

<b>Zeitschrift:</b>	Bericht über die Thätigkeit der St. Gallischen Naturwissenschaftlichen Gesellschaft
<b>Herausgeber:</b>	St. Gallische Naturwissenschaftliche Gesellschaft
<b>Band:</b>	42 (1900-1901)
<b>Artikel:</b>	Beziehungen zwischen Kugelfunktionen, deren Parameter sich um ganze Zahlen unterscheiden
<b>Autor:</b>	Bigler, U.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-834604">https://doi.org/10.5169/seals-834604</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 29.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Beziehungen zwischen Kugelfunktionen, deren Parameter sich um ganze Zahlen unterscheiden.

Von

Prof. Dr. **U. Bigler.**

---

Herr Heine hat in seinem Handbuche über Kugelfunktionen keinen besondern Abschnitt, welcher von den Relationen handelt, die zwischen den Kugelfunktionen (erster und zweiter Art) bestehen, deren Parameter sich um ganze Zahlen unterscheiden. Seine diesbezüglichen Bemerkungen kommen nur vereinzelt vor. In § 20 findet sich die Relation

$$a) \quad (n+1) \cdot P^{n+1} - (2n+1) P^n + n \cdot P^{n-1} = 0.$$

Dieselbe wird hier aus der Differentialgleichung

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2) \cdot \frac{\partial T}{\partial \alpha} + (\alpha - x) \cdot T = 0,$$

in Verbindung mit

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = \sum \alpha^\lambda P^\lambda(x)$$

abgeleitet. Aus dieser Relation folgt, dass

$$P^n = A \cdot P^1 + B \cdot P^0,$$

ist, wo A eine ganze Funktion  $(n-1) \cdot$  Grades von x ist und B eine solche vom Grade n. In § 21 findet sich eine ähnliche Rekursions-Formel für die Kugelfunktion  $Q^n$ , nämlich

$$b) \quad (n+1) Q^{n+1} - (2n+1) Q^n + n \cdot Q^{n-1} = 0.$$

Heine findet dieselbe aus der bekannten Entwicklung von

$\frac{x}{y-x}$  nach Kugelfunktionen und bemerkt, dass sich die

Funktion  $Q^n$  aus den Werten für  $Q^1$  und  $Q^0$  auf dieselbe Art ableiten lasse, wie  $P^n$  aus  $P^1$  und  $P^0$ . Diese Bemerkung ist allerdings richtig, bedarf aber doch einer näheren Begründung. Nach Heine soll Karl Neumann die beiden Relationen (a) und (b) benutzt haben, um die Gauss'sche Formel

$$Q^n = \frac{1}{2} \cdot P^n \log \frac{x+1}{x-1} - Z,$$

abzuleiten, wo  $Z$  eine ganze Funktion  $(n-1) \cdot$  Grades von  $x$  ist.

Für die hier auftretende Funktion  $Z$  hat Herr Christoffel die Reihe

$$Z = \frac{2n-1}{1 \cdot n} \cdot P^{n-1}(x) + \frac{2n-5}{3 \cdot (n-1)} \cdot P^{n-3} + \frac{2n-9}{5 \cdot (n-2)} \cdot P^{n-5} + \dots$$

angegeben. Eine Ableitung derselben findet sich bei Heine im § 26 und wird aus der Differentialgleichung für die Kugelfunktionen  $P$  und  $Q$  abgeleitet. Die von Gauss eingeführte Funktion  $Z$  stimmt allerdings mit der Funktion  $A$  in der Relation  $P^n = A \cdot P^1 + B \cdot P^0$  überein. Eine Bestimmung der Funktion  $B$  ist aber bei Heine nirgends zu finden. Beim Studium der Heine'schen Kugelfunktionen empfand ich das Bedürfnis, die beiden Funktionen  $A$  und  $B$  direkt zu bestimmen und legte meiner Untersuchung die allgemeine Form

$$c) \quad P^{a+\lambda} = -M_\lambda \cdot P^{a-1} + N_\lambda \cdot P^a$$

zu Grunde. Ich habe daher den positiven ganzzahligen

Parameter durch die beliebige Zahl  $a$  ersetzt, um die Formel

$$P^a = \frac{t g a \pi}{\pi} \cdot (Q^a - Q^{-a-1})$$

gebrauchen zu können. Mein Aufsatz enthält daher im Wesentlichen die Bestimmung der beiden Funktionen  $M_\lambda$  und  $N_\lambda$  der Relation (c). Den Rekursionsformeln für die zugeordneten Funktionen widmet Heine den § 63. Dort findet man die einfachsten Beziehungen. Wenn ich am Schlusse meiner Arbeit auch auf diesen Gegenstand eintrete, so geschieht es nicht deshalb, viel neues bieten zu können, sondern weil ich glaube, die Sache einfacher und natürlicher behandeln zu können, als es bei Heine geschieht. In der Programmarbeit aus dem Jahre 1881 des Herrn Prof. Schläfli über Kugelfunktionen findet sich auf Seite 17 für die Heine'sche Kugelfunktion zweiter Art eine allgemein gültige Entwicklungsreihe, welche ich meiner Arbeit zu Grunde lege. Dort steht

$$1. \quad Q^a(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma(\lambda + \frac{a+1}{2}) \cdot \Gamma(\lambda + 1 + \frac{a}{2})}{\lambda! \Gamma(\lambda + a + \frac{3}{2})} \cdot x^{-a-1-2\lambda}.$$

Aus dieser Formel bestimmen wir zuerst  $\frac{\partial Q^a(x)}{\partial x}$ ; man erhält

$$\frac{\partial Q^a}{\partial x} = - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(\lambda + \frac{a+1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{a+1}{2} + \lambda) \cdot \Gamma(\lambda + 1 + \frac{a}{2})}{\lambda! \Gamma(\lambda + a + \frac{3}{2})} \cdot x^{-a-2-2\lambda}$$

und weil  $a \Gamma(a) = \Gamma(a+1)$  ist, so folgt

$$2. \quad \frac{\partial Q^a}{\partial x} = - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma(\lambda + 1 + \frac{a+1}{2}) \cdot \Gamma(\lambda + 1 + \frac{a}{2})}{\lambda! \Gamma(\lambda + a + \frac{3}{2})} \cdot x^{-a-2\lambda-2}.$$

Wird diese Formel mit  $x$  multipliziert und zu  $(a+1) \cdot Q^a$  addiert, so folgt unmittelbar

$$(x \cdot \frac{\partial Q^a}{\partial x} + (a+1) \cdot Q^a) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \left( \frac{a+1}{2} \cdot \Gamma(\lambda + \frac{a+1}{2}) - \Gamma(\lambda + \frac{a+3}{2}) \right) \cdot \frac{\Gamma(\lambda + 1 + \frac{a}{2})}{\lambda! \Gamma(\lambda + a + \frac{3}{2})} \cdot x^{-a-2\lambda-1}.$$

Nun ist aber  $\Gamma(\lambda + \frac{a+3}{2}) = (\lambda + \frac{a+1}{2}) \cdot \Gamma(\lambda + \frac{a+1}{2})$  und daher auch

$$\frac{a+1}{2} \cdot \Gamma(\lambda + \frac{a+1}{2}) - \Gamma(\lambda + 1 + \frac{a+1}{2}) = -\lambda \cdot \Gamma(\lambda + \frac{a+1}{2}),$$

folglich

$$\left( x \frac{\partial Q^a}{\partial x} + (a+1) \cdot Q^a \right) = - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma(\lambda + \frac{a+1}{2}) \Gamma(\lambda + 1 + \frac{a}{2})}{(\lambda-1)! \Gamma(\lambda + a + \frac{3}{2})} \times x^{-a-2\lambda-1}.$$

Ersetzt man in dieser Formel  $(a+1)$  durch  $a$  und  $(\lambda-1)$  durch  $\lambda$ , so ergibt sich

$$3. \left( x \frac{\partial}{\partial x} + a \right) \cdot Q^{a-1} = - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma(\lambda + 1 + \frac{a}{2}) \Gamma(\lambda + \frac{a+3}{2})}{\lambda! \Gamma(\lambda + a + \frac{3}{2})} \times x^{-a-2\lambda-2} = \frac{\partial Q^a}{\partial x}.$$

Auf demselben Wege erhält man auch die andere Formel

$$4. \left( x \frac{\partial}{\partial x} - a \right) \cdot Q^a = - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma(\lambda + \frac{a+1}{2}) \cdot \Gamma(\lambda + 1 + \frac{a}{2})}{\lambda! \Gamma(\lambda + a + \frac{1}{2})} \times x^{-a-2\lambda-1} = \frac{\partial Q^{a-1}}{\partial x}.$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) ergibt sich, dass man sowohl  $\frac{\partial Q^a}{\partial x}$ , als auch  $\frac{\partial Q^{a-1}}{\partial x}$  durch die Funktionen  $Q^a$  und  $Q^{a-1}$  darstellen kann. Wir schreiben die Gleichungen (3) und (4) in der Form

$$\left. \begin{aligned} x \cdot \frac{\partial Q^{a-1}}{\partial x} - \frac{\partial Q^a}{\partial x} &= -a \cdot Q^{a-1} \\ -\frac{\partial Q^{a-1}}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial Q^a}{\partial x} &= a \cdot Q^a \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} x, 1 \\ 1, x \end{array}$$

und erhalten aus denselben

$$5. \quad (x^2 - 1) \cdot \frac{\partial Q^{a-1}}{\partial x} = -a \cdot (x Q^{a-1} - Q^a),$$

$$6. \quad (x^2 - 1) \cdot \frac{\partial Q^a}{\partial x} = a \cdot (x Q^a - Q^{a-1}).$$

Ersetzt man in Gleichung (5) den Parameter  $a$  durch  $(a + 1)$ , so erhält man aus dieser Form in Verbindung mit (6) die Heine'sche Relation für einen allgemeinen Parameter in der Gestalt

$$7. \quad Q^{a+1} = \frac{2a+1}{a+1} \cdot x Q^a - \frac{a}{a+1} \cdot Q^{a-1}.$$

Es folgt nun die Ableitung der entsprechenden Rekursionsformel für die Kugelfunktion erster Art und benutzen dazu neben den schon gefundenen Beziehungen noch die Gleichung

$$8. \quad P^a = \frac{\operatorname{tg} a \pi}{\pi} \cdot (Q^a - Q^{-a-1}).$$

Aus (5) und (6) folgt

$$a) \quad (x^2 - 1) \cdot \frac{\partial Q^a}{\partial x} = a (x Q^a - Q^{a-1}) = (a+1)(Q^{a+1} - x Q^a),$$

$$b) \quad (x^2 - 1) \cdot \frac{\partial Q^{-a-1}}{\partial x} = a (x Q^{-a-1} - Q^{-a}) = (a+1)(Q^{-a-2} - x Q^{-a-1});$$

wird nun die Gleichung (b) von der Gleichung (a) subtrahiert, so erhält man die Gleichung

$$\text{c)} (x^2 - 1) \frac{\partial}{\partial x} (Q^a - Q^{-a-1}) = a[x(Q^a - Q^{-a-1}) - (Q^{a-1} - Q^{-a})] \\ = (a+1)[(Q^{a+1} - Q^{-a-2}) - x(Q^a - Q^{-a-1})]$$

und hieraus

$$8. \quad (x^2 - 1) \cdot \frac{\partial P^{a-1}}{\partial x} = -a(xP^{a-1} - P^a),$$

$$9. \quad (x^2 - 1) \cdot \frac{\partial P^a}{\partial x} = a \cdot (xP^a - P^{a-1}),$$

$$10. \quad P^{a+1} = \frac{2a+1}{a+1} \cdot xP^a - \frac{a}{a+1} \cdot P^{a-1}.$$

Aus Gleichung (7) erkennt man, dass sich die Funktion  $Q^{a+\lambda}$  aus den Funktionen  $Q^a$  und  $Q^{a-1}$  aufbauen lässt, dass es daher erlaubt ist, für  $Q^{a+\lambda}$  die Form

$$11. \quad Q^{a+\lambda} = -M_\lambda \cdot Q^{a-1} + N_\lambda \cdot Q^a$$

anzunehmen, wo  $M_\lambda$  und  $N_\lambda$  ganze Funktionen von  $x$  sind. Ebenso folgt aus Gleichung (10) die Relation

$$12. \quad P^{a+\lambda} = -M_\lambda \cdot P^{a-1} + N_\lambda \cdot P^a.$$

Wir werden bald zeigen können, dass die Funktionen  $M_\lambda$  und  $N_\lambda$  resp. mit  $M_\lambda$  und  $N_\lambda$  übereinstimmen müssen. Die obigen Relationen sollen noch zur Ableitung der Differentialgleichung für die Kugelfunktionen benutzt werden. Man hat

$$\text{a)} \quad \frac{\partial}{\partial x} \cdot (Q^a - xQ^{a-1}) = (a-1)Q^{a-1};$$

$$\text{b)} \quad \frac{\partial}{\partial x} \cdot (xQ^a - Q^{a-1}) = (a+1)Q^a;$$

wird in der ersten Gleichung a durch  $(a+1)$  ersetzt und integriert, so erhält man

$$\text{c)} \quad \int Q^a \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot (Q^{a+1} - xQ^a) = \frac{1}{a+1} \cdot (xQ^a - Q^{a-1});$$

nun ist aber

$$(x Q^a - Q^{a-1}) = \frac{1}{a} \cdot (x^2 - 1) \cdot \frac{\partial Q^a}{\partial x}, \text{ folglich}$$

$$d) \quad a(a+1) \int Q^a \cdot dx = (x^2 - 1) \cdot \frac{\partial Q^a}{\partial x},$$

und daher

$$13. \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 - 1) \frac{\partial Q^a}{\partial x} \right) = a(a+1) Q^a.$$

Dieselbe Gleichung erhält man auch für die Funktion  $P^a$ . Wir wollen zuerst den Versuch machen, die Funktionen  $M_\lambda$  und  $N_\lambda$  auf empirischem Wege zu bestimmen. Zunächst ist

$$M_0 = 0, \quad N_0 = 1.$$

Ferner erkennt man aus der Gleichung (7), dass

$$M_1 = -\frac{a}{a+1}, \quad N_1 = \frac{2a+1}{a+1} \cdot x$$

ist. Um  $M_2$  und  $N_2$  zu bestimmen, ersetze man in Gleichung (7)  $a$  durch  $(a+1)$  und eliminiere aus den beiden Gleichungen

$$a) \quad Q^{a+1} = \frac{2a+1}{a+1} \cdot x Q^a - \frac{a}{a+1} \cdot Q^{a-1},$$

$$b) \quad Q^{a+2} = \frac{2a+3}{a+2} \cdot x Q^{a+1} - \frac{a+1}{a+2} \cdot Q^a,$$

die Funktion  $Q^{a+1}$ . Das Ergebnis zeigt, dass

$$M_2 = \frac{a(2a+3)}{(a+1)(a+2)} \cdot x, \quad N_\lambda = \frac{(2a+1)(2a+3)}{(a+1)(a+2)} \cdot x^2 - \frac{a+1}{a+2},$$

ist. Ebenso findet man

$$M_3 = \frac{a(2a+3)(2a+5)}{(a+1)(a+2)(a+3)} \cdot x^2 - \frac{a(a+2)}{(a+1)(a+3)},$$

$$N_3 = \frac{(2a+1)(2a+3)(2a+5)}{(a+1)(a+2)(a+3)} \cdot x^3 - \frac{(2a+3)(2a^2+6a+3)}{(a+1)(a+2)(a+3)} \cdot x.$$

Der unzerlegbare Faktor  $(2a^2 + 6a + 3)$  lässt nicht hoffen, auf empirischem Wege ein Gesetz in den Koëfficienten zu finden. Wir sind daher genötigt, auf andere Weise den Funktionen beizukommen. Zunächst sollen die Rekursionsformeln für die Funktionen  $M_\lambda$  und  $N_\lambda$  aufgestellt werden. Man ersetze in der Gleichung (7)  $a$  durch  $(a + \lambda)$  und erhält

$$Q^{a+\lambda+1} = -\frac{a+\lambda}{a+\lambda+1} \cdot Q^{a+\lambda-1} + \frac{2a+2\lambda+1}{a+\lambda+1} \cdot x Q^{a+\lambda};$$

nun ist aber

$$Q^{a+\lambda} = -M_\lambda \cdot Q^{a-1} + N_\lambda \cdot Q^a, \quad Q^{a+\lambda-1} = -M_{\lambda-1} \cdot Q^{a-1} + N_{\lambda-1} \cdot Q^a,$$

folglich hat man auch

$$\begin{aligned} a) \quad Q^{a+\lambda+1} &= \left[ \frac{a+\lambda}{a+\lambda+1} \cdot M_{\lambda-1} - \frac{2a+2\lambda+1}{a+\lambda+1} \cdot x M_\lambda \right] \cdot Q^{a-1} \\ &\quad + \left[ -\frac{a+\lambda}{a+\lambda+1} \cdot N_{\lambda-1} + \frac{2a+2\lambda+1}{a+\lambda+1} \cdot x N_\lambda \right] Q^a. \end{aligned}$$

Anderseits hat man auch

$$b) \quad Q^{a+\lambda+1} = -M_{\lambda+1} \cdot Q^{a-1} + N_{\lambda+1} \cdot Q^a$$

und die Vergleichung von (a) und (b) ergibt

$$14. \quad M_{\lambda+1} = -\frac{a+\lambda}{a+\lambda+1} \cdot M_{\lambda-1} + \frac{2a+2\lambda+1}{a+\lambda+1} \cdot x M_\lambda,$$

$$15. \quad N_{\lambda+1} = -\frac{a+\lambda}{a+\lambda+1} \cdot N_{\lambda-1} + \frac{2a+2\lambda+1}{a+\lambda+1} \cdot x N_\lambda.$$

Ganz auf demselben Wege gelangt man auch zu den beiden andern Relationen

$$14_1. \quad M_{\lambda+1} = -\frac{a+\lambda}{a+\lambda+1} \cdot M_{\lambda-1} + \frac{2a+2\lambda+1}{a+\lambda+1} \cdot x M_\lambda,$$

$$15_1. \quad N_{\lambda+1} = -\frac{a+\lambda}{a+\lambda+1} \cdot N_{\lambda-1} + \frac{2a+2\lambda+1}{a+\lambda+1} \cdot x N_\lambda.$$

Diese Relationen zeigen nun, dass ganz allgemein  $M_\mu = \mathfrak{M}_\mu$  und  $N_\mu = \mathfrak{N}_\mu$  ist. Denn nehmen wir an, die beiden Gleichungen  $M_\lambda = \mathfrak{M}_\lambda$  und  $M_{\lambda-1} = \mathfrak{M}_{\lambda-1}$  seien bewiesen, so folgt aus (14) und (14<sub>1</sub>), dass auch die Gleichung  $M_{\lambda+1} = \mathfrak{M}_{\lambda+1}$  bestehen muss. Nun kann man direkt zeigen, dass  $M_0 = \mathfrak{M}_0$  und  $M_1 = \mathfrak{M}_1$  ist; also muss auch  $M_2 = \mathfrak{M}_2$ ,  $M_3 = \mathfrak{M}_3$  etc. sein. Dasselbe gilt auch für die Funktionen  $N$  und  $\mathfrak{N}$ . Zur näheren Bestimmung der beiden Funktionen  $M$  und  $N$  benutze ich die Rekursionsformel

$$(a + \lambda) \cdot Q^{a+\lambda} = (2a + 2\lambda - 1) \cdot x Q^{a+\lambda-1} - (a + \lambda + 1) \cdot Q^{a+\lambda-2},$$

multipliziere dieselbe mit  $s^\lambda$  und summiere beide Seiten von  $\lambda = 1$  bis  $\lambda = \infty$ .

Dadurch gelangt man zu der Formel

$$16. \quad \sum_{\lambda=1}^{\infty} (a + \lambda) s^\lambda Q^{a+\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (2a + 2\lambda + 1) \cdot x s^\lambda Q^{a+\lambda-1} - \sum_{\lambda=1}^{\infty} (a + \lambda - 1) s^\lambda Q^{a+\lambda-2};$$

wenn nun

$$17. \quad V = Q^a + s Q^{a+1} + s^2 Q^{a+2} + s^3 Q^{a+3} + \dots = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} s^\lambda Q^{a+\lambda}$$

gesetzt wird, also

$$17_1. \quad s \frac{\partial V}{\partial s} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda s^\lambda Q^{a+\lambda} = s Q^{a+1} + 2s^2 Q^{a+2} + 3s^3 Q^{a+3} + \dots$$

so kann die linke Seite der Gleichung (16) durch

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} (a + \lambda) s^\lambda Q^{a+\lambda} &= a \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} s^\lambda Q^{a+\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda s^\lambda Q^{a+\lambda} \\ &= a(V - Q^a) + s \cdot \frac{\partial V}{\partial s}, \end{aligned}$$

dargestellt werden. Auch die rechte Seite der Gleichung (16) erfährt durch Einführung der Funktion  $V$  eine starke Vereinfachung. Man findet

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} (2a + 2\lambda - 1) \cdot x s^{\lambda} Q^{a+\lambda-1} &= (2a + 1) \cdot x s Q^a + \\ &\quad (2a + 3) x s^2 Q^{a+1} + (2a + 5) x s^3 Q^{a+2} + \dots, \\ &= (2a + 1) s x \cdot [Q^a + s Q^{a+1} + s^2 Q^{a+2} + s^3 Q^{a+3} + \dots] + \\ &\quad 2 s^2 x \cdot [Q^{a+1} + 2 s Q^{a+2} + 3 s^2 Q^{a+3} + 4 s^3 Q^{a+4} + \dots] \end{aligned}$$

und daher ist

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} (2a + 2\lambda - 1) \cdot x s^{\lambda} Q^{a+\lambda-1} = (2a + 1) x s \cdot V + 2 x s^2 \cdot \frac{\partial V}{\partial s}.$$

Ebenso findet man

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^{\infty} (a + \lambda - 1) s^{\lambda} Q^{a+\lambda-2} &= a s Q^{a-1} + (a + 1) s^2 Q^a + \\ &\quad (a + 2) s^3 Q^{a+1} + (a + 3) s^4 Q^{a+2} + \dots \\ &= a s Q^{a-1} + (a + 1) s^2 \cdot [Q^a + s Q^{a+1} + s^2 Q^{a+2} + \dots] + \\ &\quad s^3 \cdot [Q^{a+1} + 2 s Q^{a+2} + 3 s^2 Q^{a+3} + \dots] \\ &= a s Q^{a-1} + (a + 1) \cdot s^2 V + s^3 \cdot \frac{\partial V}{\partial s}; \end{aligned}$$

daher geht die Gleichung (16) über in

$$s \cdot (1 - 2 x s + s^2) \frac{\partial V}{\partial s} + (a - (2a + 1) x s + (a + 1) s^2) \cdot V = a (Q^a - s Q^{a-1});$$

beachtet man noch, dass

$$a - (2a + 1) x \cdot s + (a + 1) s^2 = a (1 - 2 x s + s^2) + s^2 - x s,$$

so erhält man für  $V$  die Gleichung

$$18. \quad \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{s} \cdot \left( a + \frac{s^2 - x s}{1 - 2 x s + s^2} \right) \cdot V = \frac{a \cdot (Q^a - s Q^{a-1})}{s(1 - 2 x s + s^2)}.$$

Dieselbe soll nun zur Integration eingerichtet werden. Zunächst schreiben wir sie in der Form

$$\frac{dV}{V} + a \cdot \frac{ds}{s} + \frac{(s-x) \cdot ds}{1 - 2xs + s^2} = \frac{aQ^a ds}{s \cdot (1 - 2xs + s^2) \cdot V} - \frac{aQ^{a-1} ds}{(1 - 2xs + s^2) \cdot V}$$

und setzen abkürzend

$$w^2 = 1 - 2xs + s^2; \quad d w^2 = 2(s-x) ds;$$

dann hat man

$$\frac{dV}{V} + a \cdot \frac{ds}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dw^2}{w^2} = \frac{aQ^a ds}{s w^2 V} - \frac{aQ^{a-1} ds}{w^2 V}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung lässt sich als ein vollständiges Differential darstellen; denn es ist

$$d \log V + a \cdot d \log s + \frac{1}{2} d \log w^2 = d \log s^a w V,$$

also  $d \log s^a w V = \frac{aQ^a ds}{s w^2 V} - \frac{aQ^{a-1} ds}{w^2 V},$

oder  $\frac{d \cdot (s^a w V)}{s^a w V} = \frac{aQ^a ds}{s w^2 V} - \frac{aQ^{a-1} ds}{w^2 \cdot V},$

und daher

$$d(s^a w V) = aQ^a \cdot \frac{s^{a-1} ds}{w} - aQ^{a-1} \cdot \frac{s^a ds}{w},$$

folglich

$$19. \quad V s^a w = aQ^a \cdot \int_0^{s^{a-1} \cdot ds} \frac{w}{w} - aQ^{a-1} \cdot \int_0^{s^a ds} \frac{w}{w}.$$

Der Parameter werde so gewählt, dass die untere Grenze des Integrals zugänglich ist. Um die Integration ausführen zu können, ersetze man  $\frac{1}{w}$  durch die bekannte

Entwicklung nach Kugelfunktionen erster Art, nämlich

$$\frac{1}{w} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} s^\lambda P^\lambda(x).$$

Man erhält dann für die Funktion  $V$  die Entwicklung

$$20. \quad V = \frac{1}{s^a} \cdot \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} s^\mu P^\mu \left[ a Q^a \cdot \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{s^{a+\lambda} P^\lambda}{a+\lambda} - a Q^{a-1} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{s^{a+\lambda+1} P^\lambda}{a+\lambda+1} \right],$$

oder mittelst der Abkürzungen

$$J = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} s^\mu P^\mu \cdot \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{s^\lambda P^\lambda}{a+\lambda}, \quad H = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} s^\mu P^\mu \cdot \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{s^{\lambda+1} P^\lambda}{a+\lambda+1},$$

$$20_1. \quad V = Q^a \cdot aJ - Q^{a-1} \cdot aH.$$

Die entwickelte Form von  $J$  ist eine Reihe, die nach steigenden Potenzen von  $s$  fortschreitet; die Exponenten bilden eine arithmetische Reihe mit der Differenz 1. Es ist daher

$$J = A_o^a + A_1^a s + A_2^a s^2 + \dots = \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m^a s^m;$$

der Koeffizient  $A_m^a$  wird dadurch erhalten, dass man in der entwickelten Form alle Glieder sammelt, welche die Potenz  $s^m$  enthalten. Man setze daher  $\lambda + \mu = m$ , also  $\mu = m - \lambda$  und lasse  $\lambda$  von null bis  $m$  laufen.

Es ist daher

$$A_m^a = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} \frac{P^\lambda \cdot P^{m-\lambda}}{a+\lambda}.$$

Ebenso ist

$$H = B_1^a s + B_2^a s^2 + B_3^a s^3 + \dots = \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n^a \cdot s^n.$$

Um  $B_n^a$  zu bestimmen, setze man  $\lambda + \mu + 1 = n$ , also  $\mu = n - \lambda - 1$  und lasse  $\lambda$  von 0 bis  $(n - 1)$  laufen. Man erhält

$$B_n^a = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{P^\lambda \cdot P^{n-\lambda-1}}{a + \lambda + 1} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{P^{\lambda-1} \cdot P^{n-\lambda}}{a + \lambda}.$$

Dass die Entwicklung der Funktion  $V$  die in (20<sub>1</sub>) angegebene Form annehmen würde, war zu erwarten. Denn jede in der Definitionsgleichung (17) auftretende Funktion  $Q^{a+\lambda}$  lässt sich nach Gleichung (7) durch die Funktionen  $Q^{a-1}$  und  $Q^a$  darstellen. Andererseits lässt sich nach Gleichung (11) die Funktion  $Q^{a+\lambda}$  durch die Funktionen  $M$  und  $N$  darstellen und daher ist auch  $V$  selber durch diese Funktionen darstellbar. Ersetzt man daher in Gleichung (17) die Funktion  $Q^{a+\lambda}$  durch  $(-M_\lambda \cdot Q^{a-1} + N_\lambda \cdot Q^a)$ , so folgt

$$21. \quad V = Q^{a-1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} -M_\lambda s^\lambda + Q^a \cdot \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} N_\lambda s^\lambda.$$

Da nun die Entwicklung von  $V$  in Gleichung (21) mit derjenigen in Gleichung (20<sub>1</sub>) übereinstimmen muss, so erhalten wir folgende zwei Gleichungen:

$$22. \quad aH = M_0 s^0 + M_1 s^1 + M_2 s^2 + \dots = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} M_\lambda s^\lambda;$$

$$23. \quad aJ = N_0 s^0 + N_1 s^1 + N_2 s^2 + \dots = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} N_\lambda s^\lambda;$$

oder

$$22_1. \quad a \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n^a s^n = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} M_\lambda s^\lambda,$$

$$23_1. \quad a \cdot \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m^a s^m = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} N_\lambda s^\lambda.$$

Setzt man in diesen Summen die Koëffizienten gleich hoher Potenzen von  $s$  auf beiden Seiten einander gleich, so erhält man schliesslich zur Bestimmung der Funktionen  $M$  und  $N$  die Gleichungen:

$$24. \quad M_{\lambda} = a \cdot B_{\lambda}^a = \sum_{\mu=1}^{\mu=\lambda} \frac{a}{a+\mu} \cdot P^{\mu-1} P^{\lambda-\mu};$$

$$25. \quad N_{\lambda} = a \cdot A_{\lambda}^a = \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda} \frac{a}{a+\mu} \cdot P^{\mu-1} P^{\lambda-\mu}.$$

Die Funktion  $M_{\lambda}$  ist in Bezug auf  $x$  vom Grade  $(\lambda - 1)$  und  $N_{\lambda}$  vom Grade  $\lambda$ . Für  $Q^{a+\lambda}$  erhalten wir die Entwicklung

$$26. \quad Q^{a+\lambda} = -a B_{\lambda}^a Q^{a-1} + a A_{\lambda}^a Q^a = -Q^{a-1} \sum_{\mu=1}^{\mu=\lambda} \frac{a}{a+\mu} \cdot P^{\mu-1} P^{\lambda-\mu} \\ + Q^a \cdot \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda} \frac{a}{a+\mu} \cdot P^{\mu} P^{\lambda-\mu}.$$

Es mag noch erwähnt werden, dass sich die Funktion  $B_{\lambda}^a$  durch die Funktion  $A$  darstellen lässt. Weil

$$B_{\lambda}^a = \sum_{\mu=1}^{\mu=\lambda} \frac{1}{a+\mu} \cdot P^{\mu-1} P^{\mu-\lambda} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-1} \frac{1}{a+\mu+1} \cdot P^{\mu} P^{\lambda-(\mu+1)}$$

und  $A_{\lambda-1}^{a+1} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-1} \frac{1}{a+\mu+1} \cdot P^{\mu} P^{\lambda-(\mu+1)}$  ist

so besteht die Gleichung

$$27. \quad B_{\lambda}^a = A_{\lambda-1}^{a+1}.$$

Es ist daher auch

$$28. \quad Q^{a+\lambda} = a (A_{\lambda}^a \cdot Q^a - A_{\lambda-1}^{a+1} \cdot Q^{a-1}),$$

$$29. \quad P^{a+\lambda} = a (A_{\lambda}^a \cdot P^a - A_{\lambda-1}^{a+1} \cdot P^{a-1}).$$

Die beiden Funktionen  $M_\lambda$  und  $N_\lambda$  sollen noch auf eine andere Art durch Kugelfunktionen erster und zweiter Art dargestellt werden und benutzen dazu die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} a) \quad Q^a \cdot N_\lambda - Q^{a-1} \cdot M_\lambda &= Q^{a+\lambda}, \quad \parallel P^a, \quad P^{a-1}; \\ b) \quad P^a \cdot N_\lambda - P^{a-1} \cdot M_\lambda &= P^{a+\lambda}, \quad \parallel -Q^a, \quad -Q^{a-1}. \end{aligned}$$

Aus denselben ergibt sich

$$30. \quad M_\lambda = \frac{P^a \cdot Q^{a+\lambda} - P^{a+\lambda} \cdot Q^a}{P^{a-1} \cdot Q^a - P^a \cdot Q^{a-1}},$$

$$31. \quad N_\lambda = \frac{P^{a-1} \cdot Q^{a+\lambda} - P^{a+\lambda} \cdot Q^{a-1}}{P^{a-1} \cdot Q^a - P^a \cdot Q^{a-1}}.$$

Der gemeinsame Nenner beider Brüche sei mit  $D$  bezeichnet; dann ist

$$D = \begin{vmatrix} Q^a \cdot -Q^{a-1} \\ P^a \cdot -P^{a-1} \end{vmatrix};$$

zur Bestimmung dieser Determinante benutzen wir die beiden Gleichungen

$$(x^2 - 1) \cdot \frac{\partial Q^a}{\partial x} = a \cdot (x Q^a - Q^{a-1}),$$

$$(x^2 - 1) \cdot \frac{\partial P^a}{\partial x} = a \cdot (x P^a - P^{a-1}),$$

aus denselben folgt, dass

$$-a \cdot Q^{a-1} = -a x Q^a + (x^2 - 1) \cdot \frac{\partial Q^a}{\partial x},$$

$$-a \cdot P^{a-1} = -a x P^a + (x^2 - 1) \cdot \frac{\partial P^a}{\partial x}.$$

Werden diese Werte in die Determinante eingesetzt, so nimmt dieselbe folgende Gestalt an:

$$D = \frac{x^2 - 1}{a} \cdot \begin{vmatrix} Q^a \cdot \frac{\partial Q^a}{\partial x} \\ P^a \cdot \frac{\partial P^a}{\partial x} \end{vmatrix}.$$

Es soll nun zuerst gezeigt werden, dass die Determinante  $D$  von  $x$  unabhängig ist, also eine Konstante darstellt. Aus Gleichung (13) folgt, dass

$$a) \quad \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left( (x^2 - 1) \cdot \frac{\partial Q^a}{\partial x} \right) - a(a+1)Q^a = 0 \quad \parallel \quad P^a$$

$$b) \quad \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left( (x^2 - 1) \cdot \frac{\partial P^a}{\partial x} \right) - a(a+1)P^a = 0 \quad \parallel \quad -Q^a;$$

wird die erste dieser Gleichungen mit  $P^a$ , die zweite mit  $(-Q^a)$  multipliziert und addiert, so erhält man

$$c) \quad P^a \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 - 1) \cdot \frac{\partial Q^a}{\partial x} \right) - Q^a \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 - 1) \frac{\partial P^a}{\partial x} \right) = 0.$$

Nun ist aber

$$P^a \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 - 1) \cdot \frac{\partial Q^a}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left( P^a \cdot (x^2 - 1) \frac{\partial Q^a}{\partial x} \right) - \\ (x^2 - 1) \cdot \frac{\partial P^a}{\partial x} \cdot \frac{\partial Q^a}{\partial x};$$

und ebenso

$$Q^a \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 - 1) \cdot \frac{\partial P^a}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left( Q^a \cdot (x^2 - 1) \frac{\partial P^a}{\partial x} \right) - \\ (x^2 - 1) \cdot \frac{\partial P^a}{\partial x} \cdot \frac{\partial Q^a}{\partial x},$$

folglich

$$\begin{aligned} P^a \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 - 1) \frac{\partial Q^a}{\partial x} \right) - Q^a \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 - 1) \frac{\partial P^a}{\partial x} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (x^2 - 1) \left( P^a \cdot \frac{\partial Q^a}{\partial x} - Q^a \cdot \frac{\partial P^a}{\partial x} \right) \right]. \end{aligned}$$

Weil nun die linke Seite dieser Gleichung nach (c) den Wert null besitzt, so besteht auch noch die andere

$$d) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[ (x^2 - 1) \left( P^a \cdot \frac{\partial Q^a}{\partial x} - Q^a \cdot \frac{\partial P^a}{\partial x} \right) \right] = 0$$

und daher muss  $D$  von  $x$  unabhängig sein. Um nun diese Konstante zu bestimmen, gehen wir auf die ursprüngliche Form zurück, nämlich

$$D = \begin{vmatrix} Q^a \cdot & -Q^{a-1} \\ P^a \cdot & -P^{a-1} \end{vmatrix},$$

und ersetzen in derselben die Funktionen  $P^a$  und  $P^{a-1}$  mittelst der Gleichungen

$$\begin{aligned} P^a &= \frac{\operatorname{tg} a \pi}{\pi} \cdot (Q^a - Q^{a-1}); \quad P^{a-1} = \frac{\operatorname{tg} a \pi}{\pi} \cdot (Q^{a-1} - Q^{-a}); \\ &(\operatorname{tg} (a - 1) \pi = \operatorname{tg} a \pi) \end{aligned}$$

durch die Kugelfunktionen zweiter Art. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned} D &= \frac{\operatorname{tg} a \pi}{\pi} \begin{vmatrix} Q^a & \cdot - Q^{a-1} \\ (Q^a - Q^{-a-1}) \cdot & - (Q^{a-1} - Q^{-a}) \end{vmatrix} \\ &= \frac{\operatorname{tg} a \pi}{\pi} \begin{vmatrix} Q^a & \cdot Q^{a-1} \\ Q^{-a-1} \cdot & Q^{-a} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Die weitere Berechnung wird nun am einfachsten, wenn wir uns  $x$  positiv sehr gross denken, so dass man in der Entwicklungsreihe von  $Q^a$  nach fallenden Potenzen

von  $x$  nur den ersten Term zu berücksichtigen hat. Aus der Definitionsgleichung (1) der Funktion  $Q^a$  erhält man dann

$$Q^a(x) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \Gamma(\frac{a+1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{a}{2} + 1)}{\Gamma(a + \frac{3}{2})} \cdot x^{-a-1} + \dots;$$

und weil allgemein

$$\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(2x) = 2^{2x-1} \Gamma(x) \cdot \Gamma(x + \frac{1}{2}),$$

so ist auch

$$\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(a+1) = 2^a \cdot \Gamma(\frac{a+1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{a}{2} + 1),$$

und daher

$$Q^a(x) = \frac{1}{2^{a+1}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(a+1)}{\Gamma(a + \frac{3}{2})} \cdot x^{-a-1} + \dots,$$

folglich auch

$$Q^{-a}(x) = \frac{1}{2^{-a+1}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(-a+1)}{\Gamma(-a + \frac{3}{2})} \cdot x^{a-1} + \dots$$

Der Anfangsterm in der Entwicklung des Produktes  $Q^a \cdot Q^{-a}$  ist daher klein von der Ordnung  $\frac{1}{x^2}$  und verschwindet für einen sehr hohen Wert von  $x$ . Es ist daher

$$D = \underset{(x=\infty)}{\sin} \left( -\frac{\operatorname{tg} a \pi}{\pi} \cdot Q^{a-1} \cdot Q^{-a-1} \right).$$

Nun ist aber

$$Q^{a-1} = \frac{1}{2^a} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(a)}{\Gamma(a + \frac{1}{2})} \cdot x^{-a} + \dots,$$

und

$$Q^{-a-1} = \frac{1}{2^{-a}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(-a)}{\Gamma(-a + \frac{1}{2})} \cdot x^a + \dots,$$

und daher

$$Q^{a-1} \cdot Q^{-a-1} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(a) \Gamma(-a)}{\Gamma(a + \frac{1}{2}) \Gamma(-a + \frac{1}{2})} + \dots;$$

ersetzt man noch  $\Gamma(\frac{1}{2})$  durch  $\sqrt{\pi}$  und  $-a\Gamma(-a)$  durch  $\Gamma(1-a)$ , so erhält man

$$D = \frac{\operatorname{tg} a \pi}{\pi} \cdot \frac{\Gamma(a) \Gamma(1-a)}{\Gamma(a + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2}-a)}.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a) &= \frac{\pi}{\sin a \pi}, \quad \Gamma(a + \frac{1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2}-a) \\ &= \frac{\pi}{\sin(a + \frac{1}{2}\pi)} = \frac{\pi}{\cos a \pi}, \end{aligned}$$

folglich  $D = \frac{\operatorname{tg} a \pi}{a} \cdot \frac{\cos a \pi}{\sin a \pi} = \frac{1}{a}$ .

Für die Funktionen  $M_\lambda$  und  $N_\lambda$  erhalten wir daher die Ausdrücke

$$32. \quad M_\lambda = a(P^{a+\lambda} \cdot Q^a - P^a \cdot Q^{a+\lambda}),$$

$$33. \quad N_\lambda = a(P^{a+\lambda} \cdot Q^{a-1} - P^{a-1} \cdot Q^{a+\lambda})$$

und in Verbindung mit den Gleichungen (24) und (25) folgt hieraus

$$34. \quad P^{a+\lambda} \cdot Q^a - P^a \cdot Q^{a+\lambda} = \sum_{\mu=1}^{\mu=\lambda} \frac{1}{a+\mu} \cdot P^{\mu-1} P^{\lambda-\mu}$$

$$35. \quad P^{a+\lambda} \cdot Q^{a-1} - P^{a-1} Q^{a+\lambda} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda} \frac{1}{a+\mu} \cdot P^\mu \cdot P^{\lambda-\mu}.$$

Man könnte die Berechnung der Determinante auch an der Form

$$D = \frac{x^2 - 1}{a} \begin{vmatrix} Q^a \cdot \frac{\partial Q^a}{\partial x} \\ P^a \cdot \frac{\partial P^a}{\partial x} \end{vmatrix}$$

vornehmen. Zu diesem Zwecke eliminiere man  $P^a$  und  $\frac{\partial P^a}{\partial x}$  mittelst der Gleichungen

$$P^a = \frac{\operatorname{tg} a \pi}{\pi} \cdot (Q^a - Q^{-a-1}); \quad \frac{\partial P^a}{\partial x} = \frac{\operatorname{tg} a \pi}{\pi} \cdot \left( \frac{\partial Q^a}{\partial x} - \frac{\partial Q^{-a-1}}{\partial x} \right)$$

und erhält

$$D = -\frac{\operatorname{tg} a \pi}{\pi} \cdot \frac{x^2 - 1}{a} \begin{vmatrix} Q^a \cdot \frac{\partial Q^a}{\partial x} \\ Q^{-a-1} \cdot \frac{\partial Q^{-a-1}}{\partial x} \end{vmatrix}.$$

Die Kugelfunktionen sind spezielle Fälle der hypergeometrischen Reihe.

Man hat daher nach Gleichung (1)

$$Q^a = 2^{-a-1} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{3}{2})} x^{-a-1} F\left(\frac{a+1}{2}, \frac{a}{2} + 1, a + \frac{3}{2}, \frac{1}{x^2}\right);$$

für einen sehr grossen Wert von  $x$  ist daher in tiefster Annäherung

$$Q^a = A x^{-a-1} + A_1 x^{-a-3} + \dots; \quad Q^{-a-1} = B x^a + B_1 x^{a-2} + \dots;$$

$$\frac{\partial Q^a}{\partial x} = -(a+1) A_1 x^{-a-2} + \dots; \quad \frac{\partial Q^{-a-1}}{\partial x} = a B x^{a-1} + \dots;$$

folglich

$$\begin{aligned} Q^a \cdot \frac{\partial Q^{-a-1}}{\partial Q} &= a A B x^{-2} + \dots; \quad Q^{-a-1} \frac{\partial Q^a}{\partial x} \\ &= - (a+1) A B x^{-2} + \dots \end{aligned}$$

und daher ist auch

$$Q^a \cdot \frac{\partial Q^{-a-1}}{\partial x} - Q^{-a-1} \cdot \frac{\partial Q^a}{\partial x} = (2a+1) \cdot A B x^{-2} + \dots;$$

somit  $D = -\frac{2a+1}{a} \cdot \frac{\operatorname{tg} a \pi}{\pi} \cdot A B.$

Nun ist aber

$$A = 2^{-a-1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{3}{2})}, \quad B = 2^a \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(-a)}{\Gamma(\frac{1}{2}-a)},$$

folglich

$$D = -\frac{\operatorname{tg} a \pi}{a} \cdot \frac{(a+\frac{1}{2}) \Gamma(a+1) \Gamma(-a)}{\Gamma(\frac{1}{2}-a) \Gamma(a+\frac{3}{2})} = -\frac{\operatorname{tg} a \pi}{a} \times \frac{\Gamma(a+1) \Gamma(-a)}{\Gamma(a+\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2}-a)}$$

und daher

$$D = \frac{1}{a}.$$

Die Gauss'sche Gleichung

$$Q^m = \frac{1}{2} P^m \log \frac{x+1}{x-1} - Z$$

erhält man auf folgende Art: Ersetzt man in den Gleichungen (28) und (29) den Parameter  $a$  durch 1 und  $\lambda$  durch  $m$ , so erhält man die beiden Gleichungen

$$P^{m+1} = A_m^1 \cdot P^1 - A_{m-1}^2 \cdot P^0,$$

$$Q^{m+1} = A_m^1 \cdot Q^1 - A_{m-1}^2 \cdot Q^0$$

und die Elimination von  $A_{m-1}^2$  führt auf die Gleichung

$$Q^{m+1} = P^{m+1} \cdot \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} - A_m^1 \cdot (P^1 \cdot Q^0 - P^0 Q^1),$$

wobei schon die Formel  $Q^0 = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{x+1}{x-1}$  angewendet wurde. Berücksichtigt man noch, dass

$$Q^1(x) = x \left( \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{x} \right), \quad P^0(x) = 1, \quad P^1(x) = x$$

ist, also  $P^1 \cdot Q^0 - P^0 \cdot Q^1 = 1$ , so hat man

$$Q^m = P^m \cdot \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} - A_{m-1}^1.$$

Nun ist aber allgemein

$$A_m^n = P^{n+m} \cdot Q^{n-1} - Q^{n+m} \cdot P^{n-1} = \sum_{\mu=0}^{\mu=m} \frac{1}{n+\mu} \cdot P^\mu P^{m-\mu}$$

also für  $n = 1$  und  $m = (m-1)$

$$A_{m-1}^1 = P^m \cdot \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} - Q^m = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{1}{\mu} \cdot P^{\mu-1} P^{m-\mu}$$

und daher ist

$$36. \quad Q^m(x) = P^m \cdot \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} - \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{1}{\mu} \cdot P^{\mu-1} P^{m-\mu}.$$

Die Funktion  $Z$  der Gauss'schen Gleichung ist daher

$$37. \quad Z = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{1}{\mu} \cdot P^{\mu-1} P^{m-\mu}.$$

Die Gauss'sche Gleichung in der Form von (36) soll hier noch auf einem andern Wege abgeleitet werden.

Wir setzen

$$X = \alpha \cos \theta, \quad Y = \alpha \sin \theta \cdot \cos \varphi, \quad Z = \alpha \sin \theta \cdot \sin \varphi$$

und  $p = X + iY - 1 = \alpha \cdot (\cos \theta + i \sin \theta \cos \varphi) - 1$ ; dann genügt die Funktion  $\frac{1}{p}$  der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{p} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{p} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{p} \right) = 0.$$

Betrachtet man  $\alpha, \theta$  und  $\varphi$  als Polarcoordinaten des Punktes

$(x, y, z)$ , so muss  $\left(\frac{1}{p}\right)$  auch der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot \left( \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{p} \right) \right) + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{p} \right) \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{1}{p} \right) = 0$$

genügen.

Setzt man abkürzend  $x = \cos \theta$ ,  $y = i \sin \theta$ , also  $x^2 - y^2 = 1$ , und beachtet, dass

$$-\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial x}, \text{ und}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{p} \right) \right) &= -\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -\frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{p} \right) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( (1 - x^2) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{p} \right) \right) \end{aligned}$$

ist, so hat man für  $\frac{1}{p}$  die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot \left( \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{p} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( (1 - x^2) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{p} \right) \right) + \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{1}{p} \right) = 0.$$

Wird dieselbe mit  $d\varphi$  multipliziert und integriert, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot \left( \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \int \frac{d\varphi}{p} \right] \right) + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left( (1 - x^2) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int \frac{d\varphi}{p} \right] \right) + \\ \frac{1}{1 - x^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{p} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

und weil  $\frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot \left( \frac{1}{p} \right) = \frac{\alpha y \sin \varphi}{p^2}$  ist, so geht vorstehende Gleichung über in

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot \left( \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \int \frac{d\varphi}{p} \right] \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( (1 - x^2) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int \frac{d\varphi}{p} \right] \right) = \left[ \frac{\alpha}{y} \cdot \frac{\sin \varphi}{p^2} \right].$$

Die Grenzen des Integrals sollen so gewählt werden, dass der Unterschied auf der rechten Seite verschwindet. Man ersetze die Variable  $\varphi$  durch  $i\chi$ ; dann ist

$$\begin{aligned} d\varphi &= id\chi, \quad p = \alpha \cdot (\cos \theta + i \sin \theta \cdot \cos \chi) - 1 \\ &= \alpha (x + y \cos \chi) - 1, \end{aligned}$$

also  $\int \frac{d\varphi}{\alpha (x + y \cos \varphi) - 1} = i \int \frac{d\chi}{\alpha (x + y \cos \chi) - 1}.$

Ferner ist der Unterschied  $\left[ \frac{\alpha}{y} \cdot \frac{\sin \varphi}{p^2} \right] = i \left[ \frac{\alpha}{y} \cdot \frac{\sin \chi}{p^2} \right]$ ; weil nun für einen sehr hohen positiven Wert von  $\chi$  angenähert  $\cos \chi$  durch  $\frac{1}{2} e^{\chi}$  und  $\sin \chi$  durch  $\frac{1}{2} e^{\chi}$  dargestellt werden kann, so ist in tiefster Annäherung

$$\frac{i \alpha \sin \chi}{y \cdot (\alpha (x + y \cos \chi) - 1)^2} = \frac{2i e^{-\chi}}{\alpha \cdot y^3} + \dots,$$

verschwindet daher für  $\chi = \infty$ . Setzt man daher

$$38. \quad T = \int_0^\infty \frac{d\chi}{\alpha (x + y \cos \chi) - 1},$$

so muss die Funktion  $T$  folgender Differentialgleichung genügen:

$$39. \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot \left( \alpha^2 \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 - 1) \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0.$$

Setzt man abkürzend  $s = x + y \cos \chi$  und nimmt an, dass  $\alpha s > 1$ , so lässt sich  $T$  nach fallenden Potenzen von  $\alpha$  entwickeln. Denn man hat

$$\frac{1}{\alpha s - 1} = \frac{1}{\alpha s} \cdot \left( 1 - \frac{1}{\alpha s} \right)^{-1} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\alpha^{\lambda+1}} \cdot s^{-\lambda-1}$$

und daher

$$T = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \left[ \frac{1}{\alpha^{\lambda+1}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{d\chi}{s^{\lambda+1}} \right] = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{Q^{\lambda}(x)}{\alpha^{\lambda+1}}.$$

Die Funktion  $T$  lässt sich daher durch die Reihe

$$40. \quad T = \frac{Q^0}{\alpha} + \frac{Q^1}{\alpha^2} + \frac{Q^3}{\alpha^3} + \dots$$

darstellen. Aus Gleichung (39) in Verbindung mit (40) erhält man die Differentialgleichung für die Funktion  $Q^n$ . Man hat

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot (\alpha^{-n-1}) &= - (n+1) \alpha^{-n-2}; \quad \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha^{-n-1}) \\ &= - (n+1) \alpha^{-n} \end{aligned}$$

also auch

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha^{-n-1} Q^n) \right) = n(n+1) \alpha^{-n-1} Q^n;$$

ferner ist

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 - 1) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\alpha^{-n-1} Q^n) \right) = -\alpha^{-n-1} \frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 - 1) \frac{\partial Q^n}{\partial x} \right).$$

Setzt man daher in Gleichung (39) für  $T$  die Reihe in Gleichung (40) ein, so erhält man

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha^{-n-1} \left( n(n+1) Q^n - \frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 - 1) \frac{\partial Q^n}{\partial x} \right) \right) = 0$$

und daher

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 - 1) \frac{\partial Q^n}{\partial x} \right) - n(n+1) Q^n = 0.$$

Um für  $T$  eine Reihe zu erhalten, die nach steigenden Potenzen von  $\alpha$  fortschreitet, ersetze man in Gleichung (38)  $\alpha$  durch  $\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ ; dann ist

$$41. T = \int_0^{\infty} \frac{\alpha dx}{s-\alpha} = \alpha^1 Q^0 + \alpha^2 \cdot Q^1 + \alpha^3 Q^2 + \dots = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \alpha^{\lambda+1} Q^{\lambda}.$$

Nun ist aber

$$s - \alpha = x - \alpha + y \cdot \cos \chi = x - \alpha + y \cdot \frac{1}{2} (e^{\chi} + e^{-\chi}),$$

und daher

$$2(s - \alpha) e^{\chi} = 2(x - \alpha) e^{\chi} + y e^{2\chi} + y.$$

Wir setzen nun  $t = y e^{\chi} + x$ ; dann läuft die neue Variable von  $(x + y)$  bis ins positiv Unendliche, während  $\chi$  die positive Realitätslinie im positiven Sinne durchläuft. Weil

$$e^{\chi} = \frac{t - x}{y}, \quad \chi = \log \frac{t - x}{y}, \quad d\chi = \frac{dt}{t - x}$$

$$\text{und} \quad \frac{d\chi}{s - a} = \frac{2 dt}{t^2 - 1 - 2\alpha(t - x)},$$

so hat man auch

$$T = 2\alpha \int_z^{\infty} \frac{dt}{(t^2 - 1) - 2\alpha(t - x)}, \quad \text{wo } z = x + y \text{ ist.}$$

Nun soll der Integrand nach steigenden Potenzen von  $\alpha$  entwickelt werden. Man hat

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^2 - 1 - 2\alpha(t - x)} &= \frac{1}{(t^2 - 1)} \left(1 - \frac{2\alpha(t - x)}{t^2 - 1}\right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{t^2 - 1} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \alpha^{\lambda} \cdot \frac{2^{\lambda} (t - x)^{\lambda}}{(t^2 - 1)^{\lambda+1}} \end{aligned}$$

und daher geht die Gleichung (41) in die andere über

$$42. \quad T = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \alpha^{\lambda+1} \cdot \int_z^{\infty} \frac{2^{\lambda+1} (t - x)^{\lambda}}{(t^2 - 1)^{\lambda+1}} \cdot dt.$$

Die Vergleichung von (41) mit (42) gibt für  $Q^n$  folgendes bestimmte Integral

$$43. \quad Q^n = \int_z^{\infty} \frac{2^{n+1} (t-x)^n}{(t^2 - 1)^{n+1}} \cdot dt; \quad (z = x + y).$$

Nun soll das Integral  $T$  der Gleichung (41) ausgewertet werden. Weil auch

$$T = \alpha \cdot \int_{-\infty}^0 \frac{d\chi}{x + y \cos \chi - \alpha}$$

ist, so gibt die Gleichung (41) zunächst

$$T = \frac{\alpha}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\chi}{x + y \cos \chi - \alpha}$$

und wenn wieder abkürzend  $\rho^2 = 1 - 2\alpha x + \alpha^2$  gesetzt wird, so hat man

$$T = \alpha \cdot \int_x^{\infty} \frac{dt}{(t - \alpha)^2 - \rho^2}.$$

Wenn  $u = \frac{t - \alpha}{\rho}$ ,  $du = \frac{dt}{\rho}$ , so ist

$$T = \frac{\alpha}{\rho} \cdot \int_{\frac{x-\alpha}{\rho}}^{\infty} \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{\alpha}{2\rho} \cdot \left[ \int_{\frac{x-\alpha}{\rho}}^{\infty} \frac{du}{u+1} - \int_{\frac{x-\alpha}{\rho}}^{\infty} \frac{du}{u-1} \right]$$

und daher ist

$$\begin{aligned} T &= \frac{\alpha}{2\rho} \left[ \log \frac{u+1}{u-1} \right]_{\frac{x-\alpha}{\rho}}^{\infty} = \frac{\alpha}{2\rho} \log \frac{x-\alpha+\rho}{x-\alpha-\rho} = \frac{\alpha}{2\rho} \log \frac{(x-\alpha+\rho)}{(x-\alpha)^2 - \rho^2} \\ &= \frac{\alpha}{2\rho} \log \frac{(x-\alpha+\rho)^2}{y^2} = \frac{\alpha}{\rho} \log \frac{x-\alpha+\rho}{y}, \end{aligned}$$

also

$$44. \quad T = \frac{\alpha}{\rho} \log \frac{x-\alpha+\rho}{y}.$$

Nun soll auch diese Funktion nach steigenden Potenzen von  $\alpha$  entwickelt werden. Weil  $\rho^2 = 1 - 2\alpha x + \alpha^2$  ist, so hat man auch

$$\rho \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} = -(x - \alpha) \text{ und daher } \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} = -\frac{x - \alpha}{\rho},$$

$$\text{somit } \frac{\partial}{\partial \alpha} (x - \alpha + \rho) = -\left(1 + \frac{x - \alpha}{\rho}\right) = -\frac{x - \alpha + \rho}{\rho};$$

es ist also auch

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \log \frac{x - \alpha + \rho}{y} &= \frac{y}{x - \alpha + \rho} \cdot \frac{-1}{y} \cdot \frac{x - \alpha + \rho}{\rho} = -\frac{1}{\rho} \\ &= -(P^0 + \alpha P^1 + \alpha^2 P^2 + \dots) \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned} \left[ \log \frac{x - \alpha + \rho}{y} \right]_0^\alpha &= - \left( \alpha P^0 + \frac{\alpha^2}{2} \cdot P^1 + \frac{\alpha^3}{3} \cdot P^2 + \dots \right) \\ &= - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\alpha^{\lambda+1}}{\lambda+1} \cdot P^\lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \frac{x - \alpha + \rho}{y} &= \log \frac{x + 1}{y} - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\alpha^{\lambda+1}}{\lambda+1} \cdot P^\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{x + 1}{x - 1} - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\alpha^{\lambda+1}}{\lambda+1} \cdot P^\lambda. \end{aligned}$$

Wir erhalten daher für  $T$  folgende Entwicklung

$$T = \frac{1}{2} \log \frac{x + 1}{x - 1} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha^{n+1} P^n - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\alpha^{\lambda+1}}{\lambda+1} P^\lambda \times \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \alpha^{\mu+1} \cdot P^\mu.$$

In der zweiten Summe dieser Gleichung suchen wir den Koeffizienten von  $\alpha^{n+1}$  zu bestimmen. Wir setzen daher  $(\lambda + \mu + 2) = n + 1$ , also  $\mu = n - \lambda - 1$  und lassen  $\lambda$  von 0 bis  $(n - 1)$  laufen. Man erhält dadurch für die Funktion  $T$  folgende Entwicklungsreihe

$$45. \quad T = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[ \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} \cdot P^n - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{1}{\lambda+1} \cdot P^\lambda P^{n-1-\lambda} \right] \alpha^{n+1}.$$

Aus den Gleichungen (41) und (45) ergibt sich nun für die Funktion  $Q^n$  folgende Darstellung

$$46. \quad Q^n = P^n \cdot \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{1}{\lambda} \cdot P^{\lambda-1} \cdot P^{n-\lambda}$$

und daher ist die Funktion  $Z$

$$Z = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{1}{\lambda} \cdot P^{\lambda-1} \cdot P^{n-\lambda}.$$

Denkt man sich in dieser Reihe für  $P^{\lambda-1}$  und  $P^{n-\lambda}$  die bekannten Entwicklungen nach  $x$  substituiert, so ist das Resultat wieder eine Reihe, die nach fallenden Potenzen von  $x$  fortschreitet, deren Exponenten eine arithmetische Progression mit der Differenz 2 befolgen. Es ist daher gestattet, für  $Z$  auch folgende Form anzunehmen:

$$47. \quad Z = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{m}{2}} A_\lambda P^{m-2\lambda}.$$

Die Koëfficienten dieser Entwicklung sind bekannt und wurden nach Heine zuerst von Herrn Christoffel bestimmt. Ich will aber das angeführte Material benutzen und auf diese Koëfficientenbestimmung eintreten. Wir gehen von der Formel (46) aus und setzen daher

$$Z = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{m}{2}} \frac{1}{\lambda+1} \cdot P^\lambda \cdot P^{m-\lambda} = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} \cdot P^{m+1} - Q^{m+1}.$$

Die beiden Funktionen  $Q^{m+1}$  und  $P^{m+1}$  genügen der Differentialgleichung

$$\square y = \frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 - 1) \frac{\partial y}{\partial x} \right) - (m+1)(m+2) y = 0,$$

so dass also die Gleichungen

$$\square P^{m+1} = 0, \quad \square Q^{m+1} = 0$$

bestehen. Wenn  $p = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}$  und  $y = P^{m+1}$  gesetzt wird, so soll  $\square (py)$  berechnet werden. Man hat

$$\square (py) = \frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 - 1) \frac{\partial (py)}{\partial x} \right) - (m+1)(m+2) py;$$

nun ist aber

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) = -\frac{1}{x^2 - 1},$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 - 1) \frac{\partial (py)}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 - 1) \left( p \frac{\partial y}{\partial x} + y \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 - 1) \left( p \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{y}{x^2 - 1} \right) \right), \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 - 1) p \frac{\partial y}{\partial x} - y \right) = (x^2 - 1) p \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (x^2 - 1) \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \\ &\quad 2xp \cdot \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}, \\ &= (x^2 - 1) p \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial y}{\partial x} + 2xp \frac{\partial y}{\partial x} = p \left[ (x^2 - 1) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial y}{\partial x} \right] - 2 \frac{\partial y}{\partial x}. \end{aligned}$$

Aus der Differentialgleichung für die Kugelfunktionen folgt aber, dass

$$(x^2 - 1) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2x \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = (m+1)(m+2)y$$

ist. Es ist daher

$$\begin{aligned} \square (py) &= (m+1)(m+2)py - 2 \frac{\partial y}{\partial x} - (m+1)(m+2)py \\ &= -2 \frac{\partial y}{\partial x}, \end{aligned}$$

und weil  $\square Z = \square (p y) - \square Q^{m+1}$ ,

so erhält man die Gleichung

$$48. \quad \square Z = -2 \cdot \frac{\partial P^{m+1}}{\partial x}.$$

Es soll nun das Symbol  $\square$  auf die entwickelte Form der Gleichung (47) ausgeübt werden; man hat daher

$$\square Z = \square \left( \sum_{\lambda=0} (\Sigma A_{\lambda} \cdot P^{m-2\lambda}) \right)$$

zu berechnen. Die Funktion  $P^{m-2\lambda}$  genügt der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 - 1) \cdot \frac{\partial P^{m-2\lambda}}{\partial x} \right) - (m - 2\lambda) (m - 2\lambda + 1) \cdot P^{m-2\lambda} = 0.$$

Nun ist

$$\square P^{m-2\lambda} = \frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 - 1) \frac{\partial P^{m-2\lambda}}{\partial x} \right) - (m + 1) (m + 2) P^{m-2\lambda},$$

und mit Benutzung der Differentialgleichung erhält man hieraus

$$\begin{aligned} \square P^{m-2\lambda} &= (m - 2\lambda) (m - 2\lambda + 1) P^{m-2\lambda} - (m + 1) (m + 2) P^{m-2\lambda} \\ &= -2 (2\lambda + 1) (m - 2\lambda + 1) \cdot P^{m-2\lambda}, \end{aligned}$$

folglich ist auch

$$49. \quad \square Z = \sum_{\lambda=0}^{\lambda \leq \frac{m}{2}} A_{\lambda} \cdot \square P^{m-2\lambda} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda \leq \frac{m}{2}} -2 (2\lambda + 1) (m - 2\lambda + 1) A_{\lambda} \cdot P^{m-2\lambda}$$

und daher nach Gleichung (48)

$$50. \quad \frac{\partial P^{m+1}}{\partial x} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda \leq \frac{m}{2}} (2\lambda + 1) (m - 2\lambda + 1) A_{\lambda} \cdot P^{m-2\lambda}.$$

Um einen Einblick in die Beschaffenheit und den Aufbau des Koeffizienten  $A_{\lambda}$  zu erhalten, sind wir genötigt,

noch eine andere Formel für  $\frac{\partial P^{m+1}}{\partial x}$  abzuleiten. Wir benutzen dazu die Formeln (a) und (b), Seite 277, und ersetzen noch  $a$  durch  $(a + 1)$ ; dann hat man

$$a) \quad (x \frac{\partial}{\partial x} + a + 1) \cdot Q^a = \frac{\partial Q^{a+1}}{\partial x},$$

$$b) \quad (x \frac{\partial}{\partial x} - a) \cdot Q^a = \frac{\partial Q^{a-1}}{\partial x},$$

und die Subtraktion ergibt die andere

$$c) (2a + 1) \cdot Q^a = \frac{\partial Q^{a+1}}{\partial x} - \frac{\partial Q^{a-1}}{\partial x}.$$

Ersetzt man in der Gleichung (c) der Reihe nach  $a$  durch  $(a + 1), (a + 3), (a + 5) \dots, (a + 2\lambda - 1)$ , so erhält man folgendes System von Gleichungen

$$(2a + 3) \cdot Q^{a+1} = \frac{\partial Q^{a+2}}{\partial x} - \frac{\partial Q^a}{\partial x},$$

$$(2a + 7) \cdot Q^{a+3} = \frac{\partial Q^{a+4}}{\partial x} - \frac{\partial Q^{a+2}}{\partial x},$$

$$(2a + 11) \cdot Q^{a+5} = \frac{\partial Q^{a+6}}{\partial x} - \frac{\partial Q^{a+4}}{\partial x},$$

— — — — — — — — — —

$$(2a + 4r - 1) \cdot Q^{a+2r-1} = \frac{\partial Q^{a+2r}}{\partial x} - \frac{\partial Q^{a+2r-2}}{\partial x}$$

Die Summation derselben ergibt nun

$$51. \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} (2a + 4\lambda - 1) Q^{a+2\lambda-1} = \frac{\partial Q^{a+2r}}{\partial x} - \frac{\partial Q^a}{\partial x}.$$

Auf demselben Wege erhält man die andere Gleichung

$$52. \quad \frac{\partial P^{a+2r}}{\partial x} - \frac{\partial P^a}{\partial x} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} (2a + 4\lambda - 1) \cdot P^{a+2\lambda-1}.$$

Ersetzt man in den Formeln (51) und (52) das eine Mal  $a$  durch 0 und das andere Mal durch 1 und beachtet, dass

$$P^0 = 1, \quad P^1 = x, \quad Q^0 = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}, \quad Q^1 = \frac{x}{2} \log \frac{x+1}{x-1} - 1,$$

also

$$\frac{\partial P^0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P^1}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial Q^0}{\partial x} = -\frac{1}{x^2-1}, \quad \frac{\partial Q^1}{\partial x} = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} - \frac{x}{x^2-1}.$$

so erhält man die Gleichungen

$$53. \quad \frac{\partial Q^{2n}}{\partial x} = (4n-1) Q^{2n-1} + (4n-5) Q^{2n-3} + (4n-9) Q^{2n-5} + \dots + 3 Q^1 - \frac{1}{x^2-1},$$

$$54. \quad \frac{\partial Q^{2n+1}}{\partial x} = (4n+1) Q^{2n} + (4n-3) Q^{2n-2} + (4n-7) Q^{2n-4} + \dots + 5 Q^2 + Q^0 - \frac{x}{x^2-1},$$

$$55. \quad \frac{\partial P^{2n}}{\partial x} = (4n-1) P^{2n-1} + (4n-5) P^{2n-3} + (4n-9) P^{2n-5} + \dots + 3 P^1,$$

$$56. \quad \frac{\partial P^{2n+1}}{\partial x} = (4n+1) P^{2n} + (4n-3) P^{2n-2} + (4n-7) P^{2n-4} + \dots + 5 P^2 + P^0.$$

Denkt man sich ferner in der Gleichung (51) den Parameter  $r$  sehr gross und beachtet, dass  $\lim_{(r \rightarrow \infty)} Q^{a+2r} = 0$  ist; dann geht diese Gleichung über in

$$57. \quad -\frac{\partial Q^a}{\partial x} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (2a+4\lambda-1) Q^{a+2\lambda-1} = (2a+3) Q^{a+1} + (2a+7) Q^{a+3} + \dots$$

Die beiden Gleichungen (55) und (56) sollen auf einen beliebigen Parameter  $m$  übergetragen werden. Man schreibe

$$\frac{\partial P^{2r+1}}{\partial x} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r} (4\lambda + 1) P^{2\lambda}; \quad \frac{\partial P^{2r}}{\partial x} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} (4\lambda - 1) P^{2\lambda-1}$$

und ersetze  $(r - \lambda)$  durch  $\lambda$ , dann gehen dieselben über in

$$\frac{\partial P^{2r+1}}{\partial x} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r} (4r - 4\lambda + 1) P^{2r-2\lambda}, \quad \frac{\partial P^{2r}}{\partial x} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r-1} (4r - 4\lambda - 1) P^{2r-2\lambda-1}$$

In der ersten Gleichung ersetze man ferner  $2r$  durch  $m$  und in der zweiten  $(2r - 1)$  durch  $m$ . Dadurch erhält man schliesslich die Gleichungen

$$58. \quad \frac{\partial P^m+1}{\partial x} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{m}{2}} (2m - 4\lambda + 1) P^{m-2\lambda},$$

$$58_1. \quad \frac{\partial P^m+1}{\partial x} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{m-1}{2}} (2m - 4\lambda + 1) P^{m-2\lambda}.$$

Aus den Gleichungen (50) und (58) erhalten wir nun zur Bestimmung des Koëfficienten  $A_\lambda$  die Gleichung

$$(2\lambda + 1) (m - 2\lambda + 1) \cdot A_\lambda = (2m - 4\lambda + 1),$$

und daher ist

$$A_\lambda = \frac{2m - 4\lambda + 1}{(2\lambda + 1) (m - 2\lambda + 1)} = \frac{2}{2\lambda + 1} - \frac{1}{m - 2\lambda + 1}.$$

Für die Funktion  $Z$  erhalten wir daher nach (47) die Entwicklung

$$59. \quad Z = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{m}{2}} \frac{2m - 4\lambda + 1}{(2\lambda + 1) (m - 2\lambda + 1)} \cdot P^{m-2\lambda}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{m}{2}} \left( \frac{2}{2\lambda + 1} - \frac{1}{m - 2\lambda + 1} \right) \cdot P^{m-2\lambda}.$$

Die oben angegebenen Werte von  $Q^0$  und  $Q^1$  erhält man am einfachsten aus einem Integralausdrucke für  $Q^n$ , den Prof. Schläfli auf Seite 59 seiner Programmarbeit über Kugelfunktionen angiebt. Dort steht

$$Q^n(x) = \frac{1}{2i\pi} \cdot \int \left( \log \frac{t+1}{t-1} - \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} \right) \frac{(t^2-1)^n}{2^n (t-x)^n} dt.$$

(Der Weg dieses Integrales ist ein kleiner, rechtsläufiger Kreis um  $x$ ). Setzt man hier  $n = 0$  und wendet den Satz von Cauchy an, so erhält man sofort

$$Q^0 = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}.$$

Für  $n = 1$  folgt zuerst

$$Q^1(x) = \frac{1}{4i\pi} \cdot \int \left( \log \frac{t+1}{t-1} - \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} \right) (t^2-1) \frac{dt}{(t-x)^2}.$$

Der Wert dieses Integrales ist gleich dem Koëffienten von  $h$  in der Entwicklung der Funktion

$$\frac{1}{2} \left( \log \frac{x+1+h}{x-1+h} - \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} \right) ((x+h)^2 - 1)$$

nach steigenden Potenzen von  $h$ ; also ist

$$Q^1(x) = \frac{x}{2} \cdot \log \frac{x+1}{x-1} - 1.$$

Man kann diese Werte auch aus der Definitionsgleichung (1) ableiten. Nach derselben ist

$$Q^n(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(n+1)}{2^{n+1} \Gamma(n+\frac{3}{2})} \cdot x^{-n-1} F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n}{2}+1, n+\frac{3}{2}, \frac{1}{x^2}\right),$$

also für  $n = 0$

$$Q^0(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2 \Gamma(\frac{3}{2})} \cdot \frac{1}{x} \cdot F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x} \cdot F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{x^2}\right),$$

oder in der entwickelten Form

$$Q^0(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\dots\left(\frac{1}{2}+\lambda-1\right)}{1 \ 2 \ 3 \dots \ \lambda} \times \frac{1 \ 2 \ 3 \dots (1+\lambda-1)}{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right)\dots\left(\frac{3}{2}+\lambda-1\right)} \frac{1}{x^{2\lambda+1}},$$

oder

$$Q^0(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{2\lambda+1} \cdot \frac{1}{x^{2\lambda+1}} = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}.$$

Für  $n = 1$  erhält man

$$\begin{aligned} Q^1(x) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot F\left(1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{x^2}\right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \lambda \times \frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{7}{2} \dots \left(\frac{3}{2}+\lambda-1\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \lambda \times \frac{5}{2} \frac{7}{2} \frac{9}{2} \dots \left(\frac{5}{2}+\lambda-1\right)} \cdot \frac{1}{x^{2\lambda+2}} \\ &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{2\lambda+3} \cdot \frac{1}{x^{2\lambda+2}} = x \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda+1} \cdot \frac{1}{x^{2\lambda+1}} \end{aligned}$$

und daher ist

$$Q^1(x) = x \left( \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{x} \right).$$

Die Werte von  $P^0$  und  $P^1(x)$  erhält man sehr einfach aus dem Integral

$$P^a(x) = \frac{1}{2i\pi} \cdot \int \frac{1}{2^a} \frac{(t^2-1)^a dt}{(t-x)^{a+1}}.$$

(Weg eine geschlossene, rechtläufige Kurve um die Pole 1 und  $x$ ). Dieses Integral findet sich in der Programmarbeit von Herrn Prof. Schläfli, Seite 5. Setzt man in demselben  $a = 0$ , so folgt

$$P^0(x) = \frac{1}{2i\pi} \cdot \int \frac{dt}{(t-x)}.$$

(Weg eine rechtläufig geschlossene Kurve um den Pol  $x$ ), also nach Cauchy  $P^0(x) = 1$ .

Für  $n = 1$  folgt

$$P^1(x) = \frac{1}{2i\pi} \cdot \int \frac{1}{2} \cdot \frac{(t^2 - 1) dt}{(t - x)^2}.$$

Weil 1 kein Mehr-Pol ist, so umgibt der Weg nur noch den Pol  $x$  und der Wert des Integrales ist daher gleich dem Koëfficienten von  $h$  in der Entwicklung von  $\frac{1}{2}((x+h)^2 - 1)$  nach steigenden Potenzen von  $h$ , also gleich  $x$ ; folglich  $P^1(x) = x$ . Prof. Schläfli gibt folgende Formel an als erster Näherungswert für eine  $Q$ -Funktion mit positivem, sehr grossem Parameter:

$$\lim_{(a \rightarrow \infty)} Q^a(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2a y}} \cdot z^{-a-1/2}; (y^2 = x^2 - 1, z = x + y).$$

Zur Ableitung dieser Formel benutzt Schläfli auf eine sehr geschickte Art das bekannte Integral

$$Q^a(x) = \int_z^{\infty} s^{-a-1} \frac{ds}{w}; w^2 = s^2 - 2xs + 1.$$

Zu demselben Resultate gelangt man auch ausgehend von der hypergeometrischen Reihe

$$Q^a(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{3}{2})} \cdot z^{-a-1} F\left(\frac{1}{2}, a+1, a+\frac{3}{2}, \frac{1}{z^2}\right),$$

wo  $z = x + y$ ,  $y = \sqrt{x^2 - 1}$  ist. (Eine Ableitung dieser Formel findet sich in der schon oft erwähnten Programmarbeit des Herrn Prof. Schläfli, Seite 36). Weil

$$F\left(\frac{1}{2}, a+1, a+\frac{3}{2}, \frac{1}{z^2}\right) =$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \dots (\frac{1}{2} + \lambda - 1) \times (a+1) (a+2) \dots (a+\lambda)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \lambda \times (a+\frac{3}{2}) (a+\frac{5}{2}) \dots (a+\lambda+\frac{1}{2})} \frac{1}{z^{2\lambda}}$$

und

$$\lim_{(a=\infty)} \frac{(a+1)(a+2)(a+3)\dots(a+\lambda)}{(a+\frac{3}{2})(a+\frac{5}{2})(a+\frac{7}{2})\dots(a+\lambda+\frac{1}{2})} = \lim_{a=\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{2a} + \dots\right) = 1.$$

Man nimmt also an, dass die hypergeometrische Reihe nach Art einer geometrischen Reihe convergiere, damit man dieselbe bei einem hohen endlichen Werte von  $\lambda$ , der noch lange nicht mit  $a$  zu vergleichen ist, abbrechen dürfe. In diesem Falle hat man

$$\lim_{(a=\infty)} Q^a(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{3}{2})} \cdot z^{-a-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \dots (\frac{1}{2} + \lambda - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \lambda} \cdot \frac{1}{z^{2\lambda}}$$

also

$$\begin{aligned} \lim_{(a=\infty)} Q^a(x) &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{3}{2})} \cdot z^{-a-1} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{z^2}}} = \\ &\quad \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{3}{2})} \cdot \frac{z^{-a-1}}{\sqrt{2y}}. \end{aligned}$$

Um  $\lim_{(a=\infty)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{3}{2})}$  zu bestimmen, benutzen wir das

Euler'sche Integral. Nach demselben ist

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{3}{2})} = \int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^a dt$$

und es handelt sich nun darum, dieses Integral nach fallenden Potenzen von  $a$  zu entwickeln. Der grösste Wert von  $(1-t)^a$  liegt in  $t=0$ ; man setze daher  $t=1-e^{-u}$ ; dann läuft  $u$  von null durch alle positiven Werte hindurch ins Unendliche. Weil  $du = \frac{dt}{1-t}$  ist, so hat man

$$\int_0^1 t^{-1/2} \cdot (1-t)^a dt = \int_0^\infty (1-e^{-u})^{-1/2} \cdot e^{-(a+1)u} du;$$

wenn wir nun  $(1-e^{-u})^{-1/2}$  nach steigenden Potenzen von  $u$  entwickeln, also

$$(1-e^{-u})^{-1/2} = u^{-1/2} (1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 + \dots)^{-1/2} = u^{-1/2} + \frac{1}{4}u^{1/2} + \frac{1}{96}u^{3/2} + \dots$$

setzen, so verwandelt sich obiges Integral in die Summe

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^a dt &= \int_0^\infty u^{-1/2} e^{-(a+1)u} du + \frac{1}{4} \cdot \int_0^\infty u^{1/2} e^{-(a+1)u} du \\ &\quad + \frac{1}{96} \cdot \int_0^\infty u^{3/2} e^{-(a+1)u} du + \dots \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \left( 1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{128} \cdot \frac{1}{a^2} + \dots \right), \end{aligned}$$

und daher ist

$$\lim_{(a \rightarrow \infty)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(a+1)}{\Gamma(a + \frac{3}{2})} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Einfacher gestaltet sich die Berechnung mit Hilfe der bekannten Formel

$$\Gamma(a) = \lim_{(N \rightarrow \infty)} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (N-1) \cdot N}{a(a+1)(a+2)\dots(a+N-1)};$$

aus dieser Formel folgt für ein grosses  $N$

$$\Gamma(a+N) = \Gamma(N) \cdot N^a.$$

Daher ist

$$\lim_{(a \rightarrow \infty)} \Gamma(a+1) = \Gamma(a) \cdot a; \quad \lim_{(a \rightarrow \infty)} \Gamma(a + \frac{3}{2}) = \Gamma(a) \cdot a^{\frac{3}{2}},$$

also auch

$$\lim_{(a \rightarrow \infty)} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a + \frac{3}{2})} = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ und weil } \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi},$$

so folgt  $\lim_{(a \rightarrow \infty)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(a+1)}{\Gamma(a + \frac{3}{2})} = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$

somit

$$\lim_{(a \rightarrow \infty)} Q^a(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2a y}} \times z^{-a-1}; \quad (y^2 = x^2 - 1; \quad z = x + y).$$

Herr Heine definiert seine zugeordneten Funktionen  $P_m^n(x)$  und  $Q_m^n(x)$  durch die Gleichungen

$$P_m^n(x) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) (n-m)!}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \cdot y^m D^m P^n(x),$$

$$Q_m^n(x) = (-1)^m 2^{n+1} \cdot \frac{\Gamma(n + \frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(n+m+1)} \cdot y^m D^m Q^n(x).$$

Für diese Funktionen sollen nun die wichtigsten Rekursions-Formeln abgeleitet werden. Für die Funktionen  $P^n(x)$  und  $Q^n(x)$  bestehen die beiden Gleichungen

$$a) \quad \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial P^n}{\partial x} = (n+1) P^n;$$

$$b) \quad x \cdot \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial P^n}{\partial x} = (n+1) P^n;$$

(und ebenso, wenn  $P$  durch  $Q$  ersetzt wird).

Wenn nun fortan  $\frac{\partial}{\partial x} = D$  gesetzt wird, also  $\frac{\partial^m}{\partial x^m} = D^m$ , und das Symbol  $D^m$  auf die Gleichungen (a) und (b) einwirken lässt, so erhält man mit Hilfe der Formel

$$D^m (p q) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} \binom{m}{\lambda} D^\lambda p \cdot D^{m-\lambda} q,$$

die beiden Gleichungen

- c)  $x D^{m+1} P^n + (m+n+1) D^m P^n - D^{m+1} P^{n+1} = 0,$
- d)  $x D^{m+1} P^n - (n-m) D^m P^n - D^{m+1} P^{n-1} = 0.$

Um aus diesen zwei Gleichungen eine Relation für die zugeordnete Kugelfunktion erster Art mit gleichem unterem Parameter zu erhalten, ist die Funktion  $D^m P^n$  zu eliminieren. Das Resultat dieser Elimination ist die Gleichung

$$e) \quad (2n+1)x D^{m+1} P^n - (n-m) D^{m+1} P^{n+1} - (m+n+1) D^{m+1} P^{n-1} = 0.$$

Wird diese Gleichung mit  $y^{m+1}$  multipliziert und allgemein

$$y^m D^m P^n = \frac{2^n \Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})(n-m)!} \cdot P_m^n$$

gesetzt, so erhält man die Formel

$$1. \quad (4n^2 - 1) P_m^{n-1} - (4n^2 - 1) x P_m^n + (n^2 - m^2) P_m^{n-1}.$$

Die Gleichung (e) gilt auch für die Q-Funktion. Ersetzt man daher P durch Q, multipliziert wieder mit  $y^{m+1}$  und setzt

$$y^m D^m Q^n = \frac{(-1)^m \Gamma(\frac{1}{2}) \cdot (n+m)!}{2^{n+1} \cdot \Gamma(n + \frac{3}{2})} \cdot Q_m^n,$$

so erhält man

$$2. \quad (n-m+1)(n+m+1) Q_m^{n+1} - (2n+1)(2n+3) \times (x \cdot Q_m^n - Q_m^{n-1}) = 0.$$

Diese beiden Formeln (1) und (2) kann man auch aus den bekannten Relationen (10) und (7)

$$(n+1) P^{n+1} - (2n+1) \cdot x P^n + n P^{n-1} = 0;$$

$$(n+1) Q^{n+1} - (2n+1) x \cdot Q^n + n \cdot Q^{n-1} = 0$$

auf folgende Art ableiten: Lässt man auf die erste dieser Gleichungen das Symbol  $D^m$  einwirken und multipliziert mit  $y^m$ , so erhält man

$$f) (n+1) y^m D^m P^{n+1} - (2n+1) x y^m D^m P^n - m (2n+1) y^m D^{m-1} P^n + n y^m D^m P^{n-1} = 0.$$

Aus dieser Gleichung ist die Funktion  $D^{m-1} P^n$  zu eliminieren. Zu diesem Zwecke ersetze man in Gleichung (b) den Parameter  $n$  durch  $(n-1)$  und addiere sie zu Gleichung (a); man erhält

$$g) D P^{n+1} - D P^{n-1} = (2n+1) P^n.$$

Auf diese Gleichung werde das Symbol  $D^{m-1}$  ausgeübt und findet

$$(2n+1) D^{m-1} P^n = D^m P^{n+1} - D^m P^{n-1};$$

wird dieser Wert in die Gleichung (f) eingeführt, so geht diese über in

$$\begin{aligned} & (n-m+1) y^m D^m P^{n+1} - (2n+1) x y^m D^m P^n + \\ & \quad (m+n) y^m D^m P^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

und verwandelt sich durch Einführung der Funktion  $P_m^n$  in die Gleichung (1). Auf demselben Wege gelangt man auch zu der Gleichung 2.

Andere Rekursionsformeln für die Funktionen  $P_m^n$  und  $Q_m^n$  erhält man aus der Differentialgleichung für  $D^m P^n$  und  $D^m Q^n$ . Um diese Differentialgleichung zu erhalten, lässt man das Symbol  $D^m$  auf die bekannte Gleichung

$$(x^2 - 1) \frac{\partial^2 P^n}{\partial x^2} + 2x \cdot \frac{\partial P^n}{\partial x} - n(n+1)P^n = 0$$

einwirken; man findet

$$\begin{aligned} h) & (x^2 - 1) D^2 (D^m P^n) + 2(m+1)x D (D^m P^n) + \\ & (m(m+1) - n(n+1)) D^m P^n = 0 \end{aligned}$$

und ebenso für die  $Q$ -Funktion. Wird diese Gleichung mit  $y^{m+1}$  multipliziert und die Funktion  $P_m^n(x)$  eingeführt, so erhält man

$$3. (n - m) P_{m+1}^n + 2mxP_m^n - (m + n) y P_{m-1}^n = 0$$

und ebenso .

$$4. (n + m + 1) y Q_{m+1}^n - 2mxQ_m^n - (n - m + 1) y Q_{m-1}^n = 0.$$

Eliminiert man ferner aus dem Systeme der zwei Gleichungen

$$x D^{m+1} P^n + (m + n + 1) D^m P^n - D^{m+1} P^{n+1} = 0,$$

$$x D^{m+1} P^{n+1} - (n - m + 1) D^m P^{n+1} - D^{m+1} P^n = 0,$$

die Funktion  $D^{m+1}$ , so erhält man die Relation

$$i) (x^2 - 1) D^{m+1} P^{n+1} - (n - m + 1) x \cdot D^m P^{n+1} + (m + n + 1) D^m P^n = 0;$$

dieselbe gilt auch für die  $Q$ -Funktion. Multipliziert man dieselbe mit  $y^m$  und führt das eine Mal  $P_m^n$  und das andere Mal  $Q_m^n$  ein, so erhält man die beiden Gleichungen

$$5. (2n + 1) (y P_{m+1}^{n+1} - x P_m^{n+1}) + (n + m + 1) P_m^n = 0,$$

$$6. (n + m + 2) y Q_{m+1}^{n+1} + (n - m + 1) x Q_m^{n+1} - (2n + 3) Q_m^n = 0.$$

Eliminiert man ferner aus demselben Systeme der zwei Gleichungen die Funktion  $D^{m+1} P^{n+1}$ , so folgt

$$k) (x^2 - 1) D^{m+1} P^n + (n + m + 1) x D^m P^n - (n - m + 1) D^m P^{n+1} = 0;$$

wird dieselbe mit  $y^m$  multipliziert und die Funktionen  $P_m^n$  und  $Q_m^n$  eingeführt, so findet man

$$7. (n - m) y P_{m+1}^n + (n + m + 1) x P_m^n - (2n + 1) P_m^{n+1} = 0,$$

$$8. (2n + 3) y Q_{m+1}^n - (2n + 3) x Q_m^n + (n - m + 1) Q_m^{n+1} = 0.$$

Subtrahiert man ferner die Gleichung (d) von der Gleichung (c), so folgt

$$l) \quad D^{m+1}P^{n+1} - D^{m+1}P^{n-1} - (2n+1)D^mP^n = 0.$$

Wird diese Gleichung mit  $y^{m+1}$  multipliziert und in  $P_m^n$  und  $Q_m^n$  ausgedrückt, so findet man

$$9. \quad (4n^2 - 1)(P_{m+1}^{n+1} - yP_m^n) - (n-m)(n-m+1)P_{m+1}^{n-1} = 0.$$

$$10. \quad (n+m+1)(n+m+2)Q_{m+1}^{n+1} - (2n+3)(2n+1) \times \\ (Q_{m+1}^{n-1} - yQ_m^n) = 0.$$

