schärfe der Binomlehre aushändigte. Weitere düstere Gemächer, schwach beleuchtet durch dumpfe, schweflige Feuer, waren berüchtigt, einen Drachen namens Differentialrechnung zu enthalten. Aber dieses Monstrum war jenseits der Grenzen, die der Prüfungsexperte gesetzt hatte. Wir schlugen eine andere Richtung ein, zwar nicht nach angenehmen Hügelhöhen, sondern in einen seltsamen Korridor, gefüllt mit Dingen, wie Amagrame und Geheimzeichen, genannt Sinus, Cosinus und Tangenten. Sie scheinen sehr wichtig zu sein, besonders wenn sie miteinander oder mit sich selbst multipliziert wurden. Aber sie hatten auch einen Vorteil: man konnte seine Entwicklung auswendiglernen. Und das entschied über mein ganzes zukünftiges Leben.

Es wurde mir eine Aufgabe gestellt, deren hässliches Gesicht ich wenige Tage vorher gesehen hatte und das ich daher sofort erkannte.

Wenn dieser alte, schwermütige Prüfungsexperte nicht gerade diese Frage über Cosinus und Tangenten gestellt hätte, welche ich zufällig kurz vorher auswendiggelernt hatte, so wäre nicht eines der folgenden Kapitel geschrieben worden. Vielleicht wäre ich ein Mann der Kirche geworden und hätte seltsame Predigten gehalten. Vielleicht hätte ich mich in die Kolonien gewandt, in der Hoffnung, den Eingeborenen zu gefallen oder sie zu befriedigen, und hätte so eine Karriere gemacht. Ich wäre vielleicht sogar unter die Advokaten gegangen, und Leute wären gehängt worden, weil ich sie verteidigt hatte.

In jedem Falle — mein Leben wäre völlig anders geworden, und dies würde eine grosse Zahl andrer Leben geändert haben, und dies wiederum andere und so weiter . . . Kurz, dieser Prüfungsexperte hat den ganzen Verlauf der Ereignisse meines Lebens in eine Bahn geleitet, indem er, aus Routine oder aus Laune, diese Frage stellte.

Ich habe seither viele Prüfungsexperten gesehen. Ich habe sie in Fleisch und Blut gesehen. Ich habe sogar ihren Oberexperten eingesetzt (als Minister des Innern H. M.). Wenige von ihnen mögen sich völlig klar sein, welch entscheidenden Einfluss im menschlichen Leben ein Examinator ausübt.»

Und die Moral dieses Geschichtleins?

Wir wollen nicht nachlassen in unsern Bemühungen, im notwendigen Übel der Examen das Übel auf ein Minimum zu reduzieren. *H. M.*

Das Koordinatensystem in Praxis und Theorie

Einführende Betrachtung

Vor einiger Zeit ging eine Notiz durch die Zeitung, die über den geplanten Neubau britischer Städte berichtete. Es ist kaum anzunehmen, dass Europa nach diesem Krieg, obwohl er so vieles — Materielles wie Ideelles — in einem noch nie dagewesenen Umfang gründlichst zerstörte, eher geneigt sein werde, beim Neubau oder Wiederaufbau seiner Städte einen in Amerika längst heimisch gewordenen Brauch im schnellen Städtebau zu übernehmen. Aber angenommen, eine Stadt würde nach folgendem nüchternem Plan gebaut: eine Schar paralleler Strassen in gleichen Abständen werde von einer ebensolchen Schar paralleler Strassen rechtwinklig gekreuzt. Der Einfachheit halber möge die eine Stıassenschar in nordsüdlicher, die andere in ostwestlicher Richtung verlaufen. Jede nordsüdlich gerichtete Strasse heisse kurz NS-Strasse, jede Strasse in ostwestlicher Richtung OW-Strasse. Solche aus den Anfangsbuchstaben eines Wortgefüges zusammengesetzten Abkürzungen sind dem modernen Menschen geläufig. Man denke bloss an SBB, UNO, USSR, UNRRA usw. Um die Strassen derselben Schar voneinander zu unterscheiden, könnte man eine von ihnen auszeichnen, sie Hauptstrasse dieser Schar nennen und sie kurz mit der Marke 0 (Null) versehen. Die Haupt-NS-Strasse würde dann die Bezeichnung

0-NS (gelesen: Null-NS) und die Haupt-OW-Strasse die Bezeichnung 0-OW (gelesen Null-OW) tragen. Die beiden unmittelbar benachbarten Strassen derselben Schar würden die Marken $+1$ und -1, die zwei nächsten von der Hauptstrasse gleichweit entfernten Strassen dieser Schar die Marken $+2$ und -2 erhalten usw. Die Lage des Platzes A der Fig. 1, die eine «Vogelschauaufnahme» des Strassennetzes darstellen soll,

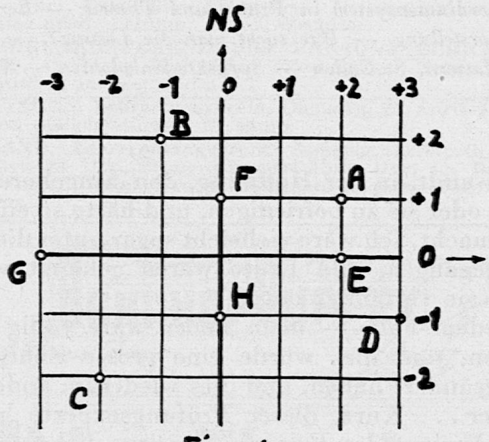


Fig. 1

liesse sich durch die Tatsache fixieren, dass A an der Kreuzung von $+2$-NS und $+1$-OW liegt. Man dürfte daher die Adresse von A kurz so angeben: $(+2; +1)$, wobei man, um diese verstehen zu können, vorher vereinbaren müsste, dass zum Beispiel stets die zuerst angeschriebene Zahl die NS-Strassennummer und die folgende Zahl die OW-Strassennummer zu bedeuten haben. Demnach würden die Adressen der Punkte B, C, D der Fig. 1 der Reihe nach so lauten: $B\,(-1; +2)$, $C\,(-2; -2)$, $D\,(+3; -1)$ und die Punkte E, F, G, H der gleichen Figur wiesen die Adressen: $E\,(+2; 0)$, $F\,(0; +1)$, $G\,(-3; 0)$ und $H\,(0; -1)$ auf. Jeder Kreuzungspunkt des Strassennetzes würde auf diese Weise *ein einziges Paar* ganzer Zahlen zugewiesen erhalten, und umgekehrt würde jedes aus den zur Verfügung stehenden Nummern beider Strassenarten gebildete Zahlenpaar unter Beachtung der Reihenfolge *einen einzigen* Kreuzungspunkt festlegen.

Das Interessante am geschilderten Vorgehen ist das Aufweisen einer Möglichkeit, die Lage *gewisser* Punkte des Stadtgebietes mit Hilfe geordneter Zahlenpaare zu kennzeichnen. Aber warum soll das nur bei gewissen Punkten möglich sein? Und verallgemeinernd: kann man denn nicht auch die Lage *irgend eines* Punktes der *unbegrenzt und unendlich gedachten Zeichenebene* durch ein geordnetes Zahlenpaar wiedergeben? Zwecks Beantwortung der gestellten Frage deute man die Zeichenebene als eine unbegrenzte und unendlich ausgedehnte «Punktestadt», fasse zwei beliebige senkrecht aufeinanderstehende Geraden in ihr als 0-NS- und 0-OW-Strassen (sprich: Null-NS- bzw. Null-OW-Strasse) auf und betrachte jeden Punkt als Kreuzungspunkt einer NS- und einer OW-Strasse. Gelingt es, solche Strassen zahlenhaft zu markieren, so ist die Möglichkeit der Kennzeichnung der Lage eines beliebigen Punktes der Ebene durch ein geordnetes Zahlenpaar nachgewiesen. Die Fig. 1 gibt uns hiefür einen Wink: denkt man sich beispielsweise dort zwischen $+1$-NS und $+2$-NS, genau mittendurch, eine NS-Strasse gelegt, so wird man ihr vernünftigerweise die Bezeichnung $+1\frac{1}{2}$-NS beilegen dürfen. Spaziert man auf einer Hauptstrasse der einen Schar in einer Richtung, so erscheinen an den jeweiligen Kreuzungspunkten dieser Strassen die Nummern der Strassen der anderen Schar. So zum Beispiel wird man beim Promenieren entlang der 0-OW-Strasse von links nach rechts, bei jedem Kreuzungspunkt die Nummer einer NS-Strasse vorfinden. Legt man daher einem Kreuzungspunkte einer Hauptstrasse der einen Schar mit einer Strasse der anderen Schar probeweise die Nummer dieser Strasse bei, so bildet sich auf dieser Hauptstrasse eine Art Skala mit der Längeneinheit 01 heraus (siehe Fig. 2). Unterteilt man diese Skalen beliebig fein, wodurch es möglich wird, jeden Punkt der Hauptstrasse zahlenmässig zu erfassen, so kann man umgekehrt, der durch einen solchen Teilpunkt gelegten neuen Strasse die Zahlenmarke dieses Teilpunktes als (allerdings etwas merkwürdig anmutende) Nummer zuweisen. Dieser Gedanke birgt auch die Lösung der gestellten Frage in sich. Man braucht nämlich nur irgend einen Punkt der Zeichenebene als Kreuzungspunkt zweier nun numerierter ungleichnamiger Strassen aufzufassen. Somit kann wirklich die Lage *irgend eines Punktes* der Zeichenebene durch ein geordnetes Zahlenpaar wiedergegeben werden. Die Zahlen dieses Paares heissen die *Koordinaten* (numeri coordinati = zugeordnete Zahlen) des betreffenden Punktes; das Zahlenpaar selbst die *Adresse* des Punktes und die Gesamtheit der Adressen aller Punkte der Zeichenebene das *Koordinatensystem*, genauer das *rechtwinklige* oder *Cartesische Koordinatensystem* (Renatus Cartesius ist der latinisierte Name des berühmten Philosophen und Mathematikers René Descartes, 1596—1650).

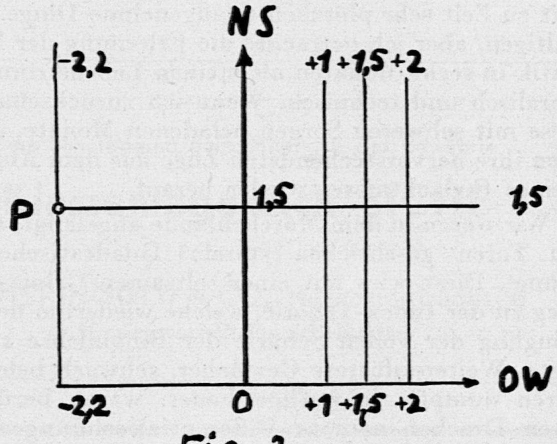


Fig. 2

Die beiden Hauptstrassen heissen in diesem Zusammenhange *Koordinatenachsen*, und, wenn sie unterschieden werden sollen, heisst die der 0-OW-Strasse entsprechende Gerade *Abszissenachse*, die andere *Ordinatenachse*. Die auf der Abszissenachse abzulesenden Zahlen, also die *ersten* Koordinaten, d. h. die Zahlen, die an erster Stelle in einer Adresse anzuführen sind, nennt man *Abszissen*; die *zweiten* Koordinaten *Ordinaten*. So ist beispielsweise in der Adresse des Punktes $P\,(-2,2; +1,5)$ $-2,2$ die Abszisse und 1,5 die Ordinate von P.

Es mögen nun die Werte einer veränderlichen Grösse A Abszissen und die Werte einer anderen veränderlichen Grösse B Ordinaten bedeuten. Man prägt hierfür die Redensart: die Abszissenachse werde zur A-Achse, die Ordinatenachse zur B-Achse, und spricht kurz vom AB-Koordinatensystem. Ferner werde in der Koordinatenebene, d. h. in der Zeichenebene, irgend ein Kurvenbogen gezeichnet (Fig. 3). Die Adresse irgend eines Punktes dieses Bogens ordnet einem A-Wert einen bestimmten B-Wert zu und umgekehrt. So wird zum Beispiel dem A-Wert 2 in der Fig. 3 der B-Wert 1,5 zugeordnet. Daher erzeugt die Kurve eine Abhängigkeitsbeziehung, einen sogenannten funktionalen Zusammenhang, zwischen den veränderlichen Grössen A und B. Die Kurve ist gewissermassen die Veranschaulichung, das Schaubild, wie man sagt, dieses Abhängigkeitsverhältnisses zwischen A und B und heisst kurz AB-Diagramm.

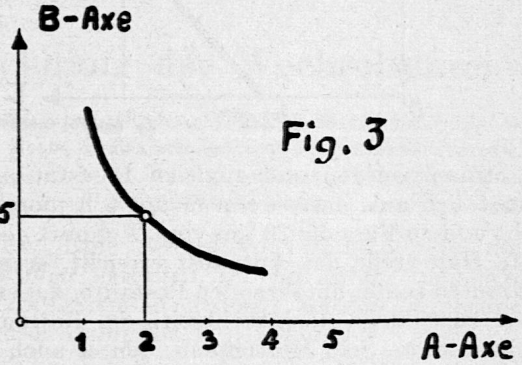


Fig. 3

Aber auch umgekehrt: überall dort, wo Abhängigkeitsbeziehungen zwischen zwei veränderlichen Grössen bestehen, spielen Koordinatensysteme eine Rolle. Man denke zum Beispiel an den Tagesverlauf der Temperatur. Da ist die Zeit die eine Veränderliche, die Temperatur die andere. Bringt man auf der Abszissenachse eine Zeitskala und auf der Ordinatenachse eine Temperaturskala an, d. h. macht man die Abszissenachse zur Zeitachse und die Ordinatenachse zur Temperaturachse, so kann man jeden in Betracht kommenden Zeitwert mit dem zugehörigen Temperaturwert zur Adresse eines Punktes in der Koordinatenebene kombinieren. Die Gesamtheit aller so entstehenden Punkte veranschaulicht den Tagesverlauf der Temperatur. Solche Schaubilder zeichnet die Schreibfeder eines Thermometrographen (schreibendes Thermometer), die in den Wetterwarten vorzufinden sind, welche in grossen Städten an öffentlichen Plätzen postiert sind.

Bewegt sich ein mobiler Punkt irgendwie, so liefert seine Bewegung einen funktionalen Zusammenhang zwischen seiner Distanz von einem angenommenen Nullpunkt der Bahn (Wegkoordinate) und der Zeit. Das zugehörige Schaubild in einem Weg-Zeit-Koordinatensystem heisst also *Weg-Zeit-Diagramm.* Man kann nun zunächst fragen: welche Bewegungen werden durch besonders einfache Diagramme veranschaulicht? Beschränken wir uns auf geradlinige Bewegungen! Die Ordinatenachse sei die Bahngerade. Betrachten wir vorerst den Fall, in dem das Diagramm eine Gerade ist. Nimmt man zunächst diese Gerade parallel zur Zeitachse, zum Beispiel durch den Punkt (0;3) gehend an, so heisst das: in jedem Zeitpunkt befindet sich der mobile Punkt an gleicher Stelle, nämlich im Abstand 3 Längeneinheiten vom Nullpunkt der Bahn entfernt; er ist also in Ruhe. Somit: *durch eine Parallele zur Zeitachse wird der Ruhezustand angedeutet.* Nun denke man sich die Diagrammgerade der Fig. 4 um den Punkt (0;3) um einen spitzen Winkel α zunächst im Gegenuhrzeigersinne gedreht. Die Endlage ist in Fig. 5 dargestellt. Geht man von den Punkten 1, 2, 3 . . . usw. der Zeitachse aus, parallel zur Wegachse auf die Diagrammgerade und von dort parallel zur Zeitachse auf die Weggerade über, so erkennt man, dass der mobile Punkt sich vom Nullpunkt der Bahn gleichförmig auf der Wegachse entfernt, und zwar um so schneller, je grösser α ist.

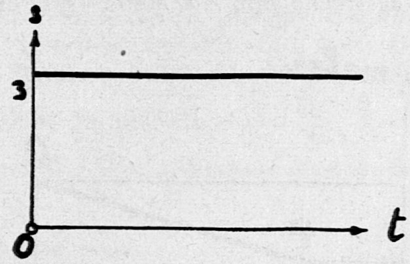


Fig. 4

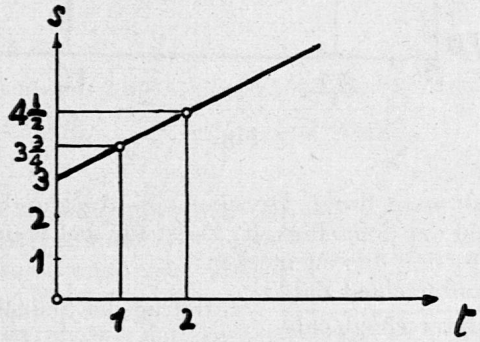


Fig. 5

Aus der Fig. 6, die die Endlage für die Drehung der Diagrammgeraden um (0; 3) im Uhrzeigersinne wiedergibt, ist ebenfalls zu erkennen, dass sich der mobile Punkt gleichförmig in Richtung auf den Nullpunkt zu bewegt, und zwar wiederum um so schneller, je grösser α ist. Übrigens ist die Schnelligkeit den Figuren 5 und 6 leicht zu entnehmen. So hat der mobile Punkt in

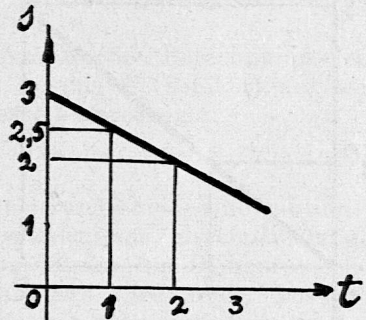


Fig. 6

Fig. 5 die Schnelligkeit $^3/_4$ Schnelligkeiteinheiten und die halbe Schnelligkeiteinheit in Fig. 6. *Ein geradliniges, nicht zur Zeitachse paralleles Weg-Zeit-Diagrammstück veranschaulicht also stets eine gleichförmige Bewegung, die um so schneller verläuft, je steiler dieses Stück ist.*

Befindet sich der sich gleichförmig bewegende Punkt beispielsweise am Ende der 5,2-ten Sekunde seit Beginn der Beobachtung in 8 Meter Entfernung vom Bahnnullpunkt und am Ende der 16. Sekunde im Abstand 9,8 Meter, so ist das auf den Zeitraum 5,2 sec bis 16 sec bezogene Wegzeitdiagramm die Strecke PQ. Auf der s-Achse ergibt sich zugleich die in den (16—5,2) = 10,8 Sekunden zurückgelegte Wegstrecke (9,8—8) = 1,8 Meter. Daher beträgt die Schnelligkeit $\frac{1,8}{10,8} = \frac{1}{6}$

Meter per Sekunde. Bezeichnet man ganz allgemein die in Frage kommende Zeitdifferenz symbolisch mit Δt sec (gelesen: delta t) und die in dieser Zeit zurückgelegte Wegstrecke mit Δs Meter (gelesen: delta s),

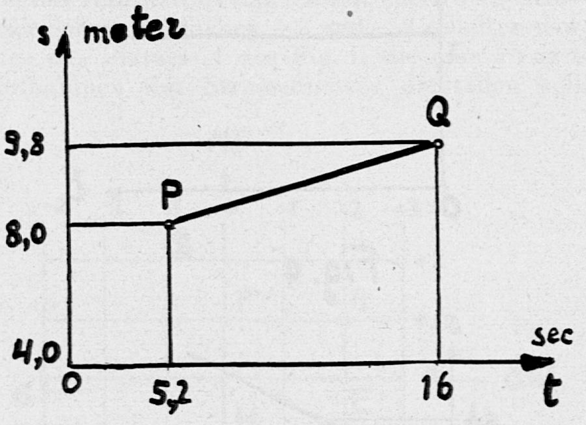
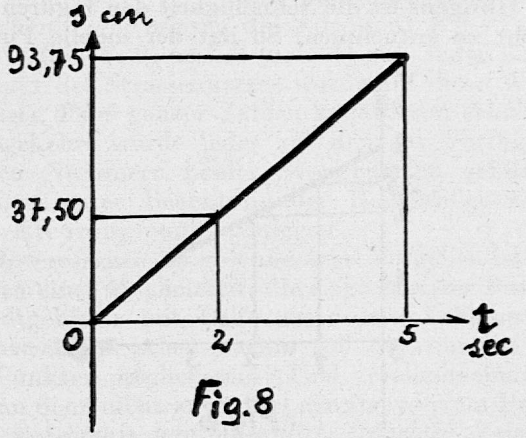


Fig. 7

so erhält man durch Division von Δs durch Δt die Masszahl der Schnelligkeit. Es ist für das Weitere sehr nützlich, sich das zu merken:

$$\frac{\text{Wegunterschied-Zahl}}{\text{Zeitunterschied-Zahl}} = \text{Betrag der Schnelligkeit}$$

Das richtige Lesen von Diagrammen ist von grossem Nutzen nicht nur für die Physik und Technik — man denke an graphische Fahrpläne —, und setzt grosse Übung voraus. Daher kann es dem Leser nur willkommen sein, wenn er aufgefordert wird, den folgenden drei Figuren starke Beachtung zu schenken; ja es wird sich sogar empfehlen, den diesen Figuren beigegebenen Text jeweilen nachzuprüfen.



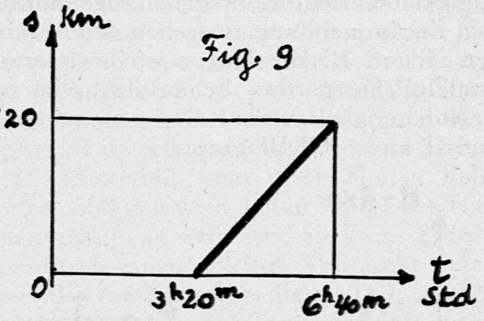
Mobiler Punkt bewegt sich mit der Schnelligkeit von $18\frac{3}{4}$ cm per sec vom Bahnnullpunkt in Richtung der s-Achse. (Fig. 8.)

Lokomotive passiert um 3 h 20 min mit der Schnelligkeit 36 km/std den Bahnnullpunkt in Richtung der s-Achse. (Fig. 10.)

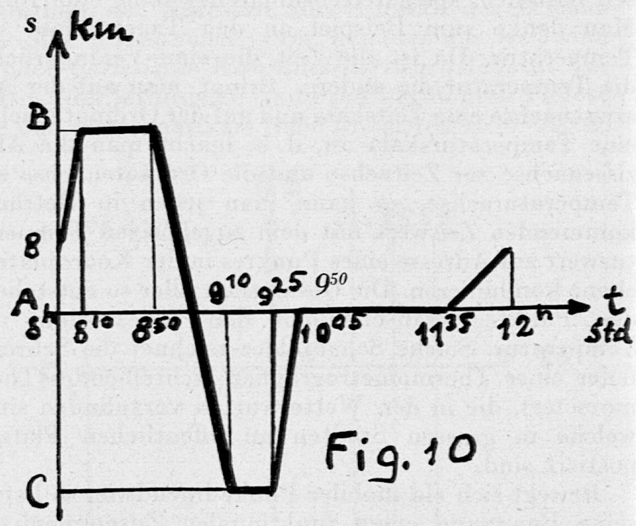
Ein Reisender verlässt um 8 h im Auto seinen +8 km vom Bahnnullpunkt A entfernten Wohnort und erreicht um 8 h 10 min den 20 km von A entfernten Ort B (Schnelligkeit 120 km/std). Dort verweilt er 40 min lang. Dann begibt er sich nach A, wo er um 9 h 10 min eintrifft (Schnelligkeit 60 km/std). Von A aus fährt er ohne Pause in gleicher Richtung noch 15 min mit der Schnelligkeit 80 km/std und erreicht den Ort C. Dort macht er 25 min Halt und kehrt darauf nach A zurück, welchen Ort er um 10 h 05 min erreicht. Diesen verlässt er nach $1\frac{1}{2}$ Stunden und erreicht gemächlich fahrend (Schnelligkeit 48 km/std) um 12 h seinen Wohnort. (Fig. 10.)

Als weitere Anregung möge noch folgende Aufgabe «diagrammartig» durchgeführt werden, die dem Leser ganz überlassen bleibe:

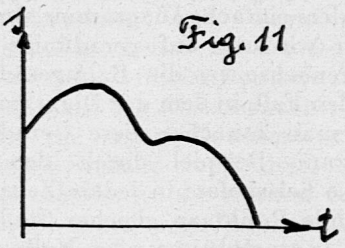
Zwei Freunde A und B, die 100 km voneinander entfernt wohnen, verabreden sich zu einem Mittagessen in einem vom Wohnort des A 40 km entfernten Restaurant, das an der die beiden Wohnorte verbinden-



den Strasse gelegen und zugleich Poststation ist. A rechnet sich aus, dass, wenn er um 6 h morgens aufbricht und zu Fuss die 20 km vom Wohnort des A entfernte Haltestelle der Autopost erreicht, er mit dem 10 Minuten später abfahrenden Postauto, das stündlich 30 km zurücklegt, noch rechtzeitig im Restaurant erscheinen kann. Sein Marschplan, den er auch befolgt, lautet: jeweilen 1 Stunde marschieren und anschliessend 10 Minuten ausruhen. Wann erreicht er das Restaurant?



Sein Freund B besitzt ein Velo. Er fährt daher erst um 6 h 40 min ab und legt stündlich 12 km zurück. Nach $2\frac{1}{2}$ Stunden erlebt er eine schlimme Panne, die ihn, nach einstündigem vergeblichem Bemühen, sie zu



beheben, zwingt, zu Fuss eine an der Strasse gelegene Velowerkstatt, an der er bereits vorbeigefahren ist, aufzusuchen. Für die 2 km zur Werkstatt braucht er 40 Minuten. Dort wird ihm erklärt, dass der Schaden sich nicht schnell beheben lässt. Er mietet daher ein Ersatzvelo. Die neue Verzögerung beträgt indessen 10 Minuten. So kommt es, dass B im Restaurant eine Viertelstunde später als A eintrifft. Wie schnell fuhr B zuletzt?

Zum Schluss sei noch mitgeteilt, dass die Fig. 10 einen Sonderfall von *geradlinigen ungleichförmigen Bewegungen* darstellt, insofern sie sich aus lauter geradlinigen gleichförmigen Bewegungen zusammensetzt. Der allgemeine Fall einer *geradlinigen ungleichförmigen Bewegung* wird durch ein Diagramm veranschaulicht, von dem *kein noch so kleines Stück geradlinig* ist, wie das zum Beispiel in Fig. 11 der Fall ist.

Viktor Krakowski

Berechnung der Wechselsumme

Der Aufgabensammlung für den Rechenunterricht an Sekundar-, Real-, Bezirksschulen und Progymnasien von Dr. Otto Umiker, Liestal, II. Teil, 2. Auflage, 1943, entnehmen wir Seite 133 folgende Aufgabe und Lösung:

Aufgabe: Eine Schuld von Fr. 32 500.—, die am 5. Oktober verfallen ist, soll durch einen Wechsel per 25. Dezember gedeckt werden. Berechne die Wechselsumme bei 4% Diskont!

Lösung 1

Barwert	=	Fr. 32 500.—
1. Zins $= \dfrac{32\,500 \cdot 4 \cdot 80}{100 \cdot 360}$	=	» 288.89
2. Zins (vom 1. Zins) $= \dfrac{289 \cdot 4 \cdot 80}{100 \cdot 360}$	=	» 2.57
3. Zins (vom 2. Zins) $= \dfrac{2{,}57 \cdot 4 \cdot 80}{100 \cdot 360}$	=	» 0.02
Wechselsumme per 25. Dezember	=	Fr. 32 791.48

Als kurze Erklärung wird nachfolgende Anmerkung in Klammern beigefügt: (vom erhaltenen Zins wird so oft der Zins berechnet, als das Resultat noch beeinflusst wird).

Wie ein Vergleich mit anderen Aufgabensammlungen für dieselbe Schulstufe zeigt (St. Gallen: Ebneter, II. und III. Teil, 1949, 1948; Luzern: Kopp, II. Teil, 1944; Bern: Aufgaben zum schriftlichen Rechnen für Mittelschulen, 5. Heft, 1938; Zürich: Weiss und Schälchlin, II. und III. Heft, 1945 und 1946), ist diese Problemstellung für die Bezirksschulstufe *neu*. Die genannten Aufgabensammlungen beschränken sich auf die Berechnung des Barwertes durch Diskontierung *.

Es scheint uns deshalb angezeigt, die Berechnung der Wechselsumme eingehender zu besprechen. Drei Punkte sind zu untersuchen:

1. Welches sind die mathematischen Voraussetzungen der Lösung?
2. Kann die Lösung dem Schüler erklärt werden oder muss ihm ein Schema vermittelt werden?
3. Warum verzichten die genannten Verfasser auf die Berechnung der Wechselsumme?

Allgemein sind zwei grundsätzlich voneinander verschiedene Berechnungsarten der Wechselsumme zu unterscheiden: I. = auf 100, im Rechtsverkehr, und II. = im 100, im kaufmännischen Verkehr.

I. Die Berechnung im Rechtsverkehr (auf 100 = mathematisch genau).

Aus der Aufgabe ist die Wechselsumme zu berechnen. Da die Schuld am 5. Oktober verfallen ist und erst am 25. Dezember bezahlt wird, muss die Wechselsumme = Barwert + Zins für 80 Tage sein. Barwert = 100%, Zins für 80 Tage $= \dfrac{4\% \cdot 80}{360} = {}^{8}/_{9}\%$ des Barwertes; daher Wechselsumme unseres Beispieles = $100\,{}^{8}/_{9}\%$.

Lösung 2 (auf 100)

Barwert 100% | $\dfrac{32\,500 \cdot 100\,{}^{8}/_{9}}{100}$
Wechselsumme $100\,{}^{8}/_{9}\%$ | = Fr. 32 788.888

Probe:

Wechselsumme $100\,{}^{8}/_{9}\%$ | $\dfrac{32\,500 \cdot 100\,{}^{8}/_{9} \cdot 100}{100 \cdot 100\,{}^{8}/_{9}}$
Barwert 100% | = Fr. 32 500.—

II. Das kaufmännische Berechnungsverfahren (im 100). Der Kaufmann berechnet den Diskont bequemer und *bewusst* unkorrekt vom 100 (Wechselsumme = 100%).

Die Berechnung der Wechselsumme, als Umkehrung der Barwertberechnung, ist deshalb eine Zinsrechnung *im 100*.

Lösung 3 (im 100)

Zins à 4% für 80 Tage = ${}^{8}/_{9}\%$ der Wechselsumme
Barwert = 100% — ${}^{8}/_{9}\%$ = $99\,{}^{1}/_{9}\%$ | $\dfrac{32\,500 \cdot 100}{99\,{}^{1}/_{9}}$
Wechselsumme = 100% | = Fr. 32 791.479

(Diese Wechselsumme stimmt mit derjenigen der Lösung 1 überein.)

Das kaufmännische Berechnungsverfahren wird auch in der Lösung 1 (Umiker) angewendet. Diese wollen wir jetzt besprechen.

Punkt 1

Die Diskontierung ist eine Subtraktion. Die Berechnung der Wechselsumme, als Umkehrung, muss dann folglich eine Addition des Diskontes sein. Dieser ist aber *unbekannt* und wird in der Lösung durch eine *Näherungsrechnung* bestimmt. Anstatt von der Wechselsumme wird der Diskont hier vom Barwert berechnet. Notgedrungen erhält man derart einen zu kleinen Diskont und bei der Addition eine zu kleine Wechselsumme. Hier setzt nun die *Korrekturrechnung* ein: vom ersten «Diskont» (in der Lösung als 1. Zins bezeichnet) wird wiederum der Zins berechnet für die gleiche Zeitspanne und den gleichen Diskontsatz und so auch von den folgenden Zinsen, bis die Zinsberechnung keine Rappen mehr ergibt. Diese Teilzinse werden summiert und ergeben zusammen mit dem Barwert die Wechselsumme.

Aus dem beschriebenen Zahlenbeispiel ist nun aber nicht ohne weiteres ersichtlich, welche Gesetzmässigkeit die ganze Rechnung beherrscht. Um zu zeigen, wie man zum Verständnis der Lösung gelangen kann, schreiben wir sie noch einmal in etwas abgeänderter Form; d. h. wir setzen an Stelle der Quotienten (= Zinse) die noch nicht berechneten Brüche. Dann lautet die Lösung:

* *Kopp* berechnet die Wechselsumme. Gegeben sind aber: Zeit, Diskont und Diskontsatz, so dass sich die Berechnung der Wechselsumme auf eine gewöhnliche Kapitalberechnung reduziert.

Weiss und *Schälchlin* stellen keine Aufgaben zum Kapitel Wechselrechnungen. Der zürcherische Rechenlehrplan für Sekundarschulen (1937) verlangt das Wechselrechnen nicht.

Lösung 4

Barwert $= $ Fr. 32 500.—

$$1.\ \text{Zins} = \frac{32\,500 \cdot 4 \cdot 80}{100 \cdot 360} = » \quad 288.89$$

2. Zins (vom 1.) =

$$\underbrace{\left[\frac{32\,500 \cdot 4 \cdot 80}{100 \cdot 360}\right]}_{1.\ \text{Zins}} \frac{\cdot 4 \cdot 80}{100 \cdot 360} = » \quad 2.57$$

3. Zins (vom 2.) =

$$\underbrace{\left[\frac{32\,500 \cdot 4 \cdot 80 \cdot 4 \cdot 80}{100 \cdot 360 \cdot 100 \cdot 360}\right]}_{2.\ \text{Zins}} \frac{\cdot 4 \cdot 80}{\cdot 100 \cdot 360} = » \quad 0.02$$

Wechselsumme per 25. Dezember = Fr. 32 791.48

(Bis zu dieser Stelle der Erklärung vermag auch ein Bezirksschüler zu folgen.)

Die mathematische Erklärung geht nun unmittelbar aus der veränderten Darstellung hervor.

Die Glieder:

$$32\,500,\ \frac{32\,500 \cdot 4 \cdot 80}{100 \cdot 360},\ \frac{32\,500 \cdot 4 \cdot 80 \cdot 4 \cdot 80}{100 \cdot 360 \cdot 100 \cdot 360},\ \frac{32\,500 \cdot 4 \cdot 80 \cdot 4 \cdot 80 \cdot 4 \cdot 80}{100 \cdot 360 \cdot 100 \cdot 360 \cdot 100 \cdot 360}$$

sind Glieder einer geometrischen Reihe. Jedes nachfolgende Glied ist $\frac{4 \cdot 80}{100 \cdot 360}$ mal kleiner als das vorhergehende. Der Bruch $\frac{4 \cdot 80}{100 \cdot 360}$ entspricht dem *Quotienten* (q) der geometrischen Reihe.

Die Glieder:

$$32\,500,\ \frac{32\,500 \cdot 4 \cdot 80}{100 \cdot 360},\ \frac{32\,500 \cdot 4 \cdot 80 \cdot 4 \cdot 80}{100 \cdot 360 \cdot 100 \cdot 360},\ \ldots.$$

entsprechen den Gliedern:

a, aq, aq^2 . . . der fallenden geometrischen Reihe.

Wir erhalten deshalb die gesuchte Wechselsumme als Summe einer geometrischen Reihe, deren erstes Glied gleich dem *Barwert* ist und deren folgende Glieder gleich den genannten *Teilzinsen* sind.

$$\text{Summenformel} = \frac{a\,(1\text{-}q^n)}{1\text{-}q} \text{ (für die fallende Reihe)}$$

a = Fr. 32 500.— = Anfangsglied

$$q = \frac{4 \cdot 80}{100 \cdot 360} = \frac{2}{225} = \text{Quotient}$$

Wenn wir diese Werte in die Summenformel einsetzen, erhalten wir:

$$\text{Summe} = \frac{32\,500\,[1\text{–}(2/225)^n]}{1\text{–}2/225}$$

Für n = 2 wird der Ausdruck: $1\text{-}(2/225)^2$ zu
$1\text{-}4/50\,625 \sim 1\text{-}1/12\,500 \sim 1\text{-}1/10\,000$
$1\text{-}0{,}0001 = 0{,}9999.$

Für n = 4 wird der Ausdruck: $1\text{-}(2/225)^4$, wenn wir mit dem Näherungswert für n = 2 (1/10 000) rechnen, zu $1\text{-}(1/10\,000)^2 = 1\text{-}0{,}00000001 =$ 0,99999999, also praktisch gleich 1.

Für n = ∞ (unendlich) wird der Wert des Bruches gleich *Null*.
Der Zähler des Doppelbruches $32\,500[1\text{-}(2/225)^n]$ wird daher gleich 32 500 und der Ausdruck für die Summe vereinfacht sich nun zu:

$$\text{Summe} = \frac{32\,500}{1\text{-}2/225} = \frac{32\,500}{\frac{225\text{-}2}{225}} = \frac{32\,500 \cdot 225}{223}$$

Um die Ausrechnung etwas einfacher zu gestalten, erweitern wir den Bruch noch mit 4 und bekommen:

$$\text{Summe} = \frac{32\,500 \cdot 900}{892} = 29\,250\,000 : 892 =$$
$$32791{,}479 = \text{Fr. } 32\,791.48$$

(Aufgerundet erhalten wir demnach genau die Wechselsumme der Lösungen 1 und 3.)

Die ganze Rechnung lässt sich also mit Hilfe der Summenformel der geometrischen Reihe auf eine einfache Multiplikation und Division zurückführen.

Mit unseren Ausführungen haben wir gezeigt, dass die Voraussetzung für die Erklärung und das Verstehenkönnen des Lösungsvorganges (Lösung 1) die Kenntnis der geometrischen Reihe ist (Punkt 1). Mit dieser Aussage ist aber auch Punkt 2 beantwortet: In der Mehrzahl der Fälle wird dem Schüler nur das Schema vermittelt werden können. Wie eingangs erwähnt wurde, kann ihm jedoch wenigstens teilweise angedeutet werden, welche Gedanken zur Lösung hinführen. Er verbleibt aber trotzdem auf einer Vorstufe des Verstehens. Am Ende des 9. Schuljahres dürfte sich als Abschluss des Mathematikunterrichtes an der Bezirksschule — in guten Verhältnissen — der Versuch lohnen, dem Schüler die ganze Lösung darzubieten (unter Einschluss der Ableitung der Summenformel der geometrischen Reihe), um ihm zu zeigen, wie mit dem richtigen Rüstzeug die Aufgabe spielend gelöst werden kann.

Zusammenfassend stellen wir fest, dass die Berechnung der Wechselsumme (Lösung 1) Kenntnisse voraussetzt, die der Bezirksschüler nicht vermittelt bekommt. Sie geht also über das Pensum unserer Schulstufe hinaus und muss deshalb weggelassen werden (Punkt 3). Wenn wir trotzdem für die Beibehaltung der Aufgabe eintreten (Behandlung fakultativ), so geschieht es aus zwei Gründen. Erstens, weil das Lösungsverfahren praktischen Wert besitzt, und zweitens, weil die Behandlung der Aufgabe dem Lehrer Gelegenheit bietet, seinen Schülern einen Ausblick zu gewähren auf das schöne und lehrreiche Gebiet der mathematischen Reihen.

Dr. *W. Moser*, Solothurn.

Nochmals: 5 m · 3 m oder 5 · 3 m²?

SLZ Nr. 23/1949

Die Mathematik beruht darauf, dass wir die «Dinge», sowohl diejenigen der Aussenwelt, als auch die Objekte unseres Denkens voneinander unterscheiden, sie aber auch miteinander verbinden, indem wir sie, nur auf bestimmte, ausgewählte ihrer Eigenschaften achtend, als gleichartig ansehen, sie so als «Elemente» eines Ganzen, einer Gattung, einer sogenannten *Menge* auffassen. Beispiele: Die Bäume eines Waldes; alle Bewegungen, welche einen Würfel mit sich selbst zur Deckung bringen; alle Kräfte usw. Der Mathematiker befasst sich insbesondere mit solchen Mengen, deren Elemente auf Grund einer Vorschrift in gleiche und ungleiche eingeteilt werden können, und für welche eine sogenannte *Verknüpfung*, auch Operation genannt, existiert, d. h. eine weitere Vorschrift, welche es gestattet, aus je zwei beliebigen Elementen stets eindeutig ein drittes, das *Ergebnis* der Operation zu finden. Beispiele: Führt man nacheinander zwei Umstellungen der Anordnung von *n* Personen in eine Reihe, zwei sogenannte Permutationen aus, so erhält man wieder eine solche, die man als das Ergebnis der

Verknüpfung der beiden ersten bezeichnet; die Bewegungen eines Raumgebildes; sogenannte Vektoren werden addiert (Kräfteparallelogramm!) und multipliziert (Vektorprodukt). Die üblichen Operationen mit unsern wohlbekannten Zahlen sind für den Mathematiker nur ein besonderer, allerdings wichtiger und uns sehr geläufiger Fall dieser allgemeinen Begriffe.

Es ist heute möglich, den Begriff der sogenannten natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 usw. und das Rechnen mit denselben, logisch auf noch fundamentalere Vorgänge unseres Denkens zurückzuführen (siehe z. B. Weber-Wellstein: Enzyklopädie der Elementarmathematik, 4. Auflage, Teubner 1922, Bd. I).

Die *Fläche*, oder der «Inhalt» einer ebenen Figur, gehört zu den sogenannten *Grössen* oder messbaren Mengen, wie z. B. auch das Volumen, die Länge und alle physikalischen Grössen. Weber-Wellstein gibt (S. 124) die Voraussetzungen an, die das Wesen der *Messbarkeit* einer «Grösse» ausmachen. Diese sogenannten Axiome sind in jedem Falle anschaulich evident, müssen aber klar herausgearbeitet werden, da sich alles auf ihnen durch rein logische Schlüsse aufbauen lässt. Sind A und B die Bezeichnungen für 2 Flächen, ohne dass eine Masseinheit festgesetzt sei, so wie etwa 2 Personen Meier und Müller heissen, so kann man entscheiden ob $A = B$ ist oder $A \gtrless B$ (man denke an die Aufgaben über Flächenverwandlungen!). Durch Aneinanderfügen und Abtrennen von Flächen definiert man die sogenannte Addition und Subtraktion derselben eindeutig, wobei das Ergebnis der ersteren, die sogenannte Summe, nicht von der Reihenfolge der Summanden abhängt. Den Begriff des Vielfachen einer Fläche F, z. B das 5fache, oder allgemein: das n-fache, wo n eine ganze Zahl ist (Schreibweise: $5 \ast F$ bzw. $n \ast F$, wobei man als Zeichen zunächst nicht den üblichen Multiplikationspunkt verwenden darf, da es sich nicht um die Verknüpfung zweier reiner Zahlen handelt), definiert man nun durch wiederholte Addition der gleichen Fläche F. Ist jetzt p, beispielsweise 8, eine andere ganze Zahl, so heisst die (stets existierende!) Fläche B, für welche $8 \ast B = 5 \ast F$ bzw. $p \ast B = n \ast F$ ist, der 8. Teil von $5 \ast F$, bzw. der $p$te Teil von $n \ast F$. Schreibweise: $B = \frac{5}{8} \ast F$ bzw. $B = \frac{n}{p} \ast F$ (Aufgaben über Flächenteilung!).

Dann ist folgender Satz beweisbar: Sind F und E irgend zwei Grössen, so gibt es stets eine (reelle) Zahl z, und wenn E festgehalten wird, gibt es umgekehrt zu jeder Zahl z eine Grösse F, derart dass $F = z \ast E$ ist. E nennt man dann eine *Masseinheit*, z die *Masszahl* von F in bezug auf E. Die *Messung* der Grösse F besteht darin, z zu bestimmen, d. h. festzustellen, das Wievielfache von E die Grösse F ist. E selbst wird die Masszahl 1 zugeordnet. Eine «Masseinheit» ist immer selbst ein Element der betreffenden messbaren Menge, eine Grösse derselben Art; z. B. ist die *Masseinheit der Länge* gleich einer bestimmten Länge, nämlich gleich der Länge des Urmeters (Bezeichnung: Der Meter oder m). *Eine Flächeneinheit* ist eine bestimmte Fläche, und zwar wählt man die Fläche eines Quadrates, weil man diese Figuren, ohne die beiden Richtungen unterscheiden zu müssen, lückenlos aneinanderfügen kann. Die Fläche des Quadrates, dessen Seite gleich der Länge des Meters ist, nennt man den «*Quadratmeter*» (vorläufige Bezeichnung: q). Die Masseinheit des Gewichtes ist ein bestimmtes Gewicht usw. Ist eine Fläche F gleich dem 15fachen der Fläche des Quadratmeters, so schreibt man $F = 15 \ast$ q. Auf der untersten Schulstufe werden Flächen (wie alle Grössen) so gemessen, dass man sie mit einer andern Fläche, dem Mass, ausschöpft (Maßstab!). Das ist nicht nur didaktisch, sondern auch vom Standpunkt des Mathematikers aus das Primäre. Nun zur Schreibweise: Die «übliche» Form 15 q, 8 m, 3 Volt hat zunächst keinen Sinn, da q, m, Volt ja keine reinen Zahlen sind, 15, 8, 3 jedoch Zahlen. Genau so wie in der Algebra die Schreibweise $15a$ «an sich» keinen Sinn hat, sondern nur dann, wenn man definiert, sie bedeute das Produkt $15 \cdot a$ der Zahlen 15 und a. In Analogie dazu und zur Schreibweise 15 Personen setzt man nun fest zE bedeute $z \ast E$. Beispiel: Die *Schreibweise* 5 *m* stellt nach Definition eine Länge dar, welche gleich der 5fachen Länge des Meters ist (m = 1 m). 4,7 g bedeutet ein Gewicht, welches gleich dem 10. Teil des 47fachen des Gewichts g (Gramm) ist; ebenso: $R = 0{,}812\ \Omega$ (Ohm!) usw.

Ferner ist dann das Folgende beweisbar: Hat die «Grösse» F die Masszahl z bezüglich irgend einer Einheit E, so hat ihr k-faches die Masszahl $k \cdot z$ bezüglich derselben Einheit E. Formuliert: $k \ast (zE) = (k \cdot z)\, E$. Beispiel: Die Zeit 15 min (Minute) hat bezüglich der Einheit s (Sekunde) die Masszahl $15 \cdot 60 = 900$. Das erscheint uns selbstverständlich. Wichtig ist jedoch, dass dieser Satz sich für beliebige, aucht *nicht-ganze* Masszahlen, durch zwingende logische Schlüsse für alle sogenannten «Grössen» aus denselben Axiomen ergibt.

Denken wir uns jetzt ein *Rechteck*, dessen Länge 5 m und dessen Breite 3 m ist, so kann seine *Fläche F* nicht nur durch «Ausschöpfen mit der Einheit q» bestimmt werden ($F = 15$ q), sondern auch so, dass man zuerst nur einen Teil desselben, z. B. einen «Streifen» mit der Länge 5 m und der Breite 1 m so «ausschöpft» und diesen Streifen dann 3mal aneinanderfügt. Dann ist nach dem letzten Satz: $F = 3 \ast (5\,\text{q}) = (3 \cdot 5)\,\text{q} = 15\,\text{q}$, oder allgemein, falls seine Seiten a m und b m sind: $F = a \ast (b\text{q}) = (a \cdot b)\,\text{q}$. Das heisst: Die Masszahl der Fläche eines Rechtecks, bezogen auf die Fläche eines Quadrates als Masseinheit, ist stets gleich dem Produkt der Masszahlen seiner Seiten, bezogen auf die Länge der Seite dieses Quadrates als Längeneinheit. Das ist, exakt ausgedrückt, der Sinn der Berechnungsvorschrift für die Rechtecksfläche und ihres Beweises, falls man im Unterricht auf einer höhern Stufe vom blossen «Ausschöpfen mit einem Mass» zur Berechnung übergeht.

Jetzt können wir uns der gerügten *Schreibweise* $3 \cdot 5\ m^2$ zuwenden, wobei wir uns zunächst auf die Form $3 \cdot 5$ q beschränken. Diese ist offensichtlich sinnlos, da 5 q eine Fläche, 3 aber eine reine Zahl ist und wir noch nirgends festgesetzt haben, was der übliche Multiplikationspunkt in diesem Falle bedeuten soll. Genau so ist in der Arithmetik die Schreibweise $3 \cdot 5$ «an sich» sinnlos, wenn man nicht festsetzt sie bedeute $5 + 5 + 5$! Man setzt nun fest $3 \cdot 5$ q oder allgemein $a \cdot b$q soll einfach eine andere Schreibweise sein für $3 \ast (5\,\text{q})$ bzw. $a \ast (b\text{q})$, d. h. für das 3fache der Fläche 5 q bzw. das a-fache von bq, wo a, b nicht ganz sein müssen. Das ist logisch zulässig, da es nicht auf Widersprüche führt und zweckmässig, wie wir nun sofort sehen werden, wenn wir die begriffliche Abstraktion durch die *Schreibweise* $5\ m \cdot 3\ m$ noch einen Schritt weiterführen. Diese ist zunächst wieder sinnlos, da wir nirgends definiert haben, was das heissen soll, *zwei «Grössen» zu multiplizieren*. Wir holen das nun nach durch folgende, für die Geometrie (und die Physik) fundamentale Festsetzung: Sind A und B irgend zwei Grössen gleicher oder ungleicher Art (z. B. 2 Längen oder eine Länge und eine Zeit), a und b ihre Masszahlen bezüglich beliebigen Einheiten, so bedeute $A \cdot B$ bzw. $\frac{A}{B}$ eine Grösse dritter Art (Fläche, Arbeit, Geschwindigkeit), deren Masszahl das Produkt $a \cdot b$ bzw. der Quotient $\frac{a}{b}$ der Masszahlen a und b ist, und deren Einheit diejenige, durch den geometrischen oder physikalischen Zusammenhang eindeutig bestimmte Grösse dritter Art ist, für die $a = b = 1$ ist. Nehmen wir nun das Rechteck mit den Seiten $A = 5$ m bzw. a m und $B = 3$ m bzw. b m, so ist $A \cdot B = 5\text{ m} \cdot 3\text{ m} = 15\text{ q} = F$, bzw. $a\text{ m} \cdot b\text{ m} = (a \cdot b)\text{ q} = F$. Die neue Rechnungsoperation: Multiplikation zweier Längen ergibt als Ergebnis somit stets die richtige Fläche des Rechtecks! Zuletzt noch die *Schreibweise* m^2 für q. Der Ausdruck m^2 ist «an sich» wieder sinnlos, da m nicht eine «Zahl» ist, genau so wie die Schreibweise 10^2 «an sich» keinen Sinn hat, und nicht etwa bewiesen werden kann, dass $10^2 = 10 \cdot 10$ ist. Das ist eine Festsetzung und ebenso setzen wir jetzt fest, m^2 bedeute die früher definierte Flächeneinheit q, d. h. die Fläche des Quadrats, dessen Seite gleich der Länge m ist. Folglich ist jetzt: $A \cdot B = 5\text{ m} \cdot 3\text{ m} = 15\text{ q} = F = 15\text{ m}^2$, bzw. $A \cdot B = a\text{ m} \cdot b\text{ m} = (a \cdot b)\text{ q} = F = ab\text{ m}^2$. Man kann also (infolge der getroffenen Festsetzungen) mit den Masszahlen und Einheiten rechnen, als ob es Zahlen und Buchstaben im Sinne der «üblichen» Algebra sind und erhält das richtige Ergebnis. Man sagt, die Fläche eines Rechtecks ist gleich «*Länge mal Breite*», wobei nun diese beiden Wörter nicht nur die Masszahlen bedeuten, sondern wirkliche Strecken, wie z. B. bei der Aufgabe:

Man konstruiere ein Rechteck aus seinen Seiten $A = 35$ mm, $B = 20$ mm, es allgemein üblich ist. Diese Begriffsbildungen sind abstrakt, aber zulässig, da sie nicht auf Widersprüche führen. Sie sind (z. B. in der Geometrie) nicht notwendig, aber sehr zweckmässig und deshalb, speziell in der Physik (und Technik) allgemein üblich. In jedem Physikbuch stehen sogenannte *Grössengleichungen* wie: Arbeit = Kraft · Weg (3 kg · 5 m = 15 mkg), Geschwindigkeit $= \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$ $(5 \frac{\text{cm}}{\text{s}} = \frac{100\text{ cm}}{20\text{ s}})$, Leistung = Stromstärke · Spannung $(2\,A \cdot 3\,V = 6\,W)$. Weil jede Fläche durch «Multiplikation zweier Längen» erhalten wird, sagt man, sie sei von der *Dimension 2* in bezug auf die Länge. Die Rechnungsoperationen mit den Grössen sind genau so real oder wirklich wie diejenigen bezüglich der Masszahlen. Die Beziehungen der «Grössen» A, B, F sind genau dieselben wie diejenigen der Masszahlen a, b, $a \cdot b$ und nur darauf kommt es in «Wirklichkeit» an. Kenner abstrakter mathematischer Methoden seien auf das Buch: Grösse, Masszahl und Einheit von *M. Landolt* (Rascher, 1943) und auf einen Aufsatz von *E. Roth-Desmeules*, Seminarlehrer, Luzern, in der Zeitschrift: Elemente der Mathematik, Bd. IV, 5 (Birkhäuser, Basel) verwiesen, wo das Problem allgemein und ohne Verwendung von Masszahlen gelöst wird. Auch in dem zitierten Buche von Weber-Wellstein und bei L. Locher-Ernst: Arithmetik und Algebra, Zürich 1945, ist etwas zu finden.

Dr. *K. Ott*, Zürich.

Unterstufe

Von der Zahlvorstellung

Der nachfolgende Beitrag erläutert einen neuen, in einer schweizerischen Holz- und Spielwarenfabrik hergestellten, von einem Vorarlberger Kollegen konstruierten Rechenapparat. Er heisst Spiegelrechenapparat *und wird an der nächsten Mustermesse in Basel vorgeführt. Die nachfolgende methodische Begründung wurde uns mit warmen Empfehlungen eines St.-Galler Kollegen zugestellt, der den Konstrukteur bei sehr erfolgreichem Unterricht beobachten konnte.* **

Wenn wir uns einer *Eigenprüfung* unterziehen und uns fragen: Wie zähle ich 36 und 42 in der Vorstellung zusammen, dann finden wir mit der Zeitlupe gemessen folgendes: Zuerst «sehe» ich die Zahl 36, also eine 3 und rechts daneben eine 6 stehen, zu dieser Zahl will ich 42 zählen, auch diese Zahl «sehe» ich an ihrem Zahlbild. Es hat sich gezeigt, dass ich *jede* Zahl am *Zahlbild* erkenne, ob es 36 Meter oder 36 Jahre oder 36 Kinder sind, die Zahlvorstellung ändert sich nicht. Nun soll die Addition beginnen, 42 soll dazugezählt werden. Um diesen Vorgang weiter zu zerlegen, will ich mich vorerst beim Addieren einer kleinen Zahl überprüfen, etwa 36 und 3. Nachdem ich die Zahl 36 «gesehen» habe, will ich *drei* dazuzählen, dabei «sehe» ich mich über 37 und 38 auf 39 springen, ich habe den Dreierschritt in drei *Einerschritte* zerlegt. Es sind mir zwar die Zwischenzahlen 37 und 38 nicht scharf untergekommen, aber blitzartig und unklar sind sie doch in die Vorstellung gelangt. Genau beschrieben, müsste ich sagen: Ich habe nicht 3 zu 36 gezählt, sondern ich habe in der Reihe die drittfolgende Zahl gesucht. Es war also eigentlich ein *Zählen* an der mir in der Vorstellung haftenden *Zahlenreihe*.

Der geistige Vorgang beim Zusammenzählen *grösserer* Zahlen spielt sich genau nach den gleichen Gedankengängen ab und kann folgenderweise Erklärung finden: Die Zahl 36 wird am Zahlbild erkannt und 42 soll dazukommen. Es findet sich der Vierziger als Vier (4) vor — von den Einern wird vollständig abgesehen —, diese 4 überspringt alle Zehnerstellen direkt von 36 auf 76. Im Vergleich zum ersten Beispiel haben sich flüchtig gemeldet: der Sechsundvierziger, der Sechsundfünfziger und der Sechsundsechziger. Als zweiter Akt kommt die Suche nach der Einerzahl, die als zweite nach 76 folgt, es ist 78. — Der Vorgang ist also auch hier ein reines *Zählen* von Zahl zu Zahl. Die Geläufigkeit und die Geschwindigkeit der Ausführung ist die Folge einer vieltausendmaligen Wiederholung dieses geistigen Vorganges. Vorerst finden wir unseren Geist eine *analytische Funktion* vollbringen — alles wird in seine Teile zerlegt —, dann aber erfolgt eine *synthetische* Tätigkeit bei der Bildung des Resultates.

Alle Menschen stellen sich die Zahl am Zahlbild vor, ohne die Ziffer zu «sehen», lässt sich eine Rechnung gar nicht lösen. Tausendfältige Versuche an allerlei Menschentypen haben immer wieder das gleiche Ergebnis gezeitigt, und noch dazu wurde festgestellt, dass die Art der Veranschaulichung in der Schule auf das Kind keinen Einfluss auf seine «fertigen» Vorstellungen auszuüben vermochte; denn *alle* Erwachsenen denken gleich. Wer an schweizerischen Zählrahmen, an den Boornschen Zahlbildern nach Dr. Johannes Kühnel, an den Fingern oder an anderen Mitteln in der Schule rechnen lernte, ganz gleich, alle bekamen nach und nach die gleichen Zahlvorstellungen, alle sehen das Zahlbild. — Auch anderssprachige Völker haben, soweit sie mit arabischen Zahlen rechnen, die gleiche Zahlvorstellung.

Ein junger Lehrer wurde neulich über seine Erinnerungen aus der Kindheit befragt, dabei konnte er sich genau entsinnen, dass in seiner Klasse ein Rechenapparat mit den Boornschen Zahlbildern gestanden habe, woran gerechnet wurde. Seine Zahlvorstellungen von heute decken sich mit den unseren, er denkt also nicht mit Boornschen, sondern mit Zifferbildern. In einer dritten Klasse wurden gerade die Vielfachen von 9 eingeübt, als ich dort Gast war. Alle Buben hatten die Vielfachen nach Boorn verschiedenfärbig auf Karton als Hilfsmittel zur Hand. Gar neugierig hätte ich die Kinder nach ihrer Zahlvorstellung überprüfen wollen und es gelang. Irgendein Kind brachte mir über Aufforderung seine Karte, diese untersuchte ich genau und fand bei den Zahlbildern (je 9 Ringlein) mit Bleistift winzig klein geschrieben die Zahlen 9, 18, 27, 36 bis 90. Auf Befragen des Schülers, warum er das gemacht habe, kam schüchtern die Antwort: «*Weil ich mir's besser merken kann.*» Das Kind hat sich also die Vielfachen nicht an den Boornschen Bildern, sondern an den Zifferbildern vorgestellt. Und *wie* stellte sich der Lehrer die Zahlen vor? Wie wir, und die Kinder sollten dies nicht tun dürfen. — Mit einem anderen Lehrer im Zwiegespräch über die Vorstellungswelt der Kinder, sagte er plötzlich: «*Mein* Kind hat vor seinem Schulgehen das Rechnen am Zifferblatt der Uhr gelernt. Es konnte gut daran zählen, auch schon einiges daran zuzählen.» — Das war mir gerade willkommen und bestärkte meine Ansicht immer mehr, dass wir die Kinder nicht *ohne Zahlen* lange plagen sollten.

Folgerungen für den Unterricht

1. Das Rechnen *ohne* die Zahl in den Anfangsmonaten ist ebenso ein Umweg und für das Kind eine Erschwerung wie das Lesen *ohne* Buchstaben. Darüber habe ich in meinem Büchlein: «*Das Rechnen, dem Kinde leicht gemacht*» ein ausführliches Kapitel geschrieben. Die Rechenmethodiker haben allerlei Anschauungsmittel erzeugt und verwendet, und es führen auch wirklich alle Wege nach Rom, aber nicht alle sind gleich gut. Oft hat gerade das *Vielerlei* in den Veranschaulichungsmitteln zum Niedergang der Methode geführt, denn es können sich fixe Zahlvorstellungen im Kinde nur an *einem Ding* bilden, und zwar haben sich jene an *dem* Mittel festgehalten, das dominierend verwendet worden ist. So haben sich in vielen Fällen *Fingervorstellungen* gebildet, von denen loszukommen manches Kind bis zum dritten oder vierten Schuljahr laborieren muss. Infolge seiner Behinderung bleibt ein solches Kind mit der Leistung hinter den andern zurück, der Abstand vergrössert sich und sehr oft muss die Klasse wiederholt werden. Wir unterscheiden hier wohl den Gedächtnisstoff vom Vorstellungsstoff, was aber ebenfalls ein eigenes Kapitel darstellt. Werden die Grössen, die Mengen an Würfeln, Quadraten, Ringen und dgl. dargestellt, dann können sich wohl für den Anfang die Zahlbilder an diesen Dingen bilden, allein sobald die Zahlen geschrieben werden und sicher dann, wenn das schriftliche Rechnen die Überhand nimmt, muss sich das Kind von den Grössenvorstellungen an diesen Dingen loslösen, es muss *abstrahieren* und zur Zahlvorstellung übergehen, wie sie alle Erwachsenen besitzen. Das ist eben der *Umweg* und auch der *schwierigere* Weg, den diese Rechenlehrer in der Veranschaulichung gehen.

2. Unsere Veranschaulichung besteht nun etwa nicht *darin*, dass wir dem Kinde die Zahl auf einem *Blatt* Papier in der Reihe von 1 bis 10 darstellen — daran würden sich nicht in jedem Falle richtige Mengenvorstellungen bilden —, sondern in der Verwendung der *Dingzahlen*. Die Zahl wird als ein Ding (das Zahlenmännchen), als eine *Sache* vorgeführt, ein wirklicher *Körper* trägt den Zahlennamen. Das Kind denkt sachlich und darum ist diese Art der Darstellung kindesnahe. Die Einzelkörper sind alle gleich gross, aber jeder hat sein eigenes Bild, seinen eigenen Namen, und kommt nur *einmal* vor. So ist z. B. der *Fünfer* (5) ein ganz besonderer, ein eigennamiger, nur einmal dastehender Zahlenträger, der immer in gleicher Nachbarschaft zwischen 4 und 6 steht, er ist das fünfte Zahlenmännchen. Dieser *Fünf* gehen vier andere Männer voraus (Auto-, Skifahrernummern), auch diese besitzen ihr eigenes Gesicht und ihren besonderen Platz innerhalb der *Reihe*. Jeder Zahlenkörper hat immer die gleiche Nachbarschaft, vom Zweier zum Dreier ist es immer *ein Schritt*, ebensoweit ist es zum Einer. Das Kind lernt *schrittweise* von Körper zu Körper gehen, durch tausendfältige *feststehende* Anschauungen bilden sich die *richtigen* Zahlvorstellungen im Kinde, die es nie mehr *umzustellen* braucht. Das Kind ist auf diese Art in leichtester Weise in den Zahlenraum eingeführt worden, es hat auch die *Grössen* durch die immer grösser werdende *Menge* der Körper in sich aufgenommen, es sind absolut sichere Eindrücke hinterlassen worden.

3. Diese theoretischen Darstellungen finden durch die Praxis in der Schule die Niederschläge, sie werden durch den Erfolg bestätigt. Als vor Jahren nach vielen Überlegungen und Prüfungen die vorstehenden Erwägungen reiften, wurde ein Apparat konstruiert, der diese Forderungen erfüllen sollte. Aber noch eine weitere Eigenschaft sollte die neue Veranschaulichung des Zahlbildes am Körper haben: Der Körper sollte wohl anwesend, die *Zahl* aber *unsichtbar* werden, so dass die Zahl nur mehr aus der Vorstellung genommen und daran gerechnet werden könnte. Diese sehr sinnreiche Einrichtung ist auf eine unglaublich einfache Art gelöst worden. Nun kam der Apparat in der Schule zur Anwendung. Zur Überprüfung der Methode hat sich der jetzige Landesschulinspektor für Vorarlberg, Hofrat Dr. Winsauer, längere Zeit hindurch besondere Mühe genommen. In seinem schriftlichen Urteil hebt er verschiedene Vorteile des Apparates heraus, lobt die erstaunlich rasche rechnerische Selbstbetätigung der Kinder und die ausserordentlich guten Erfolge im Rechnen. Seither sind Dutzende vorzüglicher Gutachten von Lehrern eingegangen, und Behörden jeden Ranges in Österreich empfehlen die Methode.

Eine Schweizer Holz- und Spielwarenfabrik erzeugt die Apparate — sie heissen wegen der Spiegelung der Zahlen Spiegelrechenapparate — und bringt diese auf der Frühjahrsmesse in Basel zur Ausstellung.

Gebhard Spiegel, Hauptschullehrer, Dornbirn

Lob des Liebhabers

Der Liebhaber sagt: Ich habe lieb das Wort (oder die Farbe oder den Ton). Er nimmt Wörter oder Farben oder Töne oder Lehm oder Marmor oder Holz und baut mit den Elementen. Er formt eine Gestalt, die er innerlich sieht. Er schafft sie, gibt ihr Form und Leben. Er ist ein Künstler.

Aus einer Studie «Lob des Liebhabers» von *Hans Zweidler*, Zürich.

Wie sucht man die Lösung?

Erstens

Du musst die Aufgabe verstehen.

Verstehen der Aufgabe

Zergliedere die Aufgabe: Was ist unbekannt? Was ist gegeben? Wie lautet die Bedingung?
Versuche vorauszusehen, ob die Aufgabe «vernünftig» gestellt ist: Ist es möglich, die Bedingung zu befriedigen? Ist die Bedingung ausreichend, um die Unbekannte zu bestimmen? Oder ist sie unzureichend? Oder überbestimmt? Oder kontradiktorisch?
Wichtige Hilfen: Zeichne eine Figur! Führe eine passende Bezeichnung ein!
Aufspalten der Bedingung: Trenne die verschiedenen Teile der Bedingung! Kannst du sie hinschreiben?

Zweitens

Suche den Zusammenhang zwischen den Daten und der Unbekannten.
Du musst vielleicht Hilfsaufgaben betrachten, wenn ein unmittelbarer Zusammenhang nicht gefunden werden kann.
Du musst schliesslich einen Plan der Lösung erhalten.

Ausdenken eines Planes

«Mobilisiere» früher erworbene Kenntnisse: Hast du die Aufgabe schon früher gesehen? Oder hast du dieselbe Aufgabe in einer wenig verschiedenen Form gesehen? Kennst du eine verwandte Aufgabe? Kennst du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte?
Betrachte die Unbekannte! Und versuche, dich auf eine dir bekannte Aufgabe zu besinnen die dieselbe oder eine ähnliche Unbekannte hat.
«Organisiere» den mobilisierten Stoff besser: Hier ist eine Aufgabe, die der deinen verwandt und schon gelöst ist. Kannst du sie gebrauchen? Kannst du ihr Resultat verwenden? Kannst du ihre Methode verwenden? Würdest du irgendein Hilfselement einführen, damit du sie verwenden kannst?
Formuliere die Aufgabe nochmals: Kannst du die Aufgabe anders ausdrücken? Kannst du sie auf noch verschiedene Weise ausdrücken? Geh auf die Definition zurück!
Umgehe das Hindernis: Wenn du die vorliegende Aufgabe nicht lösen kannst, so versuche, zuerst eine verwandte Aufgabe zu lösen. Kannst du dir eine zugänglichere verwandte Aufgabe denken? Eine allgemeinere Aufgabe? Eine speziellere Aufgabe? Eine analoge Aufgabe? Kannst du einen Teil der Aufgabe lösen? Behalte nur einen Teil der Bedingung bei und lasse den anderen fort; wie weit ist die Unbekannte dann bestimmt, wie kann ich sie verändern? Kannst du etwas Förderliches aus den Daten ableiten? Kannst du dir andere Daten denken, die geeignet sind, die Unbekannte zu bestimmen? Kannst du die Unbekannte ändern oder die Daten oder, wenn nötig, beide, so dass die neue Unbekannte und die neuen Daten einander näher sind?
Prüfe deinen Plan auf Vollständigkeit: Hast du alle Daten benutzt? Hast du die ganze Bedingung benutzt? Hast du alle wesentlichen Begriffe in Rechnung gezogen, die in der Aufgabe enthalten sind?

Drittens

Führe deinen Plan aus.

Ausführen des Planes

Wenn du deinen Plan der Lösung durchführst, so kontrolliere jeden Schritt. Kannst du deutlich sehen, dass der Schritt richtig ist? Kannst du beweisen, dass er richtig ist?

Viertens

Prüfe die erhaltene Lösung.

Rückschau

Kontrolle und Probe: Kannst du das Resultat kontrollieren? Kannst du den Beweis kontrollieren?
Suche einen anderen Weg: Kannst du das Resultat auf verschiedene Weise ableiten? Kannst du es auf den ersten Blick sehen?
Nütze den Erfolg aus: Kannst du das Resultat oder die Methode für irgendeine andere Aufgabe gebrauchen?

Diese «Tabelle» von wohlabgewogenen und sorgfältig angeordneten Fragen und Anregungen ist mit freundlicher Erlaubnis des Verlags der unlängst erschienenen «Schule des Denkens» (Sammlung Dalp, Verlag A. Franke, Bern) entnommen; für den vom Buche losgelösten Abdruck schien es angezeigt, die durch Fettdruck gekennzeichneten Anregungen zuzufügen.

Die «Schule des Denkens» ist eine Übersetzung des von Prof. Dr. G. Pólya (Stanford University, Californien) verfassten Buches «How to solve it», das im Jahre 1945 in Amerika erschienen ist. Dieses populär abgefasste Buch möchte einen von Pappus, Descartes, Leibniz und Bolzano unter dem Namen Heuristik oder «ars inveniendi» gepflegten, heute so gut wie vergessenen Zweig von Studien in einer modernen Form wieder aufleben lassen. — «Moderne Heuristik trachtet danach, den Vorgang des Lösens von Aufgaben zu verstehen, insbesondere die Denkoperationen, die bei diesem Prozess in typischer Weise von Nutzen sind.» — Die «Schule des Denkens» ist gewissermassen ein ausführlicher Kommentar zur hier wiedergegebenen Tabelle.

Der Verfasser*) sagt, seine Tabelle (deren erste Fassung er im Jahr 1931 anlässlich eines Vortrages in Bern vorlegte) sei eine erste dieser Art. Sie möchte bei der Lösung irgendwelcher Probleme mit Anregungen beistehen, will aber natürlich kein Allerweltsrezept sein, und Pólya sagt selber, es bestehe kein Zweifel, dass sie vervollkommnet werden könne. Abgesehen davon, dass die Übersetzung nicht überall ganz treffend ausgefallen ist («how can it vary» ist darin z. B. mit «wie kann ich sie verändern» wiedergegeben), wird der kritische Leser in der Tabelle etwa einen Hinweis auf den Unterschied zwischen den etwas vagen Begriffen «verwandte» und «analoge» Aufgabe vermissen.

Pólyas Tabelle möchte aber nicht nur jenen behilflich sein, die sich mit einem Problem beschäftigen und auf sich selber angewiesen sind, sondern auch dem Lehrer zu einer Unterrichtsgestaltung verhelfen, die die Schüler möglichst oft die Freude eigener Entdeckungen erleben lässt. Pólyas Buch trägt in der Originalfassung den Untertitel «A new aspect of mathematical method» und in der deutschen Ausgabe: «Vom Lösen mathematischer Probleme». Der Autor hat also insbesondere den Mathematiklehrern etwas zu sagen. Er ist dazu auch berufen wie wenige andere; die ETH hat ihm ja «in Würdigung seiner bedeutenden Forschungen in den Gebieten der Analysis, der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der mathematischen Methodik, sowie in dankbarer Aner-

*) G. Pólya, Prof. an der Stanford University, Californien «Schule des Denkens» (Vom Lösen mathematischer Probleme). A. Francke AG., Bern, Sammlung Dalp, Bd. 36, 266 S. Leinen, Fr. 9.80.

kennung seiner erfolgreichen Tätigkeit als Lehrer an der ETH» vor einigen Jahren den Titel eines Ehrendoktors verliehen.

Der Rezensent hat sich im Unterricht sowohl vom Nutzen der Tabelle als auch der vielen anderen in Pólyas Buch enthaltenen Anregungen überzeugen können, möchte sich aber im übrigen hier eines weiteren Urteils darüber enthalten, denn in Pólyas Buch findet sich der Grundsatz «Always use your own brains first» [1]), und das ist die einzige Regel, die darin demjenigen empfohlen wird, der unbedingt Regeln auswendig lernen möchte. Da das Denken aber eine schwierige Angelegenheit ist — nach dem überspitzten Urteil eines Satirikers so schwierig, dass es Leute geben soll, die vorziehen, es bleiben zu lassen —, dürfte eine Schule des Denkens in weiten Kreisen willkommen sein, besonders wenn sie vergnüglich abgefasst ist wie diejenige Pólyas.

Emil Treichler

MATHEMATISCHE NOTIZEN

Ein versierter Kollege schreibt zu einem Artikel in Nr. 7/1950 der SLZ über: «Die Hand als kleine Rechenmaschine» folgende Ergänzung:

W. Lietzmann schreibt in seinem bekannten Buch: Methodik des mathematischen Unterrichts (Queller und Meyer, Leipzig, 1923, Bd. II. S. 25): «Bei den Kurden in Persien, in der Walachei, nach manchen Angaben auch beim gemeinen Volk in Italien, Spanien und Südfrankreich ist ein *Fingerrechnen* gebräuchlich, das die Multiplikation von Zahlen zwischen 5 und 10 auf eine solche von Zahlen kleiner als 5 reduziert. Ist etwa $6 \cdot 8$ zu bilden, so strecken sie an jeder Hand soviele Finger aus, als der Überschuss der Faktoren über 5 beträgt, hier also an der einen Hand einen, an der anderen drei Finger. Die Summe der erhobenen Finger gibt die Zehner (hier also $3 + 1 = 4$), das Produkt der nicht erhobenen Finger (hier also $4 \cdot 2 = 8$) liefert die Einer.» Der Beweis besteht darin, dass der Ausdruck $(a - 5 + b - 5) \cdot 10 + (10 - a) \cdot (10 - b)$ auf die bekannte Weise umgeformt wird. Ich möchte aber davon abraten, dieses «Fingerrechnen» systematisch zu üben und anzuwenden, denn der Primarschüler kann natürlich nicht verstehen, warum ihm dieses «Rezept» das richtige Ergebnis der Aufgabe $6 \cdot 8 =$? liefert, d. h. das *gleiche* Ergebnis wie die Additionsaufgabe $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 =$? Das ist ja gerade der Sinn des modernen Denkrechnens, dass der Schüler nur das tut, was er versteht und verstehen kann.

Die Dreiteilung des Winkels

Im letzten Dezember wurde in einer unbedeutenden französischen Unterhaltungszeitschrift «C'est la vie», die sensationelle Mitteilung weitergegeben, es sei einem belgischen Ingenieur (Della Santa) gelungen, die in der Mathematik als unlösbar nachgewiesene Dreiteilung des Winkels (Gauss) durch eine planmetrische Konstruktion dennoch durchzuführen. Es handelt sich aber nur um eine Annäherungskonstruktion, nicht um die Lösung. Indessen wurden uns von verschiedenen Kollegen andere, originale Konstruktionen zum gleichen Problem zugesandt. Sie ruhten vorläufig unsortiert in der Sondermappe *Mathematik* bis zur Zusammenstellung dieser Nummer und wurden dann zurückgesandt. Eine Veröffentlichung solcher Versuche, die das «Unmögliche» vielleicht doch als möglich erweisen, könnte nur vorgenommen werden, wenn die Autoren dem Manuskript selbst eine genügende Zahl von Attesten bekannter Mathematiker mitgeben würden, dass es sich um einen wirklichen Fortschritt handelt. **

Kantonale Schulnachrichten

Luzern

55. Jahresversammlung der Sektion Luzern des SLV. Eine ansehnliche Schar Kolleginnen und Kollegen aus Stadt und Land versammelten sich am Palmmontag in der Aula des Museggschulhauses zu Luzern. Präsident Alfred Wanner freute sich besonders, unter den Anwesenden den Vertreter des Zentralvorstandes, *J. Klausener*, den Chef des kantonalen Erziehungsdepartementes, Ständerat Dr. *G. Egli*, den Schuldirektor der Stadt Luzern, *P. Kopp*, Erziehungsrat *T. Steger*, alt Rektor *Ineichen* und sämtliche städtische Rektoren begrüssen zu dürfen.

Als Auftakt sang eine 6.-Mädchenklasse aus Kriens, unter Leitung *Otto Eders*, in befreiender Natürlichkeit einige Volkslieder.

Im Jahresbericht umriss der Präsident die Mission der Sektion als Bindeglied zur gesamtschweizerischen Lehrerschaft. Gemeinsam mit dem Kantonalen Lehrerverein hilft sie aber auch unentwegt mit, auf kantonalem Boden sich aufdrängende standespolitische Fragen zu lösen. Das verflossene Jahr brachte erfreuliche Verbesserungen in der Besoldung und den Ruhegehältern. Eine Kollegin und vier Kollegen entriss der Tod unsern Reihen.

Den Revisionsbericht erstattete *J. Reinhart.* Er wies insbesondere auf die grossen Verdienste des Kassiers *F. Furrer* am Zustandekommen der beachtlichen Jubiläumsgabe von Fr. 1200.— für die Waisenstiftung hin. In der Umfrage erläuterte der Präsident des Kantonalen Lehrervereins, *R. Zwimpfer*, die Gründe, weshalb der Kantonalvorstand Fr. 500.— der Sektion als einmalige Gabe zukommen liess. Besonders verdankt wurden sodann die Zuwendungen der «Stiftung für Suchende», der städtischen Schuldirektion und anderer Gönner.

Hierauf erfolgte die Wiederwahl des Gesamtvorstandes und der übrigen Vereinsorgane. Als neuer Sektionspräsident wurde der bisherige Vizepräsident, *Peter Spreng*, Luzern, erkoren.

Als willkommene Einlage erläuterte Dr. *M. Simmen* in knappen, treffenden Worten die neue, noch unveröffentlichte Folge des Schweizerischen Schulwandbilderwerks.

Im zweiten Teil fesselte die Zuhörer das Referat von Kollege Dr. *Marcel Fischer*, Zürich, über die «Entstehung eines Kunstwerks», mit Lichtbildern erläutert an Ferdinand Hodlers «Auszug der Jenenser Studenten», von den ersten Skizzen bis zur letzten Fassung. Gestützt auf ein umfassendes Quellenstudium und gepaart mit feinem psychologischem Einfühlungsvermögen führte der in Luzern bestbekannte Referent die atemlos lauschende Versammlung in die «Vorhöfe» des künstlerischen Gestaltungsprozesses eines unserer genialsten Maler. Unter den rund 160 Skizzen wählte Dr. Fischer mit sicherer Hand diejenigen aus, welche in eindrücklicher Art die Stadien des Formringens bis zum Schöpfungswunder der endgültigen Synthese von Bewegung und Ruhe im grossartigen Wandbilde von Jena aufzudecken vermochten. Der in Form und Inhalt meisterhafte Vortrag hinterliess unvergessliche Eindrücke.

Am gemeinsamen Mittagessen im Restaurant «Alpenhof» sorgte der neue Präsident als Tafelmajor für humorvolle Einlagen. Ein Instrumentalensemble (*H. Lustenberger*, *N. Burkhalter-Jenny*, *I. Frei-Moos*) verschönte das kollegiale Beisammensein. Ein Satz aus dem «Doppelkonzert in d-moll» von J. S. Bach und ein Strauss herrlicher Frühlingsblumen ehrten den scheidenden Präsidenten *Alfred Wanner*, dessen selbstloses Wirken für die Sektion im besonderen und den kantonalen Lehrerstand im allgemeinen hiedurch eine bescheidene Anerkennung fand. Ansprachen von Schuldirektor *P. Kopp* und Zentralvorstandsmitglied *Klausener* beschlossen die schöne Tagung. *f.*

Weitere Luzerner Berichte folgen.

[1]) Vor allem brauche deinen eigenen Verstand.

St. Gallen

Wartau-Sevelen. — Unter dem Vorsitz von Christian Göldi trat die Spezialkonferenz Wartau-Sevelen im Schulhaus Sevelen zusammen. Sekundarlehrer Jakob Frigg, Azmoos, berichtete in interessanten Ausführungen von seinem Studienaufenthalt in Perugia und von seinen Reisen in Italien. Im Lichtbild zeigte er Landschaft, Dorf und Stadt mit ihren Schönheiten und Kunstdenkmälern.

Der langjährige Präsident der Spezialkonferenz, Christian Göldi, der jüngst für seine dem Erziehungsdepartement eingereichte Geschichtsmethodik für Gesamtschulen ausgezeichnet worden ist, erklärte seinen Rücktritt. Er wurde durch Heinrich Schlegel ersetzt.

Sevelen. — Mit dem neuen Schuljahr wird die neue Sekundarschule Sevelen ihren Betrieb aufnehmen.

H. S.

Sprachferienkolonien

Der Jugendferiendienst der Pro Juventute befasst sich mit dem Austausch Jugendlicher, um diesen einen Ferienaufenthalt in Familien von fremdsprachigen Gebieten zu ermöglichen. Ausserdem werden wiederum Sprachferienkolonien gebildet. Einzeln oder zu zweien wohnen die jungen Kolonieteilnehmer bei gastfreundlichen Familien des Kolonieortes, welche für das leibliche Wohl ihrer jungen Gäste auf das beste Sorge tragen und ihnen für die Zeit ihres Ferienaufenthaltes ein freundliches Daheim bieten. Ein ortsansässiger Lehrer und langjähriger Mitarbeiter von Pro Juventute übernimmt die Leitung; er erteilt täglich einen zweistündigen ferienmässigen Sprachunterricht und hilft als froher Kamerad die übrige Freizeit zu einem frohen und reichen Erleben zu gestalten.

Kursgeld: ca. Fr. 200.—.

Im Jahre 1950 werden folgende Sprachferienkolonien veranstaltet: in *Riva San Vitale* (Tessin), verlangte Vorbildung: mindestens 1 Jahr Italienischunterricht; *Hermance* (Genf), Vorbildung: 3 Jahre Französischunterricht; *Vandœuvres* (Genf), Vorbildung: 2 Jahre Französischunterricht; *Château-d'Oex* (Waadt), Vorbildung: 1 Jahr Französischunterricht.

Auskunft und Anmeldung sowohl für die Austauschgelegenheiten als auch für die Sprachferienkolonien durch Pro Juventute, Jugendferiendienst, Seefeldstr. 8, Zürich, Postfach Zürich 22.

Jahresberichte

Commune de La Chaux-de-Fonds, Rapport de la Commission scolaire, 1948/49.

Altgymnastika und Ehemalige des Seminars Kreuzlingen, Jahresheft 1949.

Schweizerischer Lehrerverein

Sekretariat: Beckenhofstrasse 31, Zürich; Telephon 28 08 95
Schweiz. Lehrerkrankenkasse Telephon 26 11 05
Postadresse: Postfach Zürich 35

Kommission für interkantonale Schulfragen
Sitzung vom 1. April 1950 in Zürich

Anwesend: Dr. M. Simmen, Prof. Hans Brunner, E. Grauwiller, M. Gross, E. Gunzinger, Dr. A. Heitz, E. Kuen, Dr. H. Meng, Prof. A. Scacchi, Dr. K. Wyss, H. Hardmeier als Leiter der Geschäftsstelle, J. Binder als Vertreter des Zentralpräsidenten.

Entschuldigt abwesend: Th. Luther, Prof. J. Schmid.

Vorsitz: Dr. Martin Simmen, Präsident.

1. Der Präsident und der Geschäftsleiter berichten über den Stand des *Schulwandbilderwerkes* und über die Erledigung einiger laufender Geschäfte.

In den letzten Jahren sind unsere Schulwandbilder auch im *Ausland* mehr und mehr bekannt und wegen ihrer Qualität anerkannt worden, nicht zuletzt durch Schenkungen im Rahmen der Nachkriegshilfe. Die ausländischen Verlagshäuser können sich noch nicht in erwünschtem Masse entschliessen, die schweizerischen Bilder, die ihrer Vorzüge wegen von Lehrern und Erziehungsbehörden sehr geschätzt werden, in Verkauf zu nehmen. Dafür erscheinen jetzt wieder ausländische Bilder von zum Teil geringer Qualität auch über Themen, die bereits im Schulwandbilderwerk vertreten sind.

2. Das Bild «*Lawine und Steinschlag*» von Viktor Surbek ist vergriffen. Da die Lithographiesteine während des Krieges zu andern Zwecken verwendet wurden, wäre ein Neudruck des Bildes mit derart hohen Kosten verbunden, dass einstweilen davon abgesehen werden muss.

3. Beim gegenwärtig laufenden *14. eidg. Schulwandbilderwettbewerb* ist die Eingabefrist für die Entwürfe auf den *31. August* angesetzt worden. Zu allen im Programm ausgeschriebenen Themen sind Anmeldungen in der erwarteten Anzahl eingegangen.

4. Die *Vorschläge* zum Programm des *nächstjährigen* Wettbewerbes sollen bis Ende August der Geschäftsstelle für pädagogische Aufgaben des SLV eingereicht werden.

5. Die Anregung der Kommission des *Schweizerischen Jugendschriftenwerkes* zu einer thematischen Zusammenarbeit mit dem Schulwandbilderwerk findet allgemeine Zustimmung.

6. Die Arbeiten der Subkommission für das *Tafelwerk* realistischer Anschauungsbilder sind so weit gediehen, dass bereits Entwürfe zu fünf Bildern in Auftrag gegeben werden konnten. Schulinspektor Grauwiller legt die von Basler Künstlern stammenden Entwürfe zu den Bildern «*Schleuse*» und «*Salzgewinnung*» vor. Das letztgenannte Bild, in welchem das neueste Fabrikationsverfahren dargestellt ist, bildet eine willkommene Ergänzung zu dem vor Jahren erschienenen Schulwandbild «*Saline*» von Hans Erni.

7. Der vom Präsidenten vorgelegte Entwurf zu einem *Vertrag* über die Herausgabe der ersten Bilderserie des neuen Tafelwerkes wird durchberaten und in empfehlendem Sinne an den Zentralvorstand weitergeleitet.

8. Die Kommission beschliesst die Einsetzung einer neuen *Studiengruppe*, die auf Grund der Lehrplanforderungen und nach bewährten methodischen Grundsätzen ein Fabrikationsprogramm für standardisierte *physikalische Apparate* zu Unterrichtszwecken vor allem der Primar-, Sekundar- und untern Mittelschulen auszuarbeiten hat. Für die technische Herstellung und für die Verkaufsorganisation liegen von leistungsfähigen schweizerischen Unternehmungen bereits Zusicherungen vor.

9. Max Gross erläutert in einem einleitenden Referat den Plan eines *Jugendbuches* «*Schweizergeschichte in Bildern*». Nach reger Diskussion wird eine besondere Studiengruppe mit der weitern Abklärung des Plans beauftragt. Ihr gehören die Kommissionsmitglieder M. Gross, E. Grauwiller und H. Hardmeier an; sie soll noch durch zwei weitere Mitarbeiter ergänzt werden.

H.

Schriftleitung: Dr. Martin Simmen, Luzern; Dr. Willi Vogt, Zürich; Büro: Beckenhofstr. 31, Zürich 6. Postfach Zürich 35. Tel. 28 08 95
Administration: Zürich 4, Stauffacherquai 36. Postfach Hauptpost. Telephon 23 77 44. Postcheckkonto VIII 889

Schulfunk

Bilder «Zentaurenkampf» bitte sofort bestellen!

Die Bildbetrachtungen des Schulfunks finden grossen Anklang. Am 1. Juni wird wieder eine solche Bilderstunde durchgeführt, indem Otto Schott, Zeichenlehrer in Basel, die Schüler einführen wird in das Gemälde «Zentaurenkampf» von Arnold Böcklin. Zu diesem Zweck sollte jeder Schüler eine farbige Reproduktion des Bildes vor sich haben. Es ist uns gelungen, eine tadellose Wiedergabe in Fünffarbendruck (Format 8×14 cm) bereitzustellen, die zu 10 Rp. pro Bild abgegeben werden kann. Die Bildbestellung erfolgt durch Einzahlung des entsprechenden Betrages auf Postcheck V 9987 «Regionale Schulfunkkommission Basel».

*

Freitag, 21. April: Reitermusik. Dr. Max Zulauf, Bern, führt die Schüler anhand eines reichhaltigen Programmes ein in die festliche Reitermusik und zeigt, wie sie später durch andere Instrumente bereichert wurde.

Verehrte Lehrerschaft!

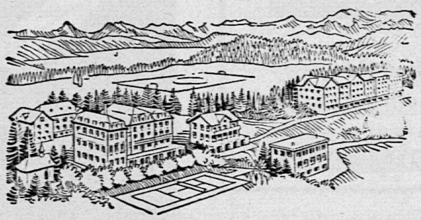
Anvertrauen auch Sie Ihre jetzigen Zöglinge zur Weiterausbildung, Pflege und Erziehung uns altbewährten Instituten, Fortbildungsschulen, Kinder- und Ferienheimen:

Scuola Cantonale Superiore di Commercio Bellinzona
FERIENKURS für italienische Sprache und Literatur
17. Juli bis 5. August 1950
Auskünfte und Programm durch die Direktion

Neue Mädchenschule Bern

Gegr. 1851. Waisenhausplatz 29. Tel. 2 79 81, Postcheck III 2444
Christliche Gesinnungsschule, enthaltend:
Kindergarten, Elementarschule, Primaroberschule (5 Klassen), **Sekundarschule** (5 Klassen), **Fortbildungsklasse** (10. Schuljahr), **Kindergärtnerinnen-Seminar** (2jähriger Kurs, Aufnahme Frühjahr 1950, 1952 usw.), **Lehrerinnen-Seminar** (4jähriger Kurs, Aufnahme jeden Frühling).
Sprechstunden des Direktors: Dienstag bis Freitag 11.15—12 Uhr.
Der Direktor: **H. Wolfensberger.**

Konservatorium Zürich
Allgemeine Musikschule Berufsschule Staatliches Diplom
Direktor R. Wittelsbach
Alle Musikfächer — Verbilligte Anfängerkurse



Voralpines Knabeninstitut

MONTANA ZUGERBERG
1000 m über Meer

- **Sorgfältige Erziehung** der anvertrauten Knaben zu charakterfesten Persönlichkeiten.
- **Individueller Unterricht** durch erstklassige Lehrkräfte in kleinen, beweglichen Klassen.
- **Alle Schulstufen bis Maturität:** Primar- und Sekundarschule, Gymnasium, Oberrealschule, Handelsabteilung; Sprach- und Handelskurse mit Diplomabschluss. (Maturitäts- und Diplomprüfungen im Institut selbst.)
- **Einzigartige Lage** in freier Natur auf 1000 Meter Höhe. Grosse, modernste Sportanlagen.

Nähere Auskunft erteilt Ihnen jederzeit gerne der Direktor:
Dr. phil. J. Ostermayer-Bettschart Tel. Zug (042) 4 17 22
P 1318 Lz

ECOLES TAMÉ

Ein Sprach-, Dolmetscher-, Korrespondent-, Sekretär(in) oder **Handelsdiplom** in 3—4 oder 6 Monaten (durch Fernunterricht in 6 oder 12 Monaten).
GARANTIE: unentgeltliche Verlängerung, wenn notwendig, bis zum erfolgreichen **Diplomabschluss.**
Ecoles Tamé, Luzern, Neuchâtel, Zürich, Limmatquai Nr. 30, Bellinzona, Sion, Fribourg, St. Gallen. 2

POLYGLOT SCHOOL
Dolmetscherschule Staatlich autorisiert
MONTREUX-TERRITET 4
Fachausbildung zu 3–5 sprachigen Dolmetschern, Uebersetzern, Korrespondenten und Sekretärinnen • Fachdiplom • Stellenvermittlung.
Französisches, englisches oder span. Sprachdiplom in 4 Monaten.
15 Jahre Erfahrung — 15 Jahre Erfolg!
Erstklassige Referenzen gewesener Schüler (auch Lehrer).

GOOD ENGLISH
by **R. A. Langford** and **V. C. Klein-Williams.**
A complete practical course for beginners, simple but thorough, with an abundance of exercises. First edition 1948.

COMMERCIAL ENGLISH
by **R. A. Langford.**
Introduction to business correspondence; elimination of common grammatical errors; extensive vocabulary; abundant exercises. (Key available to teachers only.) Third edition 1947.

Obtainable through the book-trade or from the publishers:
The English Institute
R. A. Langford, 8, Pelikanstrasse, **Zurich**

Schule Dr. A. Held
STAATL. KONZESSIONIERT
Primar-, Sekundarschule, Untergymnasium
Zürich, Neumünsterallee 1/I., Tel. 32 64 60

Zürich **Institut Minerva**

Vorbereitung auf
Universität
E. T. H.

Handelsabteilung
Arztgehilfinnenkurs

BEZUGSPREISE:

		Schweiz	Ausland
Für *Mitglieder* des SLV	jährlich	12.—	16.—
	halbjährlich	6.50	8.50
Für *Nichtmitglieder*	jährlich	15.—	20.—
	halbjährlich	8.—	11.—

Bestellung direkt bei der Redaktion des Blattes. *Postcheck der Administration VIII 889.*

INSERTIONSPREISE:
Nach Seiteneinteilung, zum Beispiel 1/32 Seite Fr. 10.50, 1/16 Seite Fr. 20.—, 1/4 Seite Fr. 78.— + behördlich bewilligter Teuerungszuschlag. — Bei Wiederholungen Rabatt. — Inseraten-Schluss: Montag nachmittags 4 Uhr. — Inseraten-Annahme: *Administration der Schweizerischen Lehrerzeitung, Zürich 4,* Stauffacherquai 36, Telephon 23 77 44.

Hier finden Sie ...

DIE GUTEN HOTELS, PENSIONEN UND RESTAURANTS

Auch beim Schulausflug

essen Sie und Ihre Schüler gern etwas **Währschaftes**

Unsere beliebten, **alkoholfreien Restaurants:**

Gemeindehaus St. Matthäus,
Klybeckstrasse 95, Nähe Rheinhafen (Tel. 2 40 14)
Alkoholfreies Restaurant Claragraben 123,
zwischen Mustermesse und Kaserne (Tel. 2 42 01)
Alkoholfreies Restaurant Baslerhof,
Aeschenvorstadt 55, Nähe Stadtzentrum (Tel. 2 78 31)
Alkoholfreies Restaurant Heumattstrasse 13,
Nähe Bahnhof SBB (Tel. 5 71 03)

bieten Ihnen ein stets preiswertes, gutes Essen und wohltuende Rast in geräumigen Sälen. Im **Baslerhof** und am **Claragraben** steht Ihnen auch der Garten zur Verfügung. Verlangen Sie bitte Offerten bei unseren Verwalterinnen.

Verein für Mässigkeit und Volkswohl Basel

In ZÜRICH *Hotel* **AUGUSTINERHOF**
St. Peterstrasse 8 — Tel. (051) 25 77 22

In DAVOS-PLATZ *Hotel* **RÄTIA**
2 Min. vom Bahnhof — Tel. (083) 3 60 21

GEPFLEGTE ALKOHOLFREIE HOTEL-RESTAURANTS

an zentraler Lage. Gut eingerichtete Zimmer und behagliche Aufenthaltsräume. Jahresbetriebe

Leitung: Schweizer Verband Volksdienst

SCHLOSS HABSBURG Renoviert Jahresbetrieb

Gutes Essen und Trinken in heimeligen Räumen. Prächtiger Aussichtspunkt. Beliebtes Ausflugsziel für Schulen und Vereine. Parkplatz. Voranmeldung erwünscht. Telephon (056) 4 16 73.

Familie Mattenberger-Hummel

BRUNNEN Restaurant Stauffacher

empfiehlt sich höflich den w. Schulen und Vereinen. Grosse Gartenwirtschaft. Telephon 122 — H. Inderbitzin

---

Luzern *Chr. Hospiz, Familienhotel* **«Johanniterhof»**

Sempacherstrasse 46 - am Bundesplatz - Freundliche Zimmer mit fliessendem Wasser - Alkoholfreies Restaurant - Tel. 3 18 55

Hotel *Paradies*

WEGGIS

„Der nahe Süden"

Pension ab Fr. 13.50 pro Tag.
Pauschal ab Fr. 108.— pro Woche.
Besitzer **H. Huber**, Tel. (041) 7 32 31

Verbringen Sie Ihre Frühlings- und Sommer-Ferien in **Glion**, im netten Hotel *Placida*. Pension und Zimmer von Fr. 11.50 bis 13.—. Tel. 6 43 93. *J. Leopold.*

Montana-Vermala Pension Clinique **PRIMEROSE**

Ruhiges und schön gelegenes Haus für Erholungsbedürftige und Feriengäste, auf sonnenreichster Höhenstation der Schweiz. Preise Fr. 9.— bis 12.—. Frühling und Herbst Ermässigung. Erkrankte der Atmungsorgane haben absolut keinen Zutritt.

Wenn ruhige und schöne Ferien, dann nur

Hotel Seehof **GANDRIA** direkt am See

Pensionspreis Fr. 10.— bis 12.—. Preiswerte Menus für Schulausflüge
Besitzer G. Moosmann

LUGANO-MASSAGNO *Pension Camelia*

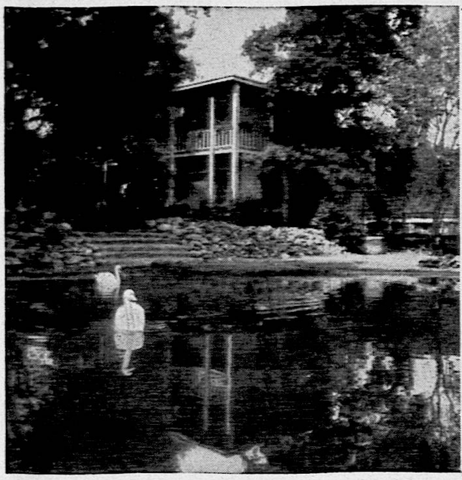
Gemütlichkeit, Ruhe, Sonne und gute Kost, auf Wunsch vegetarisch. - Mässige Preise. Höflich empfiehlt sich **M. Bonini**

Sorengo bei Lugano Ristorante „Grotto del Renzo"

Grosser schattiger Garten am Muzzanersee. Ausgezeichnete Küche für Schulen, Gesellschaften und Vereine.
Höflich empfiehlt sich *Benno Oechslin,* Chef de cuisine.

ENGELBERG Hotel Hess

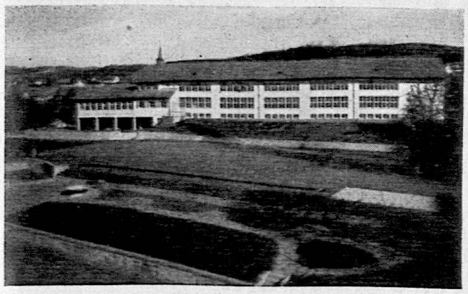
Bekannt für gute Küche. Speziell für Schulausflüge geeignet.
Gebr. Hess Telephon 7 73 66 — OFA 6048 Lz

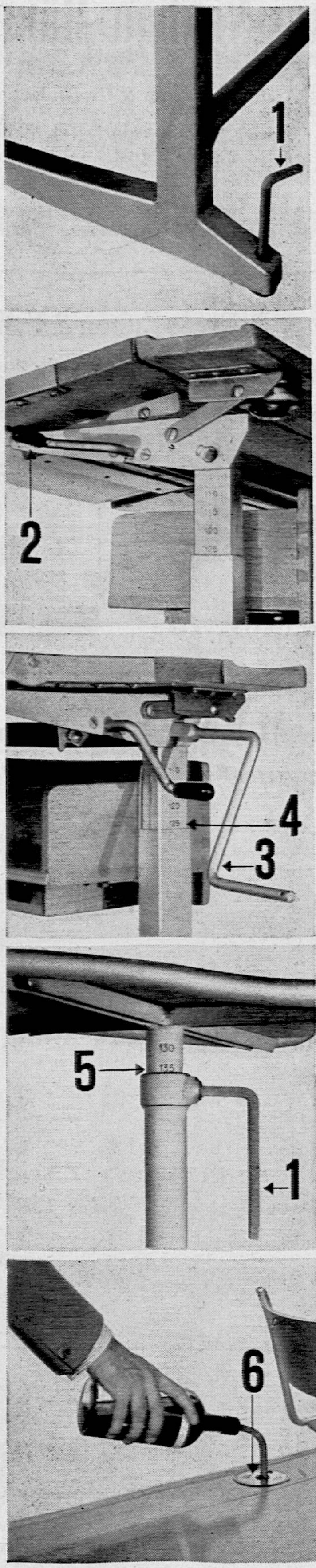


Schulreisen in den Tessin

Die neue Jugendheimstätte in **Magliaso** ist für Unterkunft und Verpflegung von Schulklassen, Lagern und Kursen aller Art gut eingerichtet. 2 Aufenthaltsräume, Unterkunft für ca. 80—100 Jugendliche in Betten, auf Pritschen oder in Zelten. Bescheidene Pensionspreise.

Weitere Auskunft erteilt die Heimleitung: Frl. MINA ALDER, Evangelische Jugendheimstätte, MAGLIASO. Tel. (091) 3 61 78





Einzig die Embru-Schulmöbel wachsen mit den Kindern vom Schuleintritt bis zum Schulaustritt

Sie bringen eine gesunde, freiheitliche Atmosphäre in die Unterrichtsräume; sie helfen mit, die Kinder zur Ordnungsliebe und zu korrekter Körperhaltung zu erziehen. Und bei Klassenwechsel keine Schulbanktransporte mehr! Verlangen Sie unsere Referenzenliste.

1 Schlüssel (vom Lehrer verwaltet) zum Einstellen und Nachstellen der Sitzhöhe, sowie zum Fixieren der Schultische auf unebenem Boden.

2 Kurbel (vom Schüler betätigt) zum Schräg- oder Flachstellen der Tischplatte während des Unterrichts.

3 Schlüssel (vom Lehrer verwaltet) für das Einstellen und Nachstellen der Tischhöhe.

4 5 Die Zentimeter-Skala am Schultisch, ebenso am Stuhl, erlaubt blitzschnelles Übereinstimmen mit den Körperlängen der Schüler.

6 Patentierte Sicherheits-Tintengefässe.

Embru-Werke AG Rüti (Zürich)

AZ
Zürich 1

AG. Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei, Zürich