Zeitschrift: Schweizerische Lehrerzeitung

Herausgeber: Schweizerischer Lehrerverein

Band: 47 (1902)

Heft: 7

Anhang: Zur Praxis der Volksschule : Beilage zu Nr. 7 der „Schweizerischen Lehrerzeitung“ 15. Februar 1902, Nr. 2

Autor: Segenreich

Zur Praxis der Volksschule.

Beilage zu Nr. 7 der „Schweizerischen Lehrerzeitung".

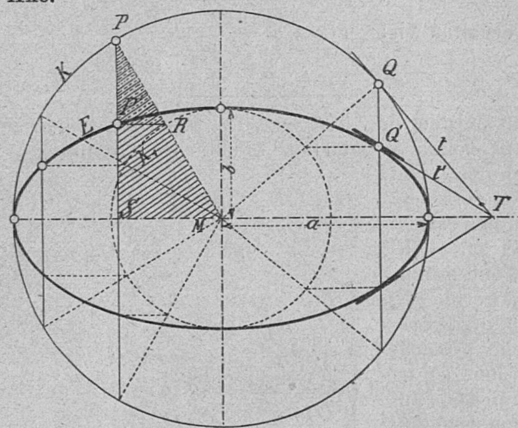
1902. 15. Februar № 2.

Behandlung der Ellipse an Sekundar- und gewerblichen Fortbildungsschulen.

Von Gust. Frauenfelder.

Die Behandlung der Ellipse an Sekundar- und gewerblichen Fortbildungsschulen ist keine leichte Aufgabe; denn einerseits ist die Lehre der Kegelschnitte (Ellipse, Hyperbel, Parabel) so ausgedehnt, dass hierfür an genannten Schulen die nötige Zeit mangelt und auch die Schüler nicht mit hinlänglichen Vorkenntnissen ausgerüstet sind; anderseits gilt fürs geometrische Zeichnen: *Der Schüler soll nicht nur wissen, wie man konstruirt, sondern auch stets, warum die angegebene Konstruktion zu einer richtigen Lösung führt;* blosses Zeichnen nach Rezept ist verwerflich. Und doch zeichnet man an allen gewerblichen Fortbildungsschulen und auch an vielen Sekundarschulen Ellipsen. Dazu nötigt einmal das häufige Vorkommen dieser Kurve; vor allem aber ist es das Projektionszeichnen, diese an den Sekundarschulen immer mehr gepflegte, die Raumvorstellung so ungemein fördernde Disziplin, die zur Besprechung der Ellipse zwingt. Unter den etlichen Dutzenden von Ellipsenkonstruktionen sind nur wenige, die an Sekundar- und gewerblichen Fortbildungsschulen erklärt und gezeichnet werden können; zwei derselben will ich näher ausführen.

1. Im Projektionszeichnen bringen wir den Schülern zum Bewusstsein, dass eine Strecke, eine allseitig begrenzte Fläche gleich ihrer Projektion ist, wenn sie der Projektionsebene parallel ist, dass aber ihre Projektion sich verkleinert, wenn der Neigungswinkel zur Projektionsebene wächst. Liegt ein Rechteck so, dass die als Länge bezeichnete Seite der Projektionsebene parallel ist, so wird nur die Breite verkürzt und die Rechteckfläche verhält sich zu ihrer Projektion, wie die Breite des Rechtecks zu deren Projektion. Drehen wir einen anfänglich in der Projektionsebene liegenden Kreis um einen seiner Durchmesser, so bleibt dieser unverändert, während der zu ihm senkrecht stehende Durchmesser die stärkste Verkürzung erleidet; alle zu letzterm parallelen Sehnen werden in demselben Verhältnis gekürzt. Die durch Projektion des Kreises entstandene Kurve ist eine Ellipse; der unverkürzte Durchmesser heisst grosse Axe, der dazu senkrechte ist die kleine Axe.



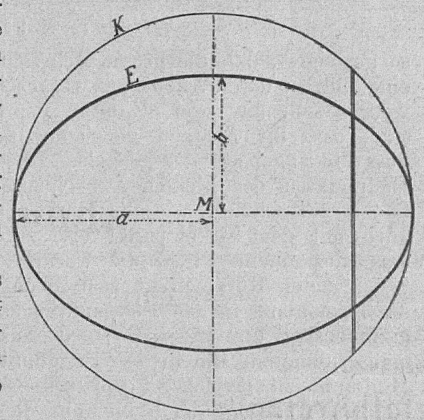
Um also aus dem Kreis K vom Radius a eine Ellipse von den Halbaxen a und b zu erhalten, haben wir alle zu b parallelen Kreissehnen im Verhältnis a : b zu kürzen; dies ist am einfachsten dadurch zu bewerkstelligen, dass wir den Kreis K_1 über der kleinen Axe b ziehen. Aus dem Kreispunkt P erhalten wir den Ellipsenpunkt P', indem wir durch R, als Schnittpunkt von PM mit K_1, eine Parallele zu a ziehen; denn

$$PS : P'S = PM : RM; \text{ also}$$
$$PS : P'S = a : b$$

Dies ist die einfachste, von den Schülern am leichtesten zu verstehende Ellipsenkonstruktion.

An den gewerblichen Fortbildungsschulen kann man unter Umständen noch einen Schritt weiter gehen und auch die Tangenten in die gefundenen Ellipsenpunkte konstruiren. Während wir nämlich den Kreis K um die Axe a aus der Projektionsebene herausdrehen, bis seine Projektion zur Ellipse E geworden ist, bleiben die Punkte der Axe, also auch der Punkt T der Kreistangente t in Q, fest. Kommt Q nach Q', so wird t zu t' und da t in Q zwei aufeinanderfolgende Kreispunkte enthält, muss auch t' in Q zwei aufeinanderfolgende Ellipsenpunkte enthalten, d. h. t' ist Ellipsentangente in Q'.

Es ist nicht schwer, mit den Schülern die Formel zur Berechnung der *Ellipsenfläche* abzuleiten. Ziehen wir zwei sehr nahe zu b parallele Sehnen, so können wir die zwischen ihnen liegenden Kreis- resp. Ellipsenflächenstücke als Rechtecke betrachten, wenn wir nur die Sehnen hinlänglich nahe genug ziehen. Der Kreisflächenstreifen verhält sich zum Ellipsenflächenstreifen, wie a : b, und da dieses Verhältnis sich nicht ändert, wenn das Sehnenpaar parallel zu sich selbst verschoben wird, so gilt:



$$K : E = a : b$$
$$a . E = b . K = ba^2\pi$$
$$E = ab\pi$$

Indessen darf der praktische Wert dieser Formel für Leute mit blosser Volksschulbildung nicht überschätzt werden, da nur in einer kleinen Zahl von Berufsarten die Fläche einer Ellipse zu berechnen ist.

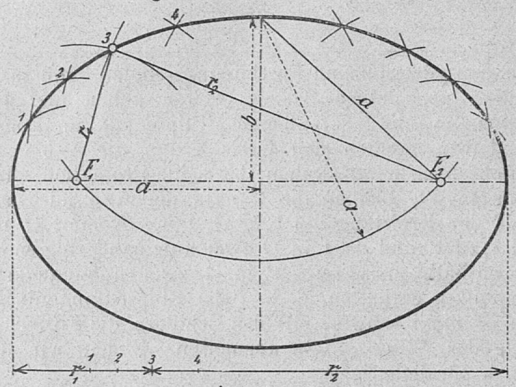
Ganz wertlos und verwerflich ist es aber, an genannten Schulen den Umfang einer Ellipse berechnen zu wollen, abgesehen davon, dass hierfür keine geschlossene Formel existirt.*)

2. Häufig wird die Ellipse als der Ort eines Punktes definirt, dessen Abstände von zwei festen Punkten, den Brennpunkten, eine gegebene Strecke zur Summe haben. Jeder Lehrer an Sekundar- und Gewerbeschulen, der die Ellipse behandelt und zeichnen lässt, sollte diese Entstehung der Kurve veranschaulichen. Befestigt er auf der Rückseite eines grössern Reissbrettes ein Blatt Papier, schlägt zwei durch eine dünne Schnur verbundene Nägel ein, so dass ihr Abstand kleiner als

---

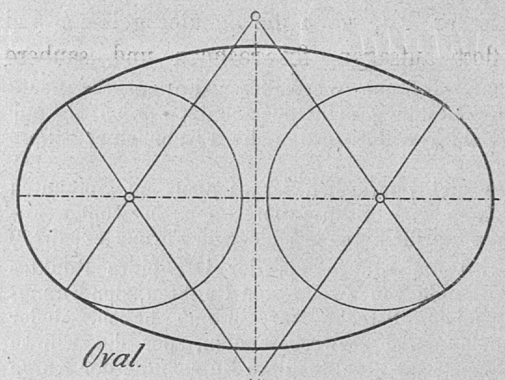
*) Der Ellipsenumfang kann mathematisch nur durch elliptische Integrale gegeben werden. Die in einigen Lehrmitteln (Ebneter, Stöcklin) gebrauchte Näherungsformel $U = (a + b)\pi$ gibt zu ungenaue Ergebnisse; nicht viel besser ist die von Hrn. Rorschach benützte Näherungsformel $U = \pi\sqrt{2(a^2 + b^2)}$. Die Fehler sind um so beträchtlicher, je grösser das Verhältnis $\frac{a}{b}$ ist, und zwar gibt die erste Formel zu wenig, die zweite zu viel; für $\frac{a}{b} = 5$ gibt $(a + b)\pi$ einen Fehlbetrag von ca. $\frac{U}{10}$ und $\pi\sqrt{2(a^2 + b^2)}$ einen Überschuss von ca. $\frac{U}{13}$. Brauchbare Resultate erhielte man erst durch die von Prof. J. Camus in Turin gegebene, mir durch Hrn. Gewerbeschuldirektor Roner in Zürich mitgeteilte Näherungsformel: $\frac{1}{4} U = \frac{(a-b)^2 + ab\pi}{a + b}$. Die maximale Abweichung ergibt sich für $\frac{a}{b}$ (annäh.) = 7, indem hier die Formel $\frac{1}{158}$ des Umfanges zu viel liefert; für $\frac{a}{b} = 2$ ist der Überschuss noch $\frac{U}{431}$, während für dieses Axenverhältnis die erste Formel über $\frac{U}{37}$ zu wenig und die zweite ca. $\frac{U}{39}$ zu viel gibt. In Schlömilchs Logarithmentafeln findet der Leser die Länge von Ellipsenquadranten.

die Schnurlänge ist, und fährt nun mit dem Bleistift der angestreckten Schnur entlang, so sehen die Schüler eine grosse Ellipse vor ihren Augen entstehen. Ihre Aufmerksamkeit ist

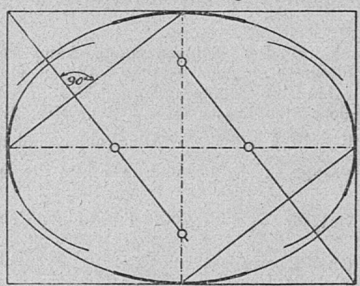


$r_1 + r_2 = 2a$,

so gesteigert, dass die grosse Mehrzahl herausfindet, dass wenn eine Ellipse, deren Axenkreuz vorgezeichnet ist, derart erzeugt werden soll, die zwei Stifte an der Schnur so zu befestigen sind, dass ihr Abstand gleich der grossen Axe (2a) ist und dass die Nägel auf der grossen Axe je im Abstand a von den Endpunkten der kleinen Axe einzuschlagen sind. Nicht nur finden die Schüler, wie die Kurve zu erhalten und nachher auch mit dem Zirkel punktweise zu konstruiren ist, sondern was noch mehr wiegt, die Form, die Schönheit der grossgezeichneten Kurve prägt sich ihnen tief ein. Sie sehen, wie die Krümmung in den Endpunkten der grossen Axe ihr Maximum besitzt und wie sie von da aus nach beiden Seiten allmälig abnimmt, um in den Endpunkten der kleinen Axe ihr Minimum zu erreichen. Sie erkennen, dass zufolge dieser stetigen Änderung der Krümmung die Ellipse streng genommen nicht aus Kreisbogen zusammengesetzt werden kann, da ja diese in ihrem Verlaufe konstante Krümmung besitzen und beim Zusammenschluss von Kreisbogen verschiedener Radien ein Sprung in der Krümmung entsteht. Gerade diese Erkenntnis ist wichtig; denn vielfach halten die Schüler, und zwar nicht nur solche mit bloss Sekundarschulbildung, die in den Schulen häufig gezeichneten, aus vier Kreisbogen zusammengesetzten Ovale für Ellipsen. Ich will beiläufig erwähnen, dass durch nebenan gezeichnete, zuhanden des Lehrers gegebene Konstruktion die Mittelpunkte der Krümmung in den Scheiteln der Ellipse zu erhalten sind. Nur wenn grosse und kleine Axe wenig verschieden sind, die Krümmung sich also langsam ändert, fallen grössere Stücke der Kreise annähernd mit der Ellipse zusammen; doch ist aus obgenannten Gründen ein Zusammenschluss der Kreise unmöglich. Den Beweis, der von Schülern der Sekundar- und Gewerbeschulen nicht erfasst werden kann, findet der Leser in „Konstruktive Geometrie der Kegelschnitte“ von A. Breuer (Verlag von Bachmeister in Eisenach).

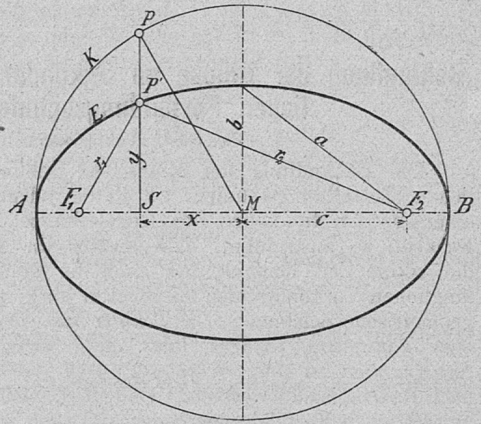


Oval.



Krümmungszentren der Ellipsenscheitel.

Selbstverständlich muss den Schülern gezeigt werden, dass die durch *Projektion* eines Kreises entstandene *Kurve* identisch ist mit der nach der 2. Art erhaltenen. Will man dies elementar beweisen, so muss man zur Algebra greifen; es kann somit der Beweis nur von Schülern der 3. Klasse Sekundarschule verstanden werden. Es gibt ihnen derselbe zugleich Gelegenheit, diese ihnen anfänglich abstrakt vorkommende Disziplin anzuwenden. Es sei also P′ ein Punkt der Ellipse E, die aus dem Kreis K erhalten wurde, indem die Abstände der Kreispunkte von der festen Axe AB im Verhältnis a : b gekürzt wurden; also:



$$P'S : PS = b : a$$

$$P'S = PS \cdot \frac{b}{a}.$$

Die Abstände des Punktes P′ von der kleinen und der grossen Axe nennen wir resp. x und y; dann ist

$$PS^2 = a^2 - x^2$$

also: $$P'S^2 = y^2 = (a^2 - x^2)\,\frac{b^2}{a^2}.$$

Bezeichnen wir noch die Abstände der Brennpunkte F_1 und F_2 vom Mittelpunkt mit c, wobei $c^2 = a^2 - b^2$, und die Strecken $P'F_1$ und $P'F_2$ mit resp. r_1 und r_2, so haben wir:

$$r_1^2 = y^2 + (c - x)^2 = (a^2 - x^2)\,\frac{b^2}{a^2} + (c - x)^2$$

$$= b^2 - x^2\,\frac{b^2}{a^2} + \underbrace{c^2} - 2cx + x^2$$

$$= a^2 - 2cx + x^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$= a^2 - 2cx + x^2\,\frac{c^2}{a^2}$$

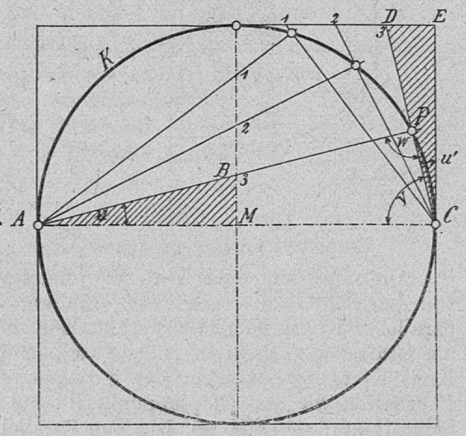
$$= \left(a - \frac{c}{a}\,x\right)^2$$

$$r_1 = a - \frac{c}{a}\,x$$

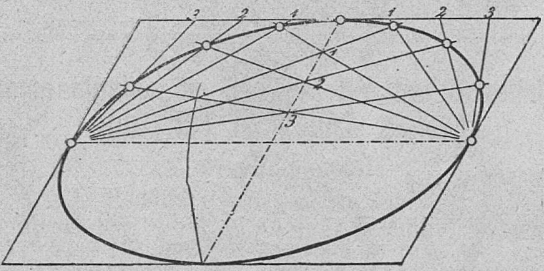
Analog erhalten wir: $$r_2 = a + \frac{c}{a}\,x$$

$$\underline{r_1 + r_2 = 2a}$$

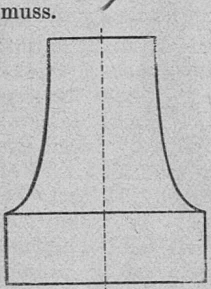
Die meisten der übrigen Ellipsenkonstruktionen erfordern zu ihrem vollen Verständnis theoretische Kenntnisse, die an Mittelschulen und zum Teil erst an Hochschulen erworben werden können. Wenn mitunter an gewerblichen Fortbildungsschulen solche gezeichnet werden, so ist dies zum Teil auf die angewandten Lehrmittel zurückzuführen, sei es, dass sich diese selbst den Fehler zu schulden kommen lassen, sei es, dass sie für höhere Schulen berechnet sind. Die in einigen Lehrmitteln fürs Linearzeichnen enthaltene, nebenan gezeichnete Ellipsenkonstruktion kann von den Schülern erst einigermassen verstanden werden, wenn ihnen die erste der hier besprochenen



Ellipsendarstellung völlig klar ist. Zunächst ist zu beweisen; dass die Konstruktion für den Kreis gilt; $AMB \cong CDE$; $u = u'$, $u' + v = 90^0$; $u + v = 90^0$; $w = 90^0$; also liegt P auf K; nun



erkennen die Schüler, dass die Konstruktion auch für die aus dem Kreis durch Projektion entstandene Ellipse Gültigkeit haben muss.



Zum Schlusse erwähne ich noch eine einfache Konstruktion von *Parabelbogen,* die ihrer Schönheit wegen in der Praxis vielfache Anwendung finden und deshalb an gewerblichen Fortbildungsschulen zu zeichnen sind. Zu diesem Zwecke definiren wir die Parabel als eine Kurve, deren Tangenten auf irgend zwei derselben ähnliche Punktreihen bestimmen. Sollen A und B durch einen Parabelbogen verbunden werden, der in A und B die Geraden a und b zu Tangenten hat, so teilen wir a und b in je dieselbe Anzahl gleicher Teile, nummeriren die Punkte, wie dies in der

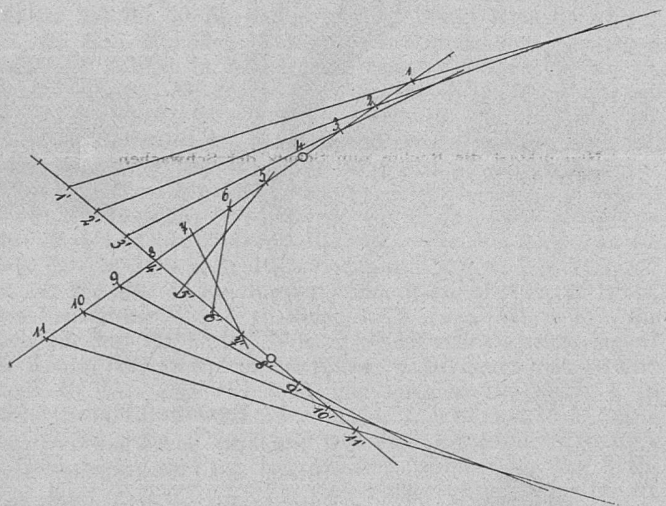
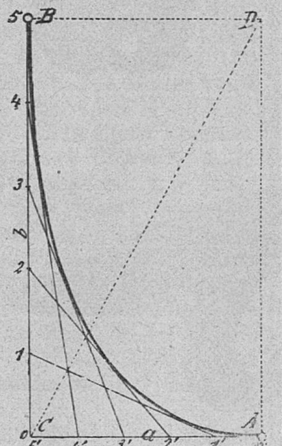
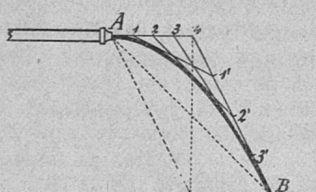


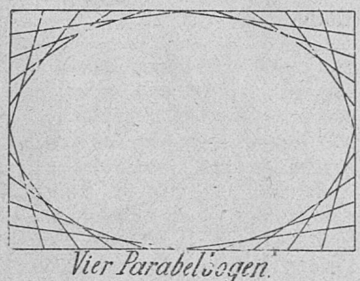
Fig. angegeben ist und verbinden die entsprechenden Teilpunkte; je grösser die Zahl der Teile ist, um so deutlicher entsteht die Kurve, *eingehüllt von ihren Tangenten,* vor unserem Auge. Tragen wir auf beiden Geraden über A und C, resp. über B und C hinaus unendlich viele Teile ab, so ergibt sich, dass die Tangenten allmälig die Richtung der Diagonale CD des durch ABCD bestimmten Parallelogramms annehmen, dass sich also die Kurve allmälig zu beiden





Seiten in der Richtung jener Diagonale erstreckt. Diese Konstruktion kann auch im Physikunterricht verwendet werden.

Fällt das aus der Brunnenröhre fliessende Wasser bei B auf, so ist AB die eine Diagonale des Parallelogramms, die andere gibt die Richtung an, die das fallende Wasser schliesslich annimmt. Dadurch ist die Parabel bestimmt, und die Kurve kann gezeichnet werden.



Nun wissen wir auch, dass die von Delabar (Heft I. Fig. 87 a) angegebene Ellipsenkonstruktion Näherungskonstruktion ist; sie liefert eine aus vier Parabelbogen zusammengesetzte Kurve.

Aus unsern Erörterungen ergibt sich zur Genüge, wie vorsichtig der Lehrer in der Auswahl geometrischer Konstruktionen vorgehen soll, will er nicht nur Hand und Auge seiner Schüler üben, sondern auch deren Verstand schärfen und ihnen überdies Brauchbares auf den Lebensweg mitgeben.

Etudes et Esquisses.

Le corps humain.

I.

La tête.

Quelles sont les parties principales du corps humain? (la tête, le tronc et les membres).

Comment nomme-t-on l'ensemble des os qui forment la boîte osseuse de la tête? (le crâne).

Que renferme-t-il? (le cerveau).

Il est le siège de quoi? (de l'intelligence).

Qu'est-ce qui garnit la peau du crâne? (les cheveux).

De quelle couleur sont-ils? (noirs, bruns, blonds, châtains, roux).

Comment deviennent-ils quand on vieillit? (ils grisonnent).

Et encore plus tard? (ils blanchissent).

Que dit-on des cheveux qui se roulent en forme d'anneaux? (on dit qu'ils bouclent).

Chez qui le font-ils souvent naturellement? (chez les enfants).

Comment nomme-ton quelques cheveux roulés ensemble de cette façon? (une boucle de cheveux).

Quand on n'a plus beaucoup de cheveux, on commence à devenir quoi? (chauve).

Quel est le nom de la partie antérieure de la tête de l'homme? (la face ou le visage).

Qu'entend-on par le teint d'une personne? (le coloris naturel de son visage).

Comment est-il? (frais, brun, hâlé, jaune, plombé, pâle).

Quelles sont les différentes parties du visage? (le front, les tempes, les yeux, le nez, les joues, les oreilles, la bouche, le menton).

Le front est considéré comme le siège de quoi? (de la pensée et du sentiment).

Où sont les tempes? (entre le coin de l'œil et le haut de l'oreille).

Pourquoi un coup sur une tempe est-il souvent mortel? (parce que le crâne est très mince à cet endroit).

Les yeux sont l'organe de quoi? (de la vue).

Que dit-on d'une personne qui a perdu un œil? (qu'elle est borgne).

Et quand une personne ne voit pas du tout? (elle est aveugle; elle est affligée de cécité).

Comment appelle-t-on un médecin qui a pour spécialité de s'occuper des maladies de l'œil? (un oculiste).

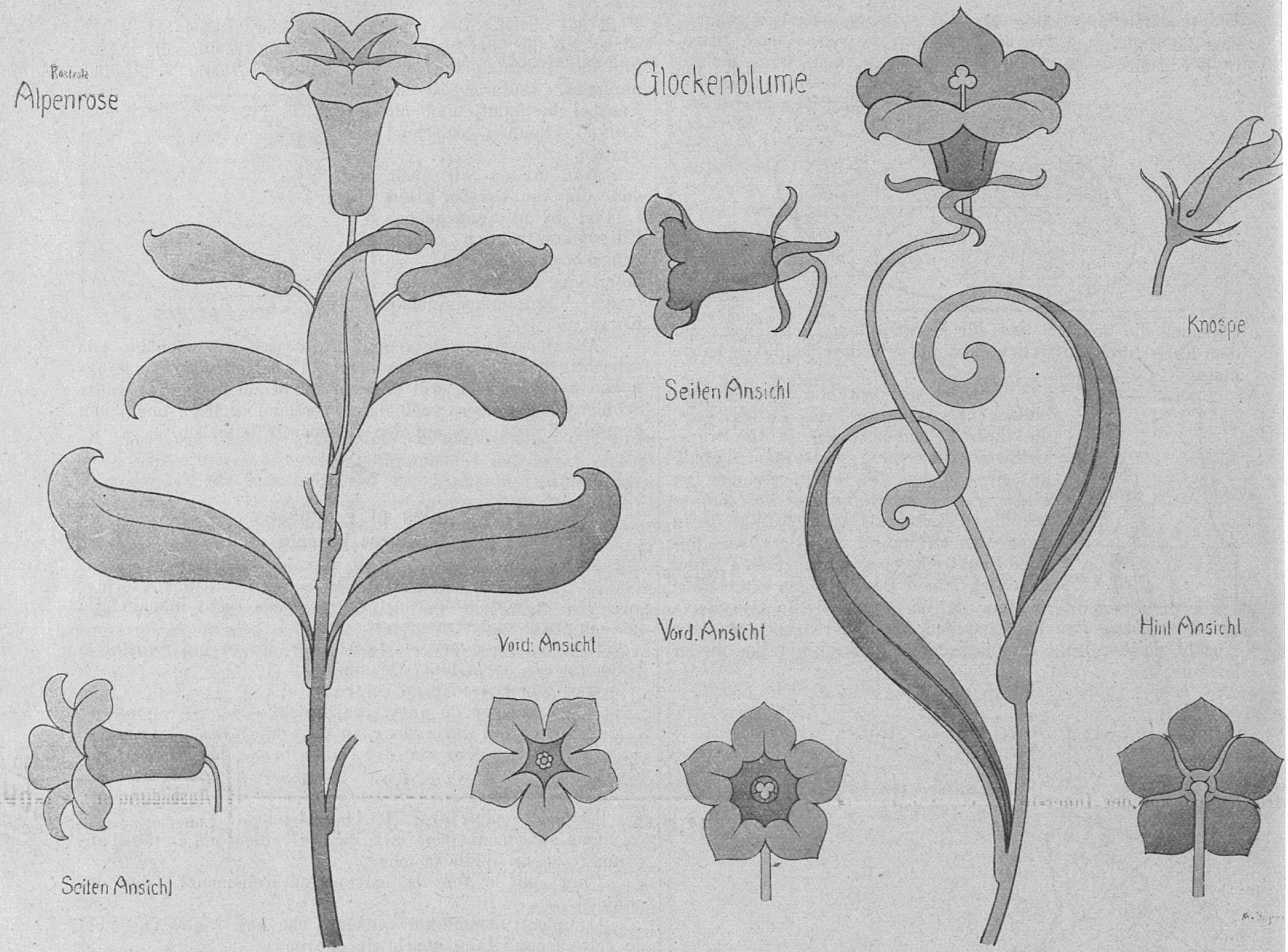
Comme l'œil est très délicat, il est protégé par quoi? (par les sourcils et les cils).

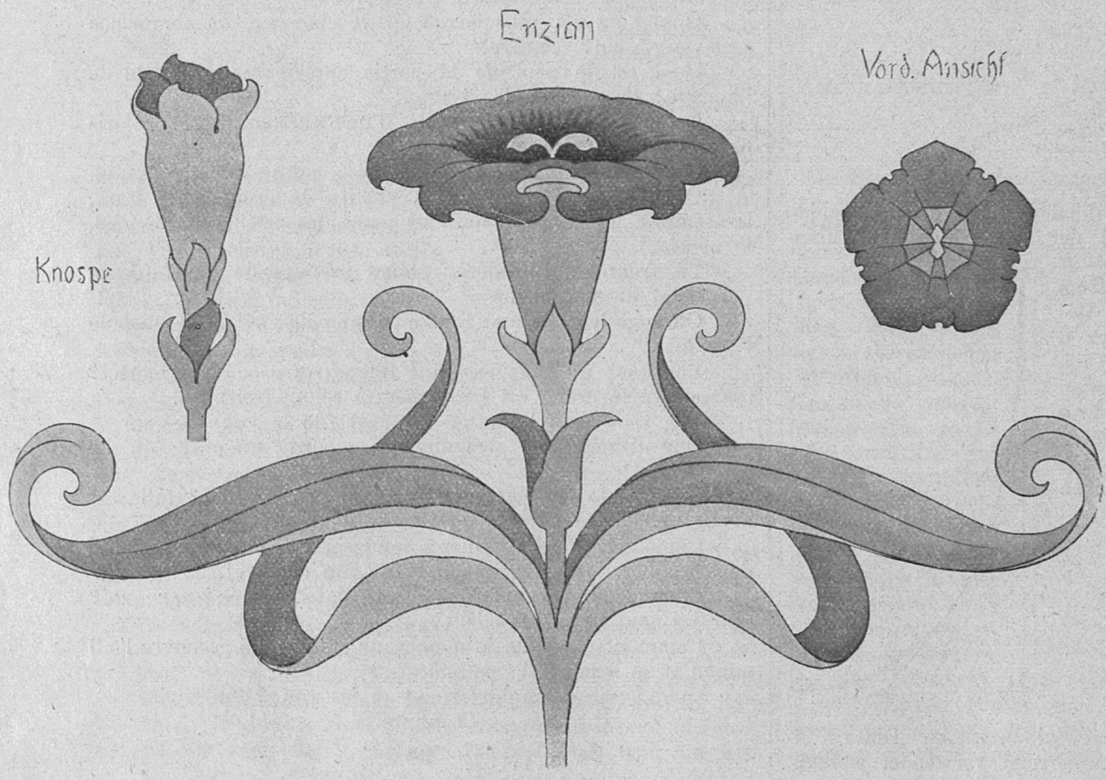
Comment s'appelle la membrane mobile qui recouvre l'œil quand il se ferme? (la paupière).

Quand par exemple ferme-t-on les yeux? (pour dormir).

(à suivre.)

Stilisirte Pflanzenmotive.





1. **Enzian.** Blüte violett (Ultramarin und Karmin) und blau (Ultram. mit Preussischblau und Karmin), Blätter dunkelgrün und hellgrün (Preussischblau und Indischgelb).

2. **Glockenblume.** Blüte violett (hell und dunkel), Blätter hell- und dunkelgrün, Stil blassgrün.

3. **Alpenrose.** Blüte rot (Krapplack oder Karmin), Blütenröhre etwas dunkler, Blätter grün (Preussischblau, Indischgelb und Indigo), das Mittelblatt gelbbraun, Stil bräunlich.

Segenreich.