

Zeitschrift: Berichte der St. Gallischen Naturwissenschaftlichen Gesellschaft
Herausgeber: St. Gallische Naturwissenschaftliche Gesellschaft
Band: 91 (2008)

Artikel: Das Rätsel der abgegriffenen Seiten
Autor: Bernet, Remo / Wyss, Roman
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-832624>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Das Rätsel der abgegriffenen Seiten

Remo Bernet und Roman Wyss

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	429
1. Einleitung	429
2. Geschichte des Gesetzes von Newcomb und Benford	430
3. Anwendungen	430
4. Urnenmodell	431
5. Zwei Beispiele zur Veranschaulichung der seltsamen Gesetzmässigkeit	432
Literaturverzeichnis	432

Zusammenfassung

Newcomb im 19. Jahrhundert und Benford im 20. Jahrhundert entdeckten, dass bei gewissen Zahlenmengen die Anfangsziffern nicht so verteilt sind, wie man es erwarten würde.

Diese unerwartete Eigenschaft wird an Beispielen erläutert. Ein mathematisches Urnenmodell wird berechnet. Die Ergebnisse dieses Modells werden mit tatsächlichen Verteilungen verglichen.

1. Einleitung

Werden an einer Lichtampel die Fahrzeugnummern mit Anfangsziffer Eins gezählt, dann jene mit Anfangsziffer Zwei, Drei bis zur Anfangsziffer Neun, so zeigt sich - anders als erwartet-, dass die Anfangsziffer Eins häufiger als die Anfangsziffer Zwei, die Zwei häufiger als die Drei usw. auftritt. Ähnlich verhält es sich, wenn man in einer Steuererklärung die Anfangsziffern z.B. der Saldi der Bankkonten auszählt.

Dieses seltsame Gesetz der Statistik soll mittels eines Urnenmodells plausibel gemacht werden.

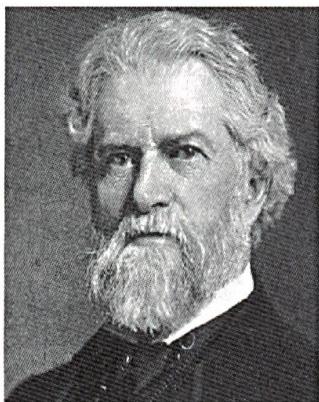


Abbildung 1:
Simon Newcomb

2. Geschichte des Gesetzes von Newcomb und Benford

Im 19. Jahrhundert entdeckte der kanadisch-amerikanische Mathematiker und Astronom Simon Newcomb (Abbildung 1), dass die vorderen Seiten von Logarithmentafeln abgegriffener waren als die hinteren. Er fand heraus, dass Mantissen mit der Anfangsziffer 1 häufiger vorkommen als jene mit der Anfangsziffer 2, jene mit der Anfangsziffer 2 häufiger als jene mit der Anfangsziffer 3 usw. Anschliessend fand er diese Gesetzmässigkeit bei vielen anderen Datensätzen: Bei Sterbetafeln, Körperlängen, Flusslängen usw. Obwohl er die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten nicht erklären konnte, gelang es ihm trotzdem, die Wahrscheinlichkeiten zu berechnen: Für die Wahrscheinlichkeit $p(z)$, dass eine Zahl mit Anfangsziffer z gezogen wird, gilt:

$$p(z) = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{z} \right)$$

So ergeben sich folgende Werte (Siehe Tabelle 1).

Newcomb publizierte seine Erkenntnisse im renommierten *«American Journal of Mathematics»*. Diese gerieten aber bald in Vergessenheit.

Im Jahr 1938 fiel dem Amerikaner Frank Benford bei Untersuchungen an Logarithmentafeln die seltsame Verteilung wiederum auf. Er publiziert die Erkenntnisse erneut. Um dem Urheber der Entdeckung Rechnung zu tragen, nennt man das Gesetz heute *«Newcomb-Benford-Law»*.

Benford erkannte, dass es auch Datensätze gibt, die dem Gesetz nicht gehorchen. So schränkte er die zu untersuchenden Datensätze ein: Die sogenannten *«unregelmässigen Zahlen»* durften weder Natur-konstanten noch ganz zufällig sein (wie z.B. in einem Lottospiel). Genauso wenig wie Newcomb vermochte er die seltsame Verteilung zu erklären.

3. Anwendungen

Das Gesetz von Benford und Newcomb hat in den letzten Jahren an Bekanntheit gewonnen. Die Fälschungen im Rechnungswesen der Grosskonzerne Enron und Worldcom wurde nachgewiesen, indem gezeigt wurde, dass die Häufigkeitsverteilung der Anfangsziffern der Zahlen nicht dem Gesetz von Benford und Newcomb gehorchte. Beim *«Erfinden»* von Zahlen neigen Menschen offen-

Anfangsziffer z	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Auftretenswahrscheinlichkeit in %	30.1	17.6	12.4	9.69	7.91	6.69	5.79	5.11	4.57

Tabelle 1

Anfangsziffer z	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Auftretenswahrscheinlichkeit gemäss Urnenmodell in %	33.3	21.3	15.7	12.5	10.4	8.86	7.74	6.86	6.17

Tabelle 2:
Wahrscheinlichkeiten im Urnenmodell.

sichtlich dazu, die Anfangsziffern so zu wählen, dass sich ihre Häufigkeitsverteilung deutlich von der Verteilung von Benford und Newcomb abhebt. Heute versucht man, Steuersündern systematisch auf die Schliche zu kommen, indem man diese spezifische Verteilungen der Anfangsziffern von Zahlen ausnützt.

Der genaue Grund der Verteilung ist bis heute noch nicht erklärt! Es gibt nur Ideen und Thesen, die mit ‚Offensichtlichkeit‘ argumentieren. Das Problem dieser ‚neuen‘ Verteilung ist, dass man bis noch vor Kurzem die Normalverteilung im Gauss schen Sinne als stärkste und überwiegende Verteilung betrachtet hat.

Es wird nun ein Modell betrachtet, das diesen Sachverhalt veranschaulichen soll.

4. Urnenmodell

Ausgegangen wird von einem Topf, welcher n Kugeln enthält. Die Kugeln sind von 1, 2, 3, 4, ..., n nummeriert. Es wird nun eine Kugel gezogen und die Anfangsziffer der Kugelnummer betrachtet. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Kugel die Anfangsziffer 1, 2, 3, ..., 9 aufweist.

Die Lösung des Problems soll anhand der Anfangsziffer 1 illustriert werden:

Die Idee zur Lösung des Problems ist, das Intervall $[1, n]$ in Teilintervalle zu zerlegen. Die Teilintervalle werden so gewählt, dass in den jeweiligen Teilintervallen alle aufeinander folgenden Zahlen mit der Anfangsziffer 1 enthalten sind. Folgt auf eine Zahl mit der Anfangsziffer 1 eine Zahl ohne diese Anfangsziffer, bildet man das nächste Teilintervall mit allen aufeinander folgenden Zahlen ohne die Anfangsziffer 1. Das ergibt dann folgende erste Teilintervalle:

1

$[2, 3, 4, \dots, 9]$
 $[10, 11, 12, \dots, 19]$
 $[20, 21, 22, \dots, 99]$
 $[100, 101, 102, \dots, 199]$
 usw.

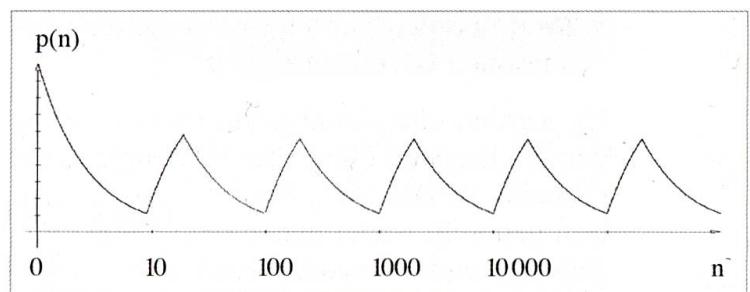


Abbildung 2:
 Die Wahrscheinlichkeitsfunktion hat lokale Maxima und Minima.

Anfangs-ziffer	Anzahl	Rel. Häufigkeit	Urnensmodell	Benford und Newcomb
1	200	72.2 %	$\approx 16.7 \%$	$\approx 30.1 \%$
2	39	14.1 %	$\approx 16.7 \%$	$\approx 17.6 \%$
3	16	5.8 %	$\approx 16.7 \%$	$\approx 12.5 \%$
4	14	5.1 %	$\approx 16.7 \%$	$\approx 9.7 \%$
5	3	1.1 %	$\approx 16.7 \%$	$\approx 7.9 \%$
6	5	1.8 %	$\approx 11.7 \%$	$\approx 6.7 \%$
7	0	0.00 %	0.00 %	$\approx 5.8 \%$
8	0	0.00 %	0.00 %	$\approx 5.1 \%$
9	0	0.00 %	0.00 %	$\approx 4.6 \%$

Tabelle 3:
 Wahrscheinlichkeiten der Anfangsziffern von Flusslängen.

Hat man die Regelmässigkeit der Teilintervalle erkannt, so ist es möglich, die Wahrscheinlichkeit $p(n)$, dass die Kugel eine Zahl mit Anfangsziffer 1 trägt, in Abhängigkeit von n zu berechnen. Aus der Grafik wird ersichtlich (Abbildung 2), dass die Wahrscheinlichkeitsfunktion p lokale Maxima und Minima annimmt. Mit wachsendem n streben die Minima gegen $1/9$, die Maxima gegen $5/9$. Wählt man nun den Durchschnitt $2/3$ der beiden Grenzwerte, so liegt dieser Wert nahe beim Wert gemäss dem Gesetz von Newcomb und Benford.

$$p(1) = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{1} \right) = 0.301$$

Analog erhält man für die übrigen Anfangsziffern (Siehe Tabelle 2).

5. Zwei Beispiele zur Veranschaulichung der seltsamen Gesetzmässigkeit

Es werden die Anfangsziffern der Länge der 277 längsten Flüsse der Erde untersucht (Tabelle 3). Die Verteilung der Anfangsziffern gehorcht weder genau dem Gesetz von Benford noch dem Urnenmodell. Tendenziell ist aber doch eine Ähnlichkeit mit dem Gesetz von Benford und Newcomb erkennbar.

Im zweiten Beispiel wird die Fibonacci-Folge betrachtet. Diese Folge lautet: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Allgemein wird die n-te Zahl der Folge berechnet, indem die Summe der beiden vorhergehenden Zahlen gebildet wird. Die Zahl 5 erhält man aus $2 + 3$.

Es werden die Anfangsziffern der ersten 300 Fibonacci-Zahlen betrachtet (Abbildung 5).

Bei den ersten 300 Zahlen der Fibonacci-Folge findet man eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den ausgezählten Häufigkeiten und der Verteilung von Benford und Newcomb. Das Urnenmodell beschreibt die relativen Häufigkeiten relativ gut für die Anfangsziffern 6, 7, 8 und 9.

Literaturverzeichnis

NZZ-Folio, Januarausgabe 2006
www.nzzfolio.ch (Archiv)

Mark J. Nigrini ›A Taxpayer Compliance Application of Benford's Law› Mai 1992, Journal of the American Taxation Assoc. 18, 72–91

http://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_277_l%C3%A4ngsten_Fl%C3%BCsse_der_Erde
Liste der 277 längsten Flüsse der Welt

http://de.wikipedia.org/wiki/Benfordsches_Gesetz

Anfangs-ziffer	Anzahl	Rel. Häufigkeit	Urnensmodell	Benford und Newcomb
1	91	30.3%	≈50.0%	≈30.1%
2	53	17.7%	≈15.0%	≈17.6%
3	38	12.7%	≈5.0%	≈12.5%
4	27	9.0%	≈5.0%	≈9.7%
5	25	8.3%	≈5.0%	≈7.9%
6	19	6.3%	≈5.0%	≈6.7%
7	17	5.7%	≈5.0%	≈5.8%
8	17	5.7%	≈5.0%	≈5.1%
9	13	4.3%	≈5.0%	≈4.6%

Tabelle 4:
Wahrscheinlichkeiten der Anfangsziffern
der Fibonacci-Folge.