Zeitschrift: Schweizerische Lehrerzeitung
Herausgeber: Schweizerischer Lehrerverein

Band: 91 (1946)

Heft: 4

Anhang: Erfahrungen im naturwissenschaftlichen Unterricht: Mitteilungen der

Vereinigung Schweizerischer Naturwissenschaftslehrer : Beilage zur Schweizerischen Lehrerzeitung, Januar 1946, Nummer 1 = Expériences

acquises dans l'enseignement des sciences naturelles

Autor: Schüepp, H.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ERFAHRUNGEN

IM NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT

Expériences acquises dans l'enseignement des sciences naturelles MITTELLUNGEN DER VEREINIGUNG SCHWEIZERISCHER NATURWISSENSCHAFTSLEHRER BEILAGE ZUR SCHWEIZERISCHEN LEHRERZEITUNG

JANUAR 1946

31. JAHRGANG . NUMMER 1

Die Keplerschen Lichtfiguren

Dr. H. Schüepp, Oberrealschule, Zürich.

Die Grundlage der geometrischen Optik ist der Satz von der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes in homogenen Körpern. Man redet von «Lichtstrahlen», die sich von den Punkten einer Lichtquelle oder eines beleuchteten Körpers nach allen Richtungen geradlinig ausbreiten. Diese Erklärung versagt bekanntlich, wenn man einzelne Lichtstrahlen möglichst scharf zu erfassen versucht, wenn man beispielsweise Licht durch zwei hintereinanderliegende enge Oeffnungen hindurchtreten lässt (Beugungserscheinungen). Wir müssen uns damit abfinden, dass die elementaren Gesetze über die Lichtstrahlen — geradlinige Ausbreitung, Reflexionsgesetz, Brechungsgesetz - mit der Erfahrung nur bei Erscheinungen in Einklang stehen, bei denen «Lichtstrahlen» überhaupt nicht feststellbar sind. Die Prüfung des Satzes von der geradlinigen Ausbreitung kann also stets nur eine indirekte sein.

Auch die moderne Wissenschaft steht immer wieder vor derartigen Schwierigkeiten. Die Wellenmechanik erklärt die Beugung von Elektronen und erhält bei Elektronenströmen Ergebnisse, die mit den Versuchen vollständig in Einklang stehen. Sie versagt aber, sobald die Bahn eines einzelnen Elektrons vorausberechnet werden soll. Für jede Theorie bestehen Grenzen der Anwendbarkeit; wir kennen keine alle Erkenntnisse zusammenfassende Theorie. «Je weiter sich die Physik entwickelt, um so deutlicher wird es, dass die Beziehungen zwischen der Wirklichkeit, die jeder von uns lebt, und jenen objektiven Wesenheiten, von denen die Physik in mathematischen Symbolen handelt, durchaus nicht so einfach sind, wie es der naiven Auffassung erscheint 1)».

Bekanntlich haben die Schwierigkeiten auf den Gebieten von Quantentheorie und Wellenmechanik zu lebhaften Auseinandersetzungen über das Kausalgesetz geführt. Moderne Abhandlungen erwecken den Eindruck, als ob dieses Problem von der heutigen Forschung zum erstenmal aufgeworfen würde, als ob Quantentheorie und Wellenmechanik von ganz anderem Charakter seien als ältere Theorien auf naturwissenschaftlichem Gebiete. Zu dieser Frage ein Zitat: «Das endliche Ziel der theoretischen Naturwissenschaften ist ..., die letzten unveränderlichen Ursachen der Vorgänge in der Natur aufzufinden. Ob nun wirklich alle Vorgänge auf solche zurückzuführen seien, ob also die Natur vollständig begreiflich sein müsse, oder ob es Veränderungen in ihr gebe, die sich dem Gesetze einer notwendigen Causalität entziehen, die also in das Gebiet einer Spontaneität, Freiheit, fallen,

ist hier nicht der Ort zu entscheiden; jedenfalls ist es klar, dass die Wissenschaft, deren Zweck es ist, die Natur zu begreifen, von der Voraussetzung ihrer Begreiflichkeit ausgehen müsse...» Diese Sätze sind nicht, wie man vermuten könnte, der heutigen Tagesliteratur entnommen. Sie wurden vor einem Jahrhundert geschrieben, von Helmholtz, in seiner klassischen Arbeit über den Satz von der Erhaltung der Energie²).

Wenn heute die Gültigkeit des Kausalgesetzes angezweifelt wird, so handelt es sich im Grunde um eine irreführende Fragestellung. Naturwissenschaftliche Erkenntnis ist nur soweit denkbar, als sich die Natur begreifen lässt, als ein Kausalgesetz besteht. Nicht die Existenz eines Kausalgesetzes ist das Problem, sondern der Inhalt des Gesetzes. Wer die Entwicklung der Naturwissenschaften in den letzten Jahrhunderten überblickt, wird nicht daran zweifeln, dass auch die Zukunft immer wieder Fortschritte im Begreifen, im kausalen Erfassen der Naturvorgänge bringen wird. Er wird aber dem Kausalgesetz nicht den gleichen, starren Sinn beilegen, wie eine Zeit, welche die Naturvorgänge rein mechanisch zu erklären versuchte. Wenn wir geometrische Optik treiben, so lehren wir die Schüler nichts, was mit moderner Wissenschaft in Widerspruch stehen würde, was ihr wesensfremd wäre. Es ist im Gegenteil kein Gebiet so geeignet, an einem einfachen Beispiel Einblick in das Wesen physikalischer Theorien zu gewinnen, wie die elementare Optik. Wenn wir die Schüler von der geometrischen Optik über die klassische Wellenoptik zur Maxwellschen elektromagnetischen Lichttheorie führen, so werden sie sich der Grenzen bewusst, die für alle Theorien bestehen. Sie erkennen aber auch, dass eine neue Theorie die vorausgehende nicht notwendig entwertet. Einblick in die Wirkungsweise optischer Instrumente wird man sich auch in Zukunft auf Grund der Sätze der geometrischen Optik verschaffen.

Die Lehrbücher und wohl auch der Unterricht gehen über den grundlegenden Satz von der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes rasch, mit wenigen Bemerkungen über Schatten und Lochkamera, hinweg. Dass eine eingehende Untersuchung dieser Erscheinungen sich lohnt, zeigt die klassische Darstellung von Kepler im zweiten Kapitel seines Lehrbuches der Optik, im Kapitel «Ueber die Lichtfiguren» ³).

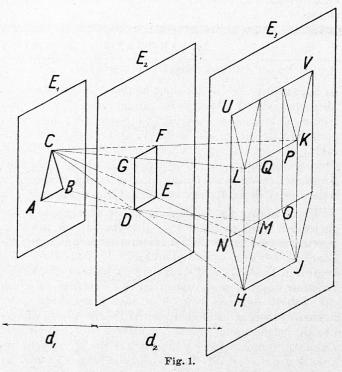
Den Erklärungen Keplers ist nichts Wesentliches beizufügen. Die folgenden Ausführungen sollen nur zeigen, wie sich seine Versuche als Schülerübungen zur Prüfung des Ausbreitungsgesetzes verwenden lassen.

¹⁾ Weyl: Raum. Zeit. Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie. 1918. Seite 227.

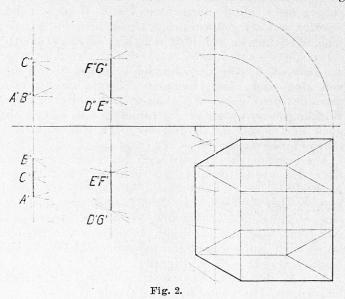
²⁾ H. Helmholtz. Ueber die Erhaltung der Kraft. 1847. Neudruck: Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 1. Seite 4.

³⁾ J. Keplers Grundlagen der geometrischen Optik. Uebersetzt von F. Plehn. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 198, Seiten 13—33.

Wir wählen ein von Kepler eingehend behandeltes Beispiel. Eine ebene Lichtquelle besitze die Form eines gleichseitigen Dreiecks A B C (Fig. 1) in der Ebene E1. Sie sende durch eine quadratische Oeffnung D E F G in einer Parallelebene E2 Licht auf eine weitere Parallelebene E3. Wir erhalten auf zwei Arten einen Ueberblick über die «Lichtfigur» auf dieser Ebene. Der



Punkt C beleuchtet auf E3 das Quadrat H J K L. Die übrigen Punkte der Lichtquelle liefern kongruente Quadrate. Die Punkte auf den Seiten des Dreiecks A B C ergeben die Randpunkte der Lichtfigur. Zu ihrer Konstruktion genügt das Zeichnen der Quadrate, die zu den Ecken A B C gehören. Wir können uns aber auch im Punkte D der Ebene E2 eine kleine Oeffnung



denken. Dann wird die Lichtquelle A B C auf E3 als beleuchtete Fläche M N H abgebildet (Lochkamera). Kongruente «Lichtdreiecke» erhalten wir, wenn wir die Oeffnung an irgendeiner andern Stelle des Quadrates D E F G anbringen. Für die Konstruktion der ganzen Lichtfigur genügt die Konstruktion der Lichtdreiecke für vier Oeffnungen bei D E F und G. Beide Konstruktionen sind identisch; sie benutzen die zwölf Lichtstrahlen von den Punkten A B C nach den Punkten D E F G. Zur Durchführung der Konstruktion im Grund- und Aufrissverfahren legen wir die drei Ebenen E₁ E₂ E₃ normal zur Axe (Fig. 2) und erhalten die Lichtfigur durch Umklappung von E3 in eine Projek-

Ein zweiter einfacher Weg zur Konstruktion der Lichtfigur ergibt sich, wenn man beachtet, dass (Fig. 1)

$$\frac{AD}{DM} = \frac{BD}{DN} = \dots = \frac{d_1}{d_2}$$

Diese Eigenschaft bleibt erhalten, wenn wir die Lichtquelle A B C und die Oeffnung D E F G parallel in irgendeiner Richtung auf die Ebene E, projizieren. In Fig. 3 ist die Projektionsrichtung so gewählt, dass die Projektionen von A und D und damit auch diejenigen von B und E sich decken. Diese Konstruktionsmethode scheint Kepler bekannt gewesen zu sein 4).

Die Lichtfigur hängt, wie Kepler klar auseinandersetzt, von den Formen und Grössen der Lichtquelle und der Oeffnung und auch vom Verhältnis der Abstände der Ebenen E1 E2 E3 ab (nicht aber von deren absolutem Betrag). Die Untersuchungen sind für Kepler wichtig zur exakten Auswertung der Beobachtungen von Sonnenfinsternissen mit der Lochkamera 5).

Sie erklären ferner Beobachtungen, auf die er in den ersten Sätzen seiner Ausführungen hinweist: «Dass der Sonnenstrahl, der durch irgendeine Spalte dringt,

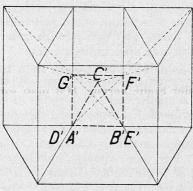


Fig. 3.

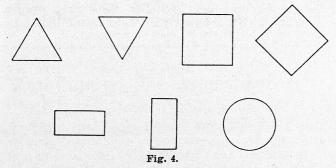
in Form eines Kreises auf die gegenüberliegende Fläche auffällt, ist eine allen geläufige Tatsache. Dies erblickt man unter rissigen Dächern, in Kirchen mit durchlöcherten Fensterscheiben und ebenso unter jedem Baume. Von der wunderbaren Erscheinung dieser Sache angezogen, haben sich die Alten um die Erforschung der Ursachen Mühe gegeben. Aber ich habe bis heute keinen gefunden, der eine richtige Erklärung geliefert hätte.» 6).

Um die Konstruktionen der Schüler durch Experimente prüfen zu können, schreiben wir Form, Grösse und Stellung von Lichtquelle und Oeffnung vor und halten für den Versuch je zwei entsprechende Schablonen aus Blech oder Karton bereit, beispielsweise: Gleichseitiges Dreieck und Quadrat von 10 cm Seitenlänge, Rechteck von 5 cm und 10 cm Seitenlänge, Kreis von 10 cm Durchmesser mit den in Fig. 4 angegebenen Stellungen. Es ergeben sich abgesehen von dem trivialen Beispiel Kreis-Kreis 25 wesentlich verschiedene Kombinationen von Lichtquelle und Oeffnung und unbegrenzt viele Verhältnisse d1: d2 der Entfernungen der

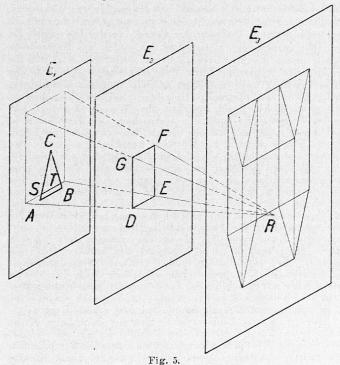
⁴⁾ Kepler. 1.c., Figur 12, Seite 20.

 ⁵⁾ Kepler. 1.c., Seite 31—33.
 6) Kepler. 1.c., Seite 13.

drei Ebenen, so dass jede Schülerzeichnung Neues bieten wird. Als Lichtquelle benutzen wir eine starke Glühlampe in einer genügend grossen Opalglaskugel, vor die wir die der gewählten Lichtquelle entsprechende Schablone stellen. Davor kommt die zweite,



der gewählten Oeffnung entsprechende Schablone und mit dem richtigen Abstandsverhältnis das Zeichnungsblatt des Schülers als Lichtschirm E3. Wir sorgen dafür, dass keinerlei störendes Nebenlicht auf diesen Schirm gelangen kann. Wir wählen also die Fläche E2 (Fig. 1) so gross, dass die Ränder des Zeichnungsblattes E3 im Schatten liegen. Den Tisch belegen wir mit mattschwarzem Filztuch, um reflektiertes Licht zu vermeiden. Vor allem aber bringen wir die Lichtquelle in einen geschlossenen Kasten, der nur durch unsere Schablone Licht nach aussen gelangen lässt, so dass keine beleuchteten Wände oder Gegenstände im Zimmer als sekundäre Lichtquellen wirken können. Wir erhalten dann auf dem Zeichnungsblatt eine Lichtfigur, die nach Form und Grösse genau der konstruierten Figur entspricht, also zeigt, dass das Gesetz von der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes mit der Erfahrung im Einklang steht. Nicht nur der äussere Umriss tritt in der Figur hervor. Hat man sorgfältig alles Nebenlicht ausgeschaltet, so zeichnen sich auch die



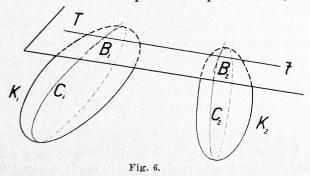
übrigen (in Fig.1 eingetragenen) Konstruktionslinien in der durch volles Licht und Halbschatten gegliederten Figur ab.

Unsere Konstruktion liefert neben der «Lichtfigur» auch die «Schattenfigur» für ein an dünnen Fäden

aufgehängtes, undurchsichtiges Quadrat D E F G (Fig. 1). Das Rechteck M O P Q ist in diesem Falle die Kernschattenzone, der äussere Umriss die Grenze zwischen Halbschatten und voller Beleuchtung.

Die Beleuchtungsstärke an einer Stelle der Lichtfigur hängt davon ab, von welchen Teilen der Lichtquelle aus Lichtstrahlen den betrachteten Punkt erreichen können. Fig. 5 zeigt, wie für irgendeinen Punkt R der Lichtfigur der Teil S T C der Lichtquelle konstruiert werden kann, der zur Beleuchtung der Stelle R beiträgt. (Durchführung der Konstruktion entsprechend wie in Figur 2 oder Figur 3.) Noch einfacher als durch Konstruktion erhält man einen Ueberblick über die Zusammenhänge zwischen der Beleuchtungsstärke und der teilweisen Bedeckung, der Verfinsterung der Lichtquelle, wenn man das Zeichenblatt E₃ auf einen Rahmen spannt und durch kleine Oeffnungen in der Zeichnung die Lichtquelle beobachtet.

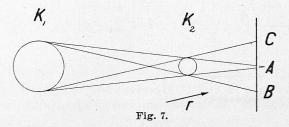
Konstruiert man die «Licht-» bzw. «Schattenfigur» nicht nur für eine einzige Ebene E₃, sondern für eine Reihe solcher Ebenen, so erhält man einen Ueberblick über die Grenzflächen zwischen den Raumteilen mit voller Beleuchtung, Halbschatten und Kernschatten. Wir betrachten statt des Keplerschen Spezialfalles (ebene



Lichtquelle und ebener, paralleler schattenwerfender Körper) sofort den interessanteren allgemeinen Fall: Bestimmung dieser Grenzflächen für eine Lichtquelle mit beliebiger Oberfläche und einen beliebigen schattenwerfenden Körper. Es sei K1 (Figur 6) die Lichtquelle, K2 der schattenwerfende Körper, T eine gemeinsame Tangentialebene mit den Berührungspunkten B und B2; K1 und K2 mögen auf der gleichen Seite von T liegen. Rollen wir T auf beiden Körpern ab, so gibt die Rollkurve C2 auf K2 die Kernschattengrenze auf K2. Unsere Tangentialebenen umhüllen jenseits C_2 den Kernschattenraum. Entsprechend erhält man mit Tangentialebenen, die K1 und K2 trennen, auf dem Körper K, die Halbschattengrenze und jenseits derselben die Grenze zwischen Halbschattenraum und Lichtraum. Die weiteren Ausführungen gelten für beide Grenzflächen. Zwei Tangentialebenen T, und T2 schneiden sich in einer Geraden. Lassen wir T2 in T1 übergehen, so ist die Grenzlage dieser Geraden die Verbindungsgerade t der beiden Berührungspunkte B, und B. Die von unseren Tangentialebenen T umhüllte Fläche. die Grenzfläche des Kernschattenraumes, ist die durch die Geraden t definierte Regelfläche; sie ist eine developpable Tangentenfläche; die Geraden t sind Tangenten einer Raumkurve. Konstruktionen solcher Flächen eignen sich als Uebungsaufgaben für die darstellende Geometrie ebensogut wie die Konstruktionen von Durchdringungskurven. Sie sind auch vom Standpunkt der Theorie aus diesen letzteren durchaus gleichwertig, handelt es sich doch um duale Probleme. Doch wir wollen dieses Gebiet den Mathematikern überlassen und uns dem Spezialfall zuwenden, den alle elementaren Lehrbücher der Physik behandeln⁷).

Sind K₁ und K₂ Kugeln, so werden die developpabeln Tangentenflächen zum äussern, beziehungsweise innern gemeinsamen Berührungskegel. Die entsprechende Figur dient bekanntlich der Erklärung der Sonnen- und Mondfinsternisse. Ich möchte empfehlen, nicht bei der Figur stehenzubleiben, also nur «Wandtafelphysik» zu treiben, sondern die Finsternisse auch im Experiment vorzuführen. Als «Sonne» K_1 verwenden wir unsere Opalglaskugel, als «Erde» K2 und «Mond» K₃, zwei weiss gestrichene Holzkugeln. K₂ und K₃ mögen das richtige Grössenverhältnis besitzen; der Durchmesser von K2 sei mit Rücksicht auf einen späteren Versuch etwa 1/3 des Durchmessers von K1. Wir sorgen, wie bei den Versuchen über die Keplerschen Lichtfiguren, dafür, dass alles störende Licht abgehalten wird. Mit einem Schirm zeigen wir hinter K2 und K3 die Kernschattenkegel, deren Grenzen sich deutlich abheben, während die Halbschatten unmerklich in den Lichtraum übergehen. Zur Demonstration der Mondfinsternis führen wir den Mond K3 durch den Schattenkegel der Erde K2, und zwar in solcher Entfernung von K2, dass die Breite der Halbschattenzone wie in der Natur annähernd gleich dem Monddurchmesser wird. Wir erkennen dann, dass der deutlich sichtbare Beginn der Verfinsterung mit dem Eintritt des Mondes in den Kernschatten der Erde zusammenfällt. Die totale Sonnenfinsternis erhalten wir, indem wir die Spitze des Kernschattenkegels von K3 gerade noch die Oberfläche der Erde K₂ erreichen lassen.

Sonnen- und Mondfinsternis sind physikalisch (abgesehen von den Wirkungen der Erdatmosphäre bei den Mondfinsternissen) durchaus gleichartige Vorgänge. Wir beobachten dieselben aber von verschiedenen Standpunkten aus, so dass wir sie ganz verschieden erleben. Die Verfinsterung des Mondes sehen wir von der Erde, von der Seite der Lichtquelle her; bei der Sonnenfinsternis aber blicken wir vom Kernschatten- oder Halbschattenraum aus gegen die Lichtquelle, die Sonne. Unser Experiment zeigt die Mondfinsternis im wesentlichen so wie wir sie erleben; es gibt aber den Anblick der Sonnenfinsternis für einen uns ganz unzugänglichen Standpunkt; es fehlt der anschauliche Zusammenhang zwischen dem Experiment und dem zu erklärenden Vorgang. Wir ergänzen daher die Demonstration (Figur 7). Als Mond wählen wir K2, als «Erdoberfläche» ein Kartonblatt B C. Das letztere stellen wir so, dass entsprechend den Verhältnissen bei totalen Sonnenfinsternissen die Spitze des Kernschattenkegels bei A eine schmale Kernschattenzone erzeugt. Die Grenzen B und C des breiten Halbschattens, das heisst die Grenzen der partiellen Finsternis, werden «von aussen» (Blickrichtung r) nicht feststellbar sein.



Blickt man aber durch eine Reihe kleinerer Oeffnungen im Kartonblatt nach der Sonne K₁, so kann man, ausgehend von der totalen Finsternis, bei A die partielle Verfinsterung bis zur äussersten Grenze der Halbschattenzone verfolgen. Der kleine Zeitaufwand für die beiden Experimente lohnt sich, erlebt doch der Schüler dabei, dass die «Lichtstrahlen» im Grunde genommen nur Konstruktionslinien, Licht- und Schattenräume das allein Beobachtbare sind. Nach den «Lichtstrahlen», welche in der Figur so scharf Lichtraum und Halbschattenraum trennen, wird er vergeblich ausschauen.

(Schluss folgt)

Bücherbesprechungen

Otto Schüepp: Schöpfungsbericht und Naturwissenschaft. 166 S. in kl. 80. Basel, Friedrich Reinhardt A.-G. Preis brosch. Fr. 5.50, in Leinen Fr. 7.85.

Unser Kollege Otto Schüepp ist durch seine scharfsinnigen und kritischen Forschungen auf dem Gebiete der botanischen Morphologie bekannt geworden. Seit längern Jahren wirkt er als Naturwissenschaftslehrer am Missionsseminar und daneben als ausserordentlicher Professor der Botanik an der Universität Basel. Wir können sicher sein, dass Sch. weiss, was Naturwissenschaft ist und wo ihre Grenzen liegen. Anderseits zeigt nun das vorliegende eigenartige Buch, dass sein Verfasser auch in der Bibelforschung wohl bewandert ist. Wir brauchen also nicht zu befürchten, dass dieses Buch zu jenen billigen Versuchen gehören wird, die darauf ausgehen, den Wesensunterschied zwischen Wissen und Glauben zu verwischen. Der Verfasser weiss gut genug, dass der Glaube durch Wissen weder geschaffen noch erklärt werden kann. Aber trotzdem scheint es ihm heute wieder möglich, ein rechter Naturforscher und zugleich ein gläubiger Bibelleser zu sein. Solange man die biblischen Schöpfungsberichte als «Verbalinspiration» auffasste, erlag man immer wieder der Gefahr, sie den Ergebnissen der Naturforschung entgegenzustellen. Heute betrachten wir jene Berichte als das, was sie sind, als Ausdruck des noch sehr primitiven Naturverständnisses der Urmenschheit. Denken wir uns in jenes primitive Naturverständnis hinein, so vermögen auch wir moderne Menschen aus dem Bibelwort das herauszulesen, was es von jeher sagen wollte, und der Kampf gegen gesicherte Ergebnisse der Wissenschaft hört dann auf. Auch die Abstammungslehre mit Einschluss der Lehre von den gemeinsamen Wurzeln der höchsten Primaten wird vom Verfasser unseres Buches selbstverständlich anerkannt und sehr schön dargestellt.

Zwei grossartige Bilder sind es also, die O. Schüepp schrittweise nebeneinander darlegt: das Weltbild der Genesis und dasjenige der modernen Naturwissenschaft. Räumlich herrschen die naturwissenschaftlichen Darstellungen vor. Sie sind, offenbar auch unter dem Einfluss des Unterrichts vor reifen Schülern, zu einer Klarheit und Grosszügigkeit der Gedankenverbindung vorgedrungen, die man nicht häufig findet. Diese Darstellungen können jedem Naturwissenschaftslehrer viele Anregungen geben, sobald er über den Bereich des rein empirischen Lehrstoffes hinausgehen will.

⁷⁾ Sowohl Durchdringungsprobleme, als auch Schattenprobleme führen auf developpable Tangentenflächen, die ersteren von den Punkten der Rückkehrkurve, die letzteren von ihren Schmiegungsebenen aus. Auch die Konstruktionsmethoden sind dual. Der Konstruktion mit Hilfsebenen bei den Durchdringungen entspricht die Konstruktion mit den Berührungskegeln an die Flächen K1 und K2 von einem Punkte aus. Die gemeinsamen Tangentialebenen der zwei Kegelflächen sind auch gemeinsame Tangentialebenen von K1 und K2. Die Konstruktion dieser Ebenen ist elementar mit den Methoden der darstellenden Geometrie durchführbar, wenn es sich um zwei Rotationskegel handelt. Konstruktionen dieser Art ergeben sich beispielsweise, wenn eine der Flächen K1 und K2 eine Kugel, die andere eine beliebige Rotationsfläche ist. Man wird in diesem Falle die Spitzen der Hilfskegel auf der Axe der Rotationsfläche wählen. Elementar lassen sich die Konstruktionen auch durchführen für den Fall einer Kugel als Lichtquelle und einer ebenen oder gekrümmten schattenwerfenden Fläche mit beliebiger Randkurve, soweit diese Randkurve Selbstschattengrenze ist. Den Keplerschen Konstruktionen entsprechen dual die Durchdringungen bei Pyramiden und Kegeln.