Zeitschrift: Bericht über die Thätigkeit der St. Gallischen Naturwissenschaftlichen Gesellschaft

Herausgeber: St. Gallische Naturwissenschaftliche Gesellschaft

Band: 27 (1885-1886)

Artikel: Mathematik und Naturwissenschaft in einigen Wechselbeziehungen

Autor: Wild, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-834583

IV.

Mathematik und Naturwissenschaft

in einigen Wechselbeziehungen.

Vortrag, gehalten am 30. November 1886

von

J. Wild, Prof.

Meine Herren!

Wenn im Folgenden der Versuch gemacht wird, einige Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und Naturwissenschaft für kurze Zeit Ihre Aufmerksamkeit beanspruchen zu lassen, so hoffe ich auf Ihr nachsichtiges Urtheil rechnen zu dürfen, da ich das gewählte Thema, in Anbetracht der mir heute Abend nur karg zugemessenen Zeit, bei seinem weiten Umfange nicht in dem Masse erschöpfend behandeln kann, als es vom wissenschaftlichen Standpunkt aus wünschbar wäre. Ich werde und muss mich darauf beschränken, nachdem ich Ihnen den Weg angegeben habe, den sich der Mathematiker zu bahnen hat, um von seinem Wissenszweig aus zu den exacten Naturwissenschaften zu gelangen, die gegenseitigen Einflüsse und Abhängigkeitsverhältnisse genannter Disciplinen in allgemeinen Zügen zu schildern und hie und da an einem speciellen Beispiele das Gesagte zu verdeutlichen.

Der Trieb zu vergleichen und zu messen ist uns Allen eigen. Wie oft hört man die heranwachsende reifere Jugend die Frage aufwerfen: „Wer ist der grösste Dichter, Maler, Componist?“ Schon die Jünger Christi fragten: „Wer ist der Grösste im Himmelreich?" So vergleichen wir Concretes mit Concretem, Abstractes mit Abstractem, ja sogar Concretes mit Abstractem. Nennen wir nicht den Ton süss, schmelzend, herb, rauh? Geben wir nicht der Farbe Ton und Temperatur? „Welch' himmlischer Anblick!" rufen wir aus, sobald sich uns beim Erreichen eines mühsam erklommenen Berggipfels eine ungeahnte Fernsicht plötzlich eröffnet! Diese Thätigkeit des Messens und Vergleichens, die sich selbst da noch regt, wo jeder Masstab fehlt, ist eine der süssesten Thätigkeiten des Jünglings, eine Thätigkeit, die seiner Phantasie am meisten entspricht. Erst der gereiftere Forscher setzt dieser poetischen Thätigkeit Schranken; er bestimmt vor Allem das Mass, mit dem er messen soll; denn bei ihm lässt sich ein Ding nur wieder durch ein dem ersten gleichartiges messen.

So haben sich denn schon im Alterthume die Anfänge einer eigenen Wissenschaft des Messens gebildet, deren Studium seither von den grössten Menschen aller Zeiten gepflegt und auch gefördert wurde. Diese heute stolz dastehende, wohl ausgebildete Wissenschaft hat zum Ausgangspunkte das *Zählen.* Der elementare Theil der Mathematik, der auch in den Kreis unserer allgemeinen Bildung mit hineingezogen worden ist, beschäftigt sich mit dem Messen der Dinge durch ein unmittelbar gegebenes Mass und erscheint daher als eine ganz äusserliche Thätigkeit, die am wenigsten geeignet zu sein scheint, die Natur der Dinge ergründen zu helfen. Die einfachsten Sätze über Congruenz, Gleichheit und Aehnlichkeit der Flächen- und Körperräume und einige Rechnungsoperationen, die sich nicht sehr weit von den 4 Species des bürgerlichen Rechnens entfernen, bilden die sogenannte Elementarmathematik oder also, wenn Sie wollen, die mathematische Wissenssphäre unserer abgehenden Mittelschüler.

Es erweist sich aber im weitern die Mathematik auch fähig, an der Ergründung der Natur und der Dinge Theil zu nehmen. Nicht, wie einzelne Philologen und Philosophen geglaubt haben und zum Theil jetzt noch glauben, an der äusserlichen und inhaltslosen Quantität müht sie sich ab, sondern auch die Qualität macht sie sich zum Gegenstande ihrer Forschung; gar Vieles, was uns als Qualität erscheint, hat sich durch verbesserte Methoden in eine Reihe quantitativer Bestimmungen auflösen, also durch Zahlen sich mehr oder weniger vollständig bestimmen lassen. — Das Geschäft des Messens erscheint, wie schon bemerkt, als etwas Mechanisches und Aeusserliches, sobald der Masstab, mit dem

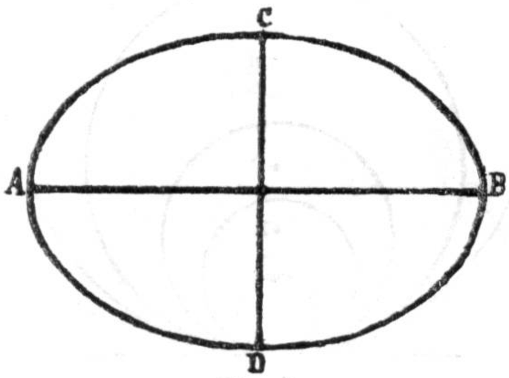


Fig. 1

gemessen werden soll, bekannt ist, selbst wenn es mitunter viel Scharfsinn erfordert, sehr grosse und sehr kleine Dimensionen mit grosser Genauigkeit zu messen oder zu berechnen. Erheben wir uns indessen mit der Mathematik eine Stufe höher, so finden wir sie beschäftigt, den Masstab erst zu *schaffen,* nach welchem die Grösse gemessen werden kann. Denken wir uns z. B. irgend eine gesetzmässig gebildete krumme Linie, etwa eine Ellipse (Fig. 1), so finden wir sie an verschiedenen Stellen verschieden stark gekrümmt; offenbar ist die Krümmung am grössten an den Punkten A und B, an den Punkten C und D aber, die sich am nächsten gegenüber stehen, am kleinsten. Alle von Ihnen werden nun die Frage verständlich finden: wie gross ist die Entfernung der am weitesten von einander entfernten Punkte? oder: welchen Umfang hat die Ellipse? Die wenigsten aber wagen die Frage zu thun, wie krumm ist die Linie in irgend einem Punkte? denn die meisten werden glauben, die Krümmung sei eine Qualität der Curve, lasse sich also nicht durch Zahlen ausdrücken. — Der Kreis, der bekanntlich in allen seinen Punkten gleiche Krümmung hat, bildet hier den Masstab. Sie wissen es und können es auch aus Fig. 2 ersehen, dass die Krümmung eines Kreises von seinem Radius abhängt; diese Krümmung nimmt um so mehr ab,

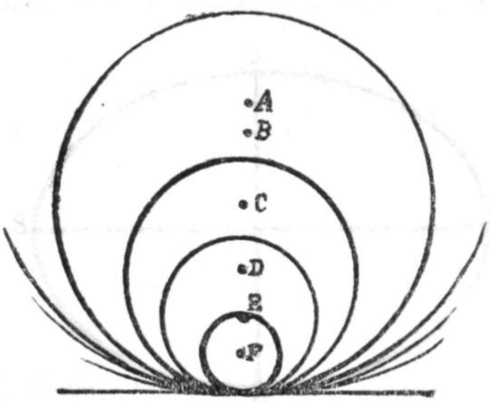


Fig. 2

je grösser der Radius oder Halbmesser wird, und wenn derselbe über alle Grenzen, d. h. unendlich gross geworden ist, hat der Kreis gar keine Krümmung mehr, er ist in eine Gerade übergegangen. Es lässt sich nun auf sehr mannigfache Art * mit grosser Schärfe für jeden Punkt einer solchen Curve ein Kreis berechnen und zeichnen, der sich an dieser Stelle inniger an sie anschmiegt als jeder andere denkbare Kreis. Wir nennen diesen Kreis *Krümmungskreis.* So ist in Fig. 3 für den Punkt B der Ellipse

* Vergl. C. Cranz, Dr., Synthetisch-geometrische Theorie der Krümmung; Stuttgart 1886.

der Krümmungskreis durch den stärker markirten Bogen angedeutet; der Krümmungshalbmesser des Punktes B ist also RB. Wenn sich demnach für 2 Ellipsenpunkte die Krümmungshalbmesser verhalten wie n : 1, so schreiben wir der Ellipse im letztern Punkt eine n mal so grosse Krümmung zu als im erstern. So ist man also in den Stand gesetzt, von den Krümmungen einer Linie in Zahlen zu sprechen, und es ist uns daher jetzt leicht verständlich:

§ 6 der Normen für die Construction und Ausrüstung der

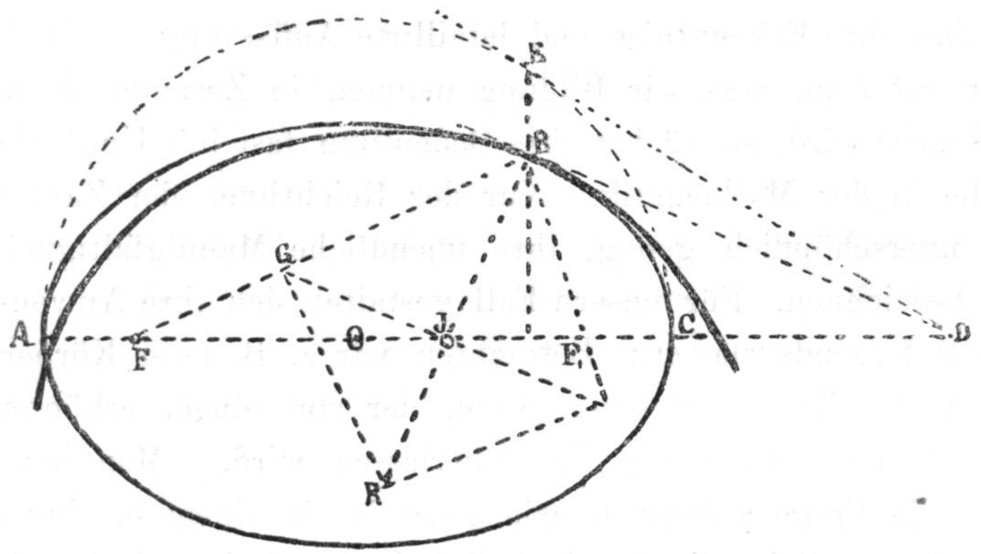


Fig. 3

Eisenbahnen Deutschlands: „Die Anwendung eines Halbmessers unter 300 m für Krümmungen auf freier Bahnstrecke bedarf der Genehmigung des Reichs-Eisenbahnamtes"; oder

§ 3 aus der Bahnordnung für deutsche Eisenbahnen untergeordneterer Bedeutung: „Bei normaler Spur (1,435 m) soll der Curvenradius nicht 100 m unterschreiten."

Durch fortgesetzte Bemühungen, Qualitäten zu messen, ist es den mathematischen Wissenschaften auch möglich geworden, ein Mass für die Kräfte zu finden. An der sogenannten Schwerkraft soll versucht werden zu zeigen, mit welchem Masse die Mathematik die Kräfte misst. Das Gesetz der allgemeinen Schwere lehrt nämlich: „Alle Materie zieht sich an proportional der Masse, und die Kraft der Anziehung nimmt im gleichen Verhältniss ab, wie das Quadrat der Entfernung zunimmt.“ Zum Messen der Schwerkraft, sowie auch jeder andern Kraft ist die Untersuchung gewisser Differenzen oder Unterschiede erforderlich. Spielen dieselben schon im bürgerlichen Leben oft eine grosse Rolle, so dass ihre Erkenntniss und detaillirte Auffassung unmittelbar mit dem, was wir Bildung nennen, in Zusammenhang gebracht wird, so wächst ihre Bedeutung fast in's Unglaubliche in der Mathematik. Nur der Reichthum der Zahlen ist unerschöpflich genug, ihre unendliche Mannigfaltigkeit zu bezeichnen. Für unsern Fall gestaltet sich ihre Anwendung folgendermassen: Betrachten wir z. B. zwei Körper, etwa die Erde und einen Stein, der von einem erhöhten Punkt aus dem freien Fall überlassen wird. Man kann nun die Frage aufwerfen, wie gross ist in einem bestimmten Augenblicke die Geschwindigkeit des Steins, d. h. wie viel Meter würde der Stein von nun an pro Sekunde zurücklegen, wenn die Anziehungskraft der Erde plötzlich aufhörte, auf ihn einzuwirken. Um hierauf die Antwort zu geben, muss man seine Zuflucht nehmen zur Bildung von Differenzen. Man misst für zwei sehr wenig von einander verschiedene Zeiträume die durchlaufenen Wege s_1 und s_2 und dividirt ihre Differenz $s_1 - s_2$ durch den Unterschied der dazu verwendeten Zeiten $t_1 - t_2$; alsdann gibt der Quotient der Wegdifferenz durch die Zeitdifferenz oder $\frac{s_1 - s_2}{t_1 - t_2}$ die Geschwindigkeit um so genauer an, je kleiner die Differenzen waren, mit denen man operirte; denn bekanntlich wird bei der geradlinig gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit gefunden, indem man den Weg s durch die zum Zurücklegen desselben nöthige Zeit t dividirt, also $v = \frac{s}{t}$. Je kleiner aber die Differenz der oben verwendeten Zeiträume angenommen wird, desto eher darf die Bewegung des Steins in jener sehr kurzen Zeitdauer als gleichförmig angesehen werden. — Verlangt man endlich die Grösse der Kraft zu wissen, welche in einem ganz bestimmten Augenblick auf den Stein einwirkt, so bestimmt man wieder für sehr nahe Zeitpunkte die entsprechenden Geschwindigkeiten, dividirt ihre Differenz dv durch die Differenz der Zeiträume und findet so, um wie viel innerhalb einer Sekunde die Geschwindigkeit der Bewegung zugenommen hätte, wenn sie gleichförmig gewachsen wäre. Dieser so erhaltene Quotient gibt nun eine ganz bestimmte Vorstellung von der Grösse der Kraft, die jetzt auf den Stein einwirkt, wenn man ihn noch mit der Masse des Steins multiplicirt. Diese Rechnungen hätten vollkommen richtige Resultate geliefert, wenn man mit unendlich kleinen Differenzen hätte operiren können.

Allein wir dürfen bei diesem Gegenstande nicht länger verweilen, als uns erlaubt ist, haben wir ja schon unbewusst die Schwelle der Differentialrechnung betreten, deren Hauptgegenstand jene unendlich kleinen Differenzen und das Aufsuchen ihrer gegenseitigen Verhältnisse ausmachen. Durch sie steigt man vom Messen des Raumes und der Zeit auf zum Messen der Geschwindigkeit und Kraft.

Durch solche Speculationen hat sich der Mathematiker den Weg zum Studium der Physik gebahnt, die im Grossen und Ganzen doch nur eine Bewegungslehre im weitesten

Sinne ist. Der Weg von hier zu den übrigen naturwissenschaftlichen Disciplinen ist, wie Ihnen Allen wohlbekannt, bald gefunden.*

I.

Wir gelangen jetzt im ersten Theile zu Erörterungen, welche die Stellung der Naturwissenschaften zur Mathematik und die *Einflüsse* der *letztern* auf *erstere* betreffen.

Die Mathematik hat von jeher ihre Dienste den Bedürfnissen des Lebens sowohl als den übrigen Wissenschaften gewidmet, ganz besonders der Wissenschaft von der Natur. Denn das, was man im eigentlichen Sinne Naturwissenschaft nennt, ist die Kenntniss der Beziehungen zwischen den Erscheinungen der Natur und ihren Ursachen; diese Beziehungen werden aber mit Hülfe der Mathematik erforscht, d. h. durch eine Methode, wo bei allen Quantitäts- und Raumverhältnisse betreffenden Fragen vollkommen exacte Schlüsse unter Anwendung conventioneller Symbole gezogen und zu allgemeinerer Anwendung ausgearbeitet werden, zu welcher Abtheilung nur der Mathematiker Zutritt hat. Die nächst niedrigere Abtheilung der Naturwissenschaft beobachtet die Erscheinungen, theilt sie ein und sucht auf inductivem Wege die obwaltenden Gesetze aufzustellen. Da sie aber nicht im Stande ist zu bestimmen, ob diese Gesetze nothwendige Resultate der Wirkung physikalischer Kräfte sind, so bleibt sie so lange bloss empirisch, bis sie durch eine höhere Wissenschaft richtig interpretirt wird. So vergleicht der englische Forscher Curch in Quar-

* Vergl. die Programmarbeit von Prof. C. H. Schellbach: Ueber den Inhalt und die Bedeutung des mathematischen und physikalischen Unterrichts auf unsern Gymnasien; Berlin 1886.

terly Review 1876 den Mathematiker mit dem erfahrnen Künstler mit Plan und Richtscheit, dem die Handlanger die erforderlichen Bausteine und den Mörtel zurecht legen, und auch Schlömilch sagt: „Es ist ohne weiteres einleuchtend, dass man ein Naturgesetz nicht einmal präcis aussprechen, geschweige denn verstehen kann, ohne von den mathematischen Bestimmungen räumlicher, zeitlicher und graduell verschiedener Grössen Gebrauch zu machen."

Die schon jetzt vorhandene und noch mehr und mehr sich verbreitende Herrschaft der Mathematik in fast allen Theilen der Physik und zum Theil auch in den übrigen naturwissenschaftlichen Disciplinen gestatten ihr die Träger jener Disciplinen willig, und selbst der Naturphilosoph kann sie ihr nicht mehr streitig machen. Wäre es auch nicht die Masse des Mondes etc., wie wir es glauben, sondern so wie es Hegel auffasst, der wasserlose Krystall, der sich an unserm Meere gleichsam zu integriren, den Durst seiner Starrheit zu löschen sucht und daher Ebbe und Fluth bewirkt: der Mathematiker untersucht nicht, ob dieser Vergleich so tiefsinnig ist, als er spielend erscheint; aber er will wissen, wie hoch dieser Durst des Mondes das Meer in unsern Häfen aufsaugt, und diese Zahl von Metern vermag Niemand aus dem philosophischen Bilde zu entnehmen. Und doch sind es nur diese numerischen und geometrischen Bestimmungen allein, die einen praktischen Werth und ein wahres, allgemein verbreitetes Interesse haben. Wäre die oben betonte Abklärung der durch Beobachtung und Experiment gefundenen Thatsachen schon von jeher gepflegt worden, dann wäre es nicht möglich gewesen, dass in der Stadt Berlin unter bedeutenden Mathematikern und grossen Naturforschern ein phantasiereicher Mann, wie der Professor Steffens (Naturforscher und Dichter, † 1845), seinen Zuhörern Fabeln über die Gesetze der Pendelschwingungen vortragen durfte und fast zweihundert Studierende so arg verblenden konnte, dass sie den Diamant als einen zu sich selbst gekommenen Kieselstein anstaunten, oder, wie der hochgelehrte Präses des Senates der Georgia Augusta in Göttingen, der Professor der Experimentalphysik Hollmann, wie es in einem Lustspiel * so drastisch dargestellt wird, mit seiner Luftpumpe eine neue Entdeckung gemacht ** und für sich selbst auch den Beweis erbracht zu haben glaubte, dass die Mathematik keine Wissenschaft sei, als der Prof. extraord. der Mathematik Kästner ihm an der Luftpumpe ein verhängnissvolles Loch zeigte, darob Hollmann so sehr aufgeregt wurde, dass er auch noch beweisen wollte, dass dieses Loch eigentlich kein Loch sei.

Die Naturwissenschaften sind also zur exacten Behandlung ihrer Probleme auf die thätige Mithülfe der Mathematik angewiesen. Vieles Unbegreifliche von ehemals erscheint daher gegenwärtig als ein mehr oder weniger einfaches Problem der Mathematik.

Die Mathematik erfährt in den verschiedenen Naturwissenschaften verschiedene Stufen der Anwendung. Als *erste* oder *unterste* Stufe möchte ich die Anwendung der *Scala,* d. h. der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3 . . . u. s. f., in der jede Zahl als Ordnungszahl aufgefasst wird, aufstellen. Solcherlei Anwendungen will ich Ihnen kurz zwei erwähnen. Es ist Ihnen wohlbekannt, dass die Mineralogie die von ihr zu untersuchenden Naturkörper nach ihrer Härte, als einem oft wichtigen Unterscheidungsmerkmal, in

* Helbig, Die Komödie auf der Hochschule; histor. Lustspiel.

** Vergl. Unger, Göttingen und die Georgia Augusta; Göttingen 1861.

Ermanglung einer Härte-Einheit in 10 verschiedene Rangstufen einordnet; diese sogenannte Härteskala heisst:

1. Talk	4. Flusspath	8. Topas
2. Gyps	5. Apatit	9. Korund
3. Kalkspath	6. Feldspath	10. Diamant.
	7. Quarz	

Die obigen Zahlen haben hier gar nicht die Bedeutung von Messungsresultaten; sie geben nicht den numerischen Betrag dieses oder jenes Masses an; sie haben lediglich nur die Bedeutung von Ordnungszahlen. Wenn also ein in Untersuchung stehendes Mineral den Feldspath noch ritzt, von Quarz aber geritzt wird, so sagen wir, es liegt dessen Härte zwischen 6 und 7.

Ganz ähnlich verhält es sich mit der sogenannten elektrochemischen Spannungsreihe von Berzelius. Der positive oder negative Charakter eines Stoffes vom Standpunkte des Galvanismus aus ist daran erkennbar, dass derselbe bei der Elektrolyse an der positiven, bezw. negativen Elektrode erscheint. Dieser Charakter der Elemente ist rein relativ, abhängig von der Natur des andern Stoffes. So z. B. scheidet sich Jod von Wasserstoff und den Metallen als negativer, aus Chlorjod als positiver Bestandtheil aus. Demgemäss hat Berzelius* die chemischen Elemente in eine Reihe gebracht, in welcher jedes derselben dem frühern gegenüber als positiv erscheint, mit dem spätern als negativ. Wir lassen diese Reihe folgen mit der Bemerkung, dass sie weniger auf directen galvanischen Zerlegungen beruht, als auf dem Verhalten der Elemente in den chemischen Verbindungen. Die Ordnungszahlen werden hier weggelassen.

---

* Berzelius, Lehrb. 5. Aufl. I. 118.

—				
Sauerstoff	Molybdän	Osmium	Cadmium	Didym
Schwefel	Wolfram	Iridium	Cobalt	Lanthan
Selen	Bor	Platin	Nickel	Yttrium
Stickstoff	Kohlenstoff	Rhodium	Eisen	Beryllium
Fluor	Antimon	Palladium	Zink	Magnesium
Chlor	Tellur	Quecksilber	Mangan	Calcium
Brom	Tantal	Silber	Uran	Strontium
Jod	Titan	Kupfer	Cerium	Baryum
Phosphor	Kiesel	Wismuth	Thorium	Lithium
Arsen	Wasserstoff	Zinn	Zirkon	Natrium
Chrom	Gold	Blei	Aluminium	Kalium
Vanadin				+

Ebenso liessen sich aus der Geologie bezügliche Beispiele anführen, wie die Reihenfolge der verschiedenen Formationen und innerhalb derselben die Aufeinanderfolge der Stufen und Schichten etc.

Als *zweite* Stufe reiht sich die der *darstellenden Geometrie,* oder wenn Sie wollen, die Stufe des *naturwissenschaftlichen Zeichnens* an. Nun, — werden Sie aber fragen, Geehrteste, — Zeichnen ist doch nicht Mathematik. — Und doch gehört zur Anfertigung einer richtigen, auch für andere verständlichen Zeichnung eines Naturobjektes *mehr* als die blosse mechanische Fertigkeit, gerade und krumme Striche ziehen zu können; es kommt nämlich noch hinzu die Fähigkeit, das Verhältniss der Dimensionen des abzubildenden Dinges richtig zu beurtheilen, sowie auch die räumliche Anordnung seiner Theile klar zu erfassen, um sie mit den Mitteln der Projectionslehre für Andere verständlich in einer Ebene bildlich darzustellen. Gute Abbildungen sind für den gereiften Verstand oft vermögend, das dargestellte Naturobject zu ersetzen. Mit Recht legt man daher heute grossen Werth auf sorgfältig und mit Verständniss entworfene Abbildungen; denn von denselben hängt nicht bloss zum guten Theil das innere Verständniss der dargestellten Lagen- und Grössenbeziehungen der Objecte ab, sondern auch ein Theil des Interesses, mit dem sich der Studierende an das Studium der bezüglichen Erscheinungsformen macht. Mit Recht hat man daher in der neuern Zeit angefangen, der Nothwendigkeit des Freihandzeichnens nicht nur für den Künstler und Handwerker, sondern für jeden gebildeten Menschen mehr Rechnung zu tragen, theils

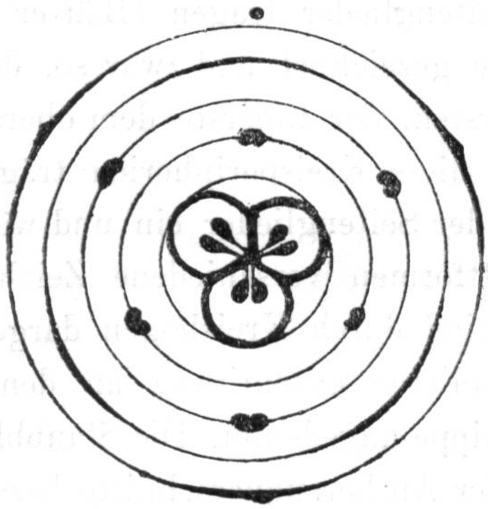


Fig. 4

durch Förderung der diesbezüglichen Literatur, theils durch sorgfältigere Pflege dieses Faches im Schulunterrichte.

Knüpfen wir hier an ein Beispiel aus der Botanik an. Denken Sie sich etwa den Bau der Blüthe eines Liliaceengewächses, wie Fig. 4 zeigt. Eine solche Darstellung, wie die hier vorliegende, heisst in der Botanik ein Blüthendiagramm, welches je nach dem Zwecke, dem es dienen soll, verschieden construirt werden kann.

Manche erblicken darin eine freiere Zeichnung eines wirklichen Querschnitts der Blüthe und geben darin nicht bloss die Zahl und Stellung, sondern annähernd auch die

Form, Verwachsung, Grösse und gegenseitige Deckung der Blüthentheile an. Diese nach wirklichen Blüthenknospenquerschnitten angefertigten Zeichnungen enthalten aber manches, was für gewisse Betrachtungen als unnöthig erscheint. Will man ausschliesslich die Zahl und Stellung der Blüthentheile versinnbildlichen, um die Vergleichung zahlreicher Blüthen in dieser Hinsicht zu ermöglichen, so ist es am rathsamsten, alle Diagramme oder Projectionen nach einem bestimmten, einfachen Schema zu entwerfen. Die Querschnitte der Axengebilde (Stengel, Zweig, Blüthenaxe), welche Seitenglieder tragen (Blätter), sind als concentrische Kreise gezeichnet und zwar so, dass der äusserste Kreis dem untersten, der innerste dem obersten Querschnitt entspricht; auf diese Kreisperipherien trägt man die Anheftungsstellen der Seitenglieder ein und wählt für die verschiedenen Blattformen verschiedene Zeichen; die Blätter der Hüllkreise sind durch Kreisbogen dargestellt und zwar ist behufs schnellerer Orientirung an denen des Kelches eine Art Mittelrippe angedeutet. Die Staubblätter sind durch Staubkolben- oder Antherenquerschnitte bezeichnet, während der Stempel durch einen einfachen Querschnitt des Fruchtknotens dargestellt wird. — Durch Vergleichung solcher Diagramme gewinnt man gemeinsame theoretische Diagramme, die von den Botanikern als Typen bezeichnet worden sind. Auf analoge Art kann auch ein ganzes System blattbildender Sprosse durch eine Horizontalprojection veranschaulicht werden.

Ganz besondern Werth hat ein verständnissvolles Zeichnen auch in demjenigen Theile der Mineralogie, der von der Morphologie der unorganischen Naturkörper handelt, nämlich in der Krystallographie. Wenn nicht Modelle in genügender Zahl vorhanden sind, so ist eine nach den Regeln der darstellenden Geometrie ausgeführte Zeichnung noch das einzige Mittel, um dem bedrängten Vorstellungsvermögen zu Hülfe zu kommen. In Figur 5 sehen Sie ein Oktaëder (0) in schräger Parallelprojection dargestellt, in Fig. 6 nach gleicher Projectionsart eine Combination zwischen Oktaëder und Rhombendodekaëder ($0 . \infty 0$), in welcher die Flächen des Rhombendodekaëders die Kanten des Oktaëders gerade abstumpfen.

Nicht geringere Bedeutung haben solche exact ausgeführte Darstellungen auch in der Anatomie des Menschen- und Thierkörpers.

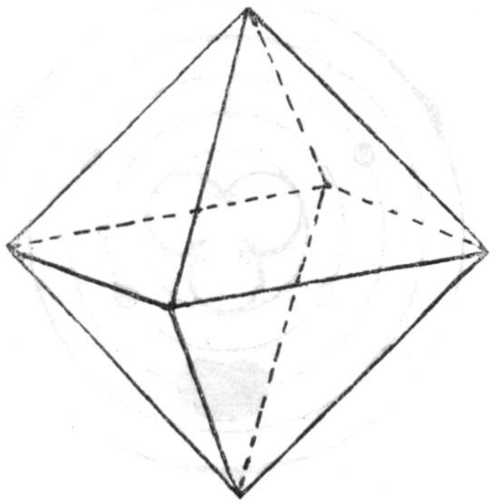


Fig. 5

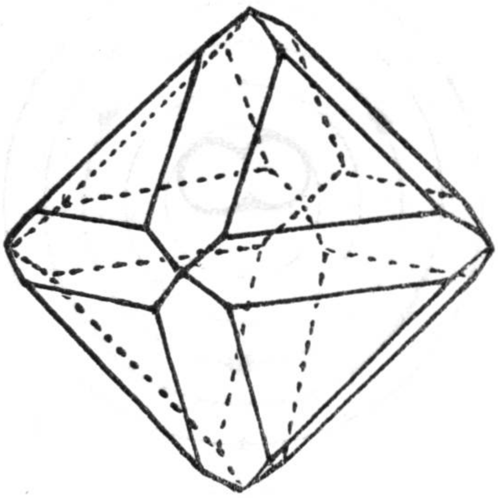


Fig. 6

Als *dritte* Stufe bezeichne ich zunächst die Anwendung des *heterogenen Polynoms* oder des *summarischen Symbols,* in welchem die verschiedenen Theile eines Naturganzen symbolisch in additivem Sinne zu einer Summe neben einander gestellt werden. Es kann nämlich das oben besprochene Blüthendiagramm wenigstens zum Theil durch einen aus Buchstaben und Zahlen zusammengesetzten Ausdruck ersetzt werden. Die Formel $K_3 C_3 A_{3+3} G_3$ entspricht beispielsweise dem Diagramm der Liliaceen (Fig. 4) und bedeutet, dass jeder der beiden Hüllkreise, nämlich der äussere (K) und der innere (C), aus 3 Gliedern besteht, dass sich das Andröceum, d. h. die Gesammtheit der männlichen Geschlechtsorgane aus zwei dreigliedrigen Kreisen 3+3, das Gynäceum, d. h. die Gesammtheit der weiblichen Geschlechtsorgane der Pflanze, wieder aus *einem* solchen aufbaut; die Formel $K_0 C_3 A_{3+3} G_3$ entspricht der Blüthe von Bambusa und unterscheidet sich von der ersten Formel nur durch den Partialausdruck K_0, der besagt, dass der äussere Perigonkreis abortirt ist. Die Formel $K_2 C_2 A_{2+2} G_2$ gibt die Zahlenverhältnisse der Blüthe von Majanthemum bifolium oder der

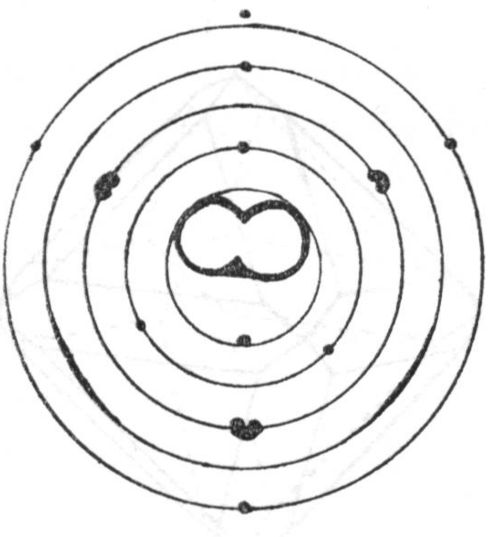


Fig. 7

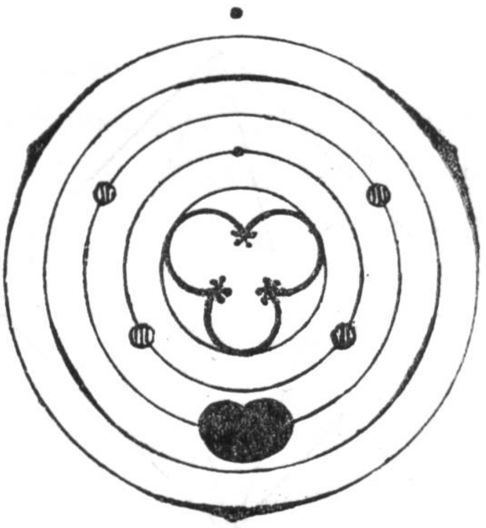


Fig. 8

zweiblättrigen Schattenblume, $K_3 C_3 A_{\ddot{1}+0} G_3$ die der Orchideenblüthe (Fig. 8), wo $A_{\ddot{1}+0}$ bedeutet, dass der innere Kreis des Andröceums in allen Gliedern abortirt, dass im äussern Kreise dagegen die beiden hintern fehlgeschlagen, während das vordere äussere sich vollständig entwickelt. $K_0 C_{\dot{2}} A_{3+0} G_{\underset{\cdot}{2}}$ entspricht der gewöhnlichen Grasblüthe, siehe Fig. 7.

$K_4 C_4 A_{4+4} G_4$ und $K_5 C_5 A_{5+5} G_5$ ist die symbolische Darstellung der Zahlenverhältnisse der aus 4 oder 5gliedrigen Kreisen bestehenden Blüthe der Einbeere oder Paris quadrifolia. — Diese und die meisten andern Formeln von monokotyledonischen Blüthen lassen sich in den allgemeinen Ausdruck

$$K_n C_n A_{n+n} G_{n(+n)}$$

vereinigen. Die Klammer ($+$ n) am Schlusse der Formel gibt an, dass zuweilen noch ein zweiter Kreis von Fruchtblättern vorkommt. Der nicht zu unterschätzende Vortheil solcher Blüthenformeln vor Diagrammen ist der, dass sie einer weitergehenden Verallgemeinerung fähig sind, indem man die bestimmten Zahlen durch allgemeine Zahlzeichen, nämlich durch Buchstaben ersetzt. Doch ich will Sie, Verehrte, nicht länger mit diesbezüglichen botanischen Erörterungen* hinhalten, indem berufenere Kräfte hier sind, nach dieser Richtung hin allfällige weitere Aufschlüsse zu geben.

Ganz analogen Formeln begegnen wir in der Zoologie beim Studium der Säugethiere; ich denke hierbei an die sogenannten Zahnformeln. Wenn dort z. B. als symbolische Darstellung der Zahnverhältnisse von *Sus* (Eber) $\frac{3.1.7}{3.1.7}$ angegeben wird, so heisst das, es folgen sowohl im Ober- als Unterkiefer von der verticalen Symmetrieaxe aus nach beiden Seiten derselben aufeinander: 3 Schneidezähne, 1 Eckzahn und 7 Backenzähne. In ähnlicher Weise hat man als Zahnformeln für:

$$\text{Mensch}\frac{2.1.5}{2.1.5},\ \text{Maulwurf}\frac{3.1.7}{4.1.6},\ \text{Hund}\frac{3.1.6}{3.1.7},\ \text{Maus}\frac{1.0.3}{1.0.3},$$

$$\text{Pferd}\frac{3.1.6}{3.1.6},\ \text{Ziege}\frac{0.0.6}{4.0.6}\ \text{u. s. f.}$$

* Bei den vorangehenden botanischen Erörterungen habe ich mich vorwiegend an „Sachs“ gehalten.

Auf *diese nämliche Stufe* rechne ich ausser dem bereits an einigen Beispielen vorgeführten summarischen Symbol, welches als $K_3 C_3 A_{\ddot{\imath}+0} G_3$ in gewissem Sinn auch schon Lagenbeziehungen ausdrückt, noch das specielle *Symbol der Lage.* Dieser Name rechtfertigt sich meines Erachtens durch die Doppelnatur dieses Symbols. Wir werden nämlich unterscheiden zwischen einem *Symbol von arithmetischem Charakter als Ausdruck für geometrische Lagenbeziehungen* und einem *Symbol von geometrischem Charakter,* welches

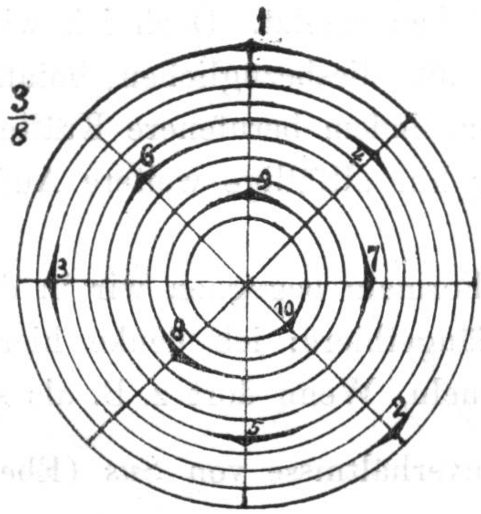


Fig. 10

Fig. 9

arithmetische Grössenbeziehungen zu veranschaulichen sucht. Ich begnüge mich damit, Ihnen von jeder Art ein Beispiel zu nennen. — Zu den Symbolen der ersten Gattung rechne ich in erster Linie diejenigen Zahlen, welche der Botaniker kurz als Divergenzen bezeichnet und welche Aufschluss geben über die Stellungsverhältnisse seitlicher Glieder einer Pflanze an gemeinsamer Axe, wobei unter Axe jedes an seiner Spitze fortwachsende Glied verstanden werden soll, welches Seitensprosse hervorbringt, also z. B. eine Wurzel mit Seitenwurzeln, ein Zweig mit Blättern u. s. w. Wenn nun z. B. angegeben wird, der Divergenzbruch für die Blattstellung irgend einer Pflanze sei $\frac{1}{3}$ (Fig. 9), so will das heissen, die betreffenden Seitensprosse sind spiralig an der Axe angeordnet derart, dass, von einem bestimmten an gerechnet, das drittfolgende sich unmittelbar über dem ersten befindet und dass, um von dem letztern zum erstern zu gelangen, ein und nur ein Rundgang um die Axe erforderlich ist. Ebenso bedeutet die Blattdivergenz $\frac{3}{8}$ (siehe Fig. 10), dass man von einer bestimmten Blattstelle ausgehend, der Spirale der Anheftungsstellen folgend, drei Umgänge um den Zweig zu machen hat, um wieder zu einem unmittelbar über dem Ausgangspunkte gelegenen Blatte zu gelangen, welch' letzteres, vom erstern aus gezählt, das achtfolgende ist. Als solche Divergenzbrüche erscheinen am häufigsten:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \frac{13}{34}, \frac{21}{55}, \frac{34}{89}, \frac{55}{144}, \frac{89}{233}, \frac{144}{377}, \frac{233}{610}.$$

Diese einzelnen Divergenzen sind alle nach einem und demselben Gesetz gebildet. Bezeichnen wir drei solche auf einander folgende Glieder der Reihe mit

$$\frac{P_n}{Q_n}, \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}, \frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}},$$

so ist, wie Sie sehen,

$$P_{n+2} = P_n + P_{n+1} \text{ und}$$
$$Q_{n+2} = Q_n + Q_{n+1}$$

Braun hat bemerkt, dass diese Divergenzen die Näherungswerthe des unendlichen Kettenbruches

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots \text{ in inf.}}}}}$$

sind, welche sich mehr und mehr dem Werthe

$$\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)$$

nähern. Im Weitern fiel es auf, dass letzterer Ausdruck identisch ist mit der Länge des grössern Abschnittes beim sogenannten *goldenen Schnitt.* Auch die übrigen in der Natur vorkommenden Divergenzen lassen sich nach Al. Braun zu Reihen vereinigen, welche sich allgemein aus den Näherungswerthen von Kettenbrüchen der Form

$$\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots\ldots}}}}$$

darstellen.

Wenden wir uns jetzt zu den oben angekündigten geometrischen Symbolen dieser Stufe. Es lassen sich speciell in der organischen Chemie in der Gruppe der aromatischen Verbindungen die Constitutionen von gewissen Kohlenstoffatomgruppen am übersichtlichsten durch geometrische Darstellungen veranschaulichen, so z. B. die Gruppe C_6 im Benzol (Fig. 11) und die Gruppe C_{10} im Naphtalin $C_{10}H_8$ (Fig. 12), welches aus 2 Benzolkernen besteht, die 2 Kohlenstoffatome gemeinsam besitzen. Näheres darüber auf der vierten Stufe.

In neuerer Zeit haben verschiedene Chemiker zur Erklärung der Eigenschaften einer Verbindung die räumliche Lagerung der Atome im Molekül herangezogen. Es ist wohl selbstverständlich, dass die Bausteine des Moleküls, d. h. die Atome — sofern solche überhaupt anzunehmen sind —, in irgend einer räumlichen Anordnung vorhanden sein müssen, welche möglicherweise Veranlassung zu kleinern Abweichungen in den Eigenschaften structuridentischer Moleküle geben kann. So äussert sich z. B. Dr. J. Wislicenus: „Ich selbst „sah mich bei meiner Arbeit über die Paramilchsäure ge- „nöthigt, den Satz auszusprechen, dass die Thatsachen dazu „zwingen, die Verschiedenheit isomerer Moleküle von gleicher

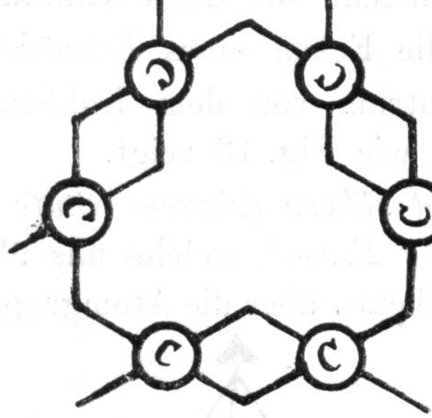


Fig. 11

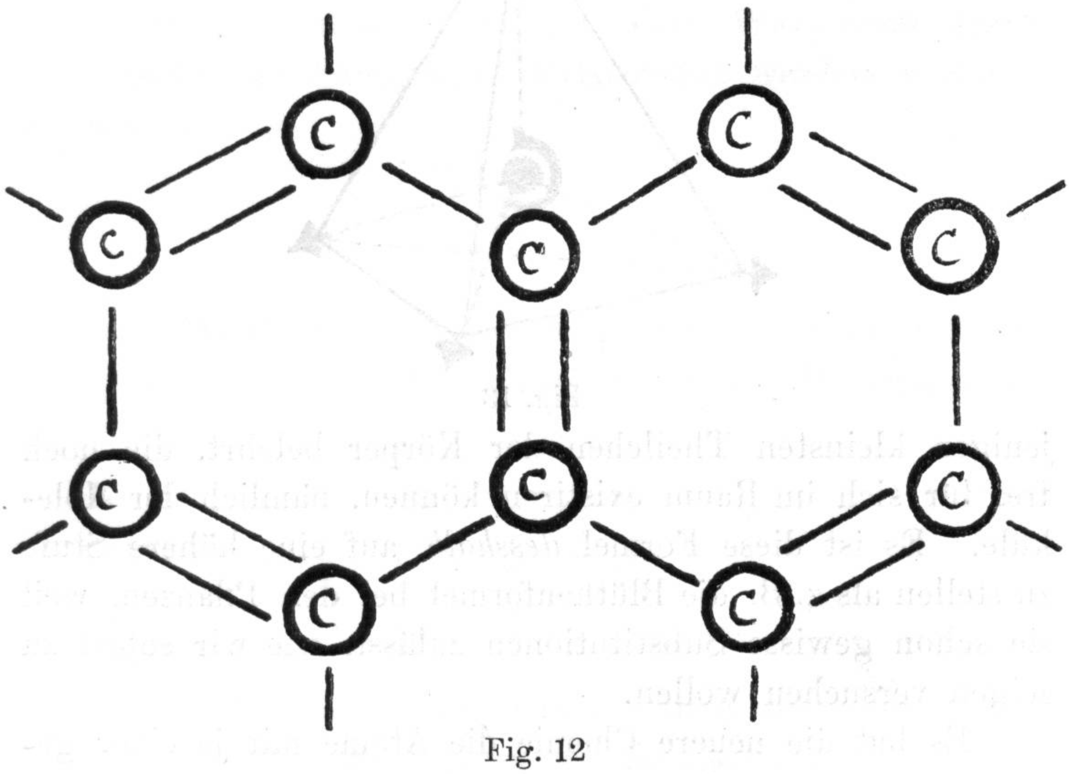


Fig. 12

„Structurformel durch verschiedene Lagerung ihrer Atome „im Raum zu erklären und damit offen für die Berechtigung „der Chemie einzutreten, geometrische Anschauungen in die „Lehre von der Constitution der Verbindungsmoleküle herein- „zuziehen."

Von besonderem chemischen Interesse ist in dieser Richtung eine Hypothese von van't Hoff,* durch welche allgemein das optische Drehungsvermögen einer Substanz mit der chemischen Structur in Zusammenhang gebracht wird. Nach dieser Hypothese hat man sich die 4 Affinitäten des Kohlenstoffatoms gegen die Ecken eines Tetraëders gerichtet zu denken, dessen Centrum von dem Kohlenstoffatom selbst eingenommen wird, wie Fig. 13 zeigt.

Auf der *nächst höhern (vierten) Stufe* finden wir die sogenannte *chemische Formel,* welche uns über die qualitative Beschaffenheit, bezw. über die Atomgruppirung, in den-

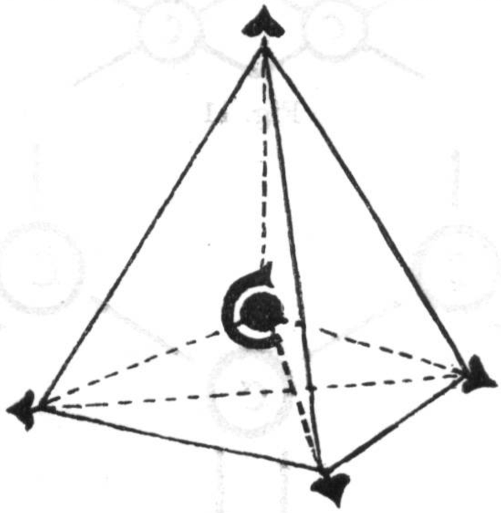


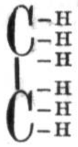
Fig. 13

jenigen kleinsten Theilchen der Körper belehrt, die noch frei für sich im Raum existiren können, nämlich der Moleküle. Es ist diese Formel *desshalb* auf eine höhere Stufe zu stellen als z. B. die Blüthenformel bei den Pflanzen, weil sie schon gewisse Substitutionen zulässt, wie wir sofort zu zeigen versuchen wollen.

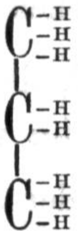
Es hat die neuere Chemie die Atome mit je einer gewissen Zahl von sogenannten Valenzen ausgestattet unter Zugrundelegung der Vorstellung, dass diese Affinitätseinheiten eines Atoms sich binden mit denen eines andern Atoms; so

* Vergl. J. H. van't Hoff: La chimie dans l'espace; Rotterdam 1875.

weiss z. B. der Chemiker, dass sich ein Atom Wasserstoff direkt mit höchstens einem Atom irgend eines andern chemischen Elementes verbinden kann, was er dadurch ausdrückt, dass er hinter das Atomzeichen H noch einen Horizontalstrich setzt, also H—. Das Kohlenstoffatom hat 4 solche freie Valenzen $C\begin{smallmatrix}-\\-\\-\\-\end{smallmatrix}$ und kann sich daher mit 4 Wasserstoffatomen verbinden, welche Verbindung sich darstellt in der Form $C\begin{smallmatrix}-H\\-H\\-H\\-H\end{smallmatrix}$ oder CH_4 (Sumpfgas oder Methan). Denken wir uns daneben die Atomgruppe $C\begin{smallmatrix}-H\\-H\\-H\end{smallmatrix}$ oder CH_3, so hat dieselbe noch eine freie Valenz, welche entweder durch ein einwerthiges Atom, oder durch eine andere einwerthige Atomgruppe, wie der Chemiker sich ausdrückt, gesättigt werden kann. So kann also in CH_4 ein Atom Wasserstoff durch die einwerthige Atomgruppe CH_3 ersetzt werden, wodurch der Körper

 oder C_2H_6

entsteht. Wenn man in diesem neuerdings ein Atom Wasserstoff durch die einwerthige Methylgruppe CH_3 ersetzt, so entsteht

 oder C_3H_8.

Dieser Vorgang der Substitution kann weiter fortgesetzt werden und dabei wird man sehen, dass je zwei aufeinanderfolgende Glieder der hiedurch entstehenden Reihe die constante Differenz CH_2 ergeben. Nachdem man sich überzeugt hatte, dass die Glieder dieser Reihe einander sehr ähnlich sind, so hat man es für zweckmässig gefunden, die organischen Verbindungen in solche Reihen zu bringen, und hat dieselben als „homologe Reihen“ bezeichnet, von denen jede durch ihr allgemeines Glied der Zusammensetzung nach charakterisirt ist.. Unsere oben begonnene Reihe hat als allgemeines Glied $C_n H_{2n+2}$. Andern Reihen entsprechen die allgemeinen Glieder:

$$C_nH_{2n},\ C_nH_{2n-2},\ C_nH_{2n-4} \text{ etc.}$$

Lässt man die heute noch nicht in dieser Weise gruppirbaren Substanzen ausser Acht, so darf wohl gesagt werden, diese Reihen bilden das Skelett der organischen Chemie. Werden die einzelnen H-Atome in CH_4 durch Chloratome ersetzt, so entstehen der Reihe nach

$$\mathrm{C}\begin{matrix}-H\\-H\\-H\\-H\end{matrix} \text{ od. } CH_4,\quad \mathrm{C}\begin{matrix}-H\\-H\\-H\\-Cl\end{matrix} \text{ od. } CH_3Cl,\quad \mathrm{C}\begin{matrix}-H\\-H\\-Cl\\-Cl\end{matrix} \text{ od. } CH_2Cl_2,$$

Methan Monochlormethan Dichlormethan

$$\mathrm{C}\begin{matrix}-H\\-Cl\\-Cl\\-Cl\end{matrix} \text{ od. } CHCl_3,\quad \mathrm{C}\begin{matrix}-Cl\\-Cl\\-Cl\\-Cl\end{matrix} \text{ od. } CCl_4$$

Chloroform Tetrachlormethan.

Wird ein Wasserstoffatom in CH_4 durch die einwerthige Hydroxilgruppe $O{-}H$ ersetzt, so entsteht ein Alkohol, nämlich $\mathrm{C}\begin{matrix}-H\\-H\\-H\\-OH\end{matrix}$. Wenn in einem solchen Alkohol 2 H-Atome, die an Kohlenstoff gebunden sind, durch 1 O-Atom ersetzt werden, so resultirt eine Säure, im vorliegenden Falle die Ameisensäure $\mathrm{C}\begin{matrix}-H\\=O\\-HO\end{matrix}$, ein Körper, der sich fertig gebildet in den Ameisen und Brennnesseln vorfindet.

Jedes Glied der oben vorgeführten Reihen ist solcher Substitutionen fähig. So liefert die Substitution bei der Einführung in das Methan $\begin{matrix}\mathrm{C}\begin{matrix}-H\\-H\\-H\end{matrix}\\ | \\ \mathrm{C}\begin{matrix}-H\\-H\\-H\end{matrix}\end{matrix}$

eines Atoms Chlor: $\begin{array}{l}\mathrm{C}\begin{smallmatrix}-\mathrm{Cl}\\-\mathrm{H}\\-\mathrm{H}\end{smallmatrix}\\ | \\ \mathrm{C}\begin{smallmatrix}-\mathrm{H}\\-\mathrm{H}\\-\mathrm{H}\end{smallmatrix}\end{array}$ od. Aethylchlorid od. Monochloraethan

eines Atoms Brom: $\begin{array}{l}\mathrm{C}\begin{smallmatrix}-\mathrm{Br}\\-\mathrm{H}\\-\mathrm{H}\end{smallmatrix}\\ | \\ \mathrm{C}\begin{smallmatrix}-\mathrm{H}\\-\mathrm{H}\\-\mathrm{H}\end{smallmatrix}\end{array}$ od. Aethylbromid od. Monobromaethan

der einwerthigen Gruppe HSO_4: $\begin{array}{l}\mathrm{C}\begin{smallmatrix}-\mathrm{H}\\-\mathrm{H}\\-\mathrm{H}\end{smallmatrix}\\ | \\ \mathrm{C}\begin{smallmatrix}-\mathrm{H}\\-\mathrm{H}\\-\mathrm{HSO4}\end{smallmatrix}\end{array}$ od. Aethylschwefelsäure

der einwerthigen Gruppe OH: $\begin{array}{l}\mathrm{C}\begin{smallmatrix}-\mathrm{H}\\-\mathrm{H}\\-\mathrm{H}\end{smallmatrix}\\ | \\ \mathrm{C}\begin{smallmatrix}-\mathrm{H}\\-\mathrm{H}\\-\mathrm{OH}\end{smallmatrix}\end{array}$ Aethylalkohol (gewöhnlich. Weingeist)

u. s. w.

Führen wir noch den Kohlenwasserstoff an, der für die Reihe der aromatischen Körper den Ausgangspunkt bildet, das Benzol C_6H_6, dessen Constitution wir uns in Figur 11 veranschaulicht haben. Es bilden dort die Atome einen geschlossenen Cyclus derart, dass darin ein Atom mit dem einen benachbarten durch *einfache,* mit dem andern benachbarten durch *doppelte* Bindung zusammenhängt.

Ersetzen wir in C_6H_6 ein H-Atom durch:

ein Chloratom,	so entsteht	C_6H_5Cl	oder	Monochlorbenzol
die OH Gruppe,	„ „	C_6H_5OH	„	Phenol oder Carbolsäure
„ NO_2	„ „ „	$C_6H_5NO_2$	„	Nitrobenzol
„ NH_2	„ „ „	$C_6H_5NH_2$	„	Amidobenzol oder Anilin
„ COOH	„ „ „	C_6H_5COOH	„	Benzoësäure.

Doch verzichten wir auf weitere Beispiele dieser Art, die sich zu Hunderten und Tausenden aufzählen liessen. —

Der Begriff der Substitution ist ein mathematischer Begriff, der besagt, dass statt einer Grösse eine andere gleichwerthige an deren Stelle gesetzt werde, z. B. statt 2 der gleichwerthige Ausdruck 5—3 etc. Das mathematische Element der Substitution kommt hier auf dieser Stufe nur insofern zur Geltung, als allerdings für ein einwerthiges Atom ein anderes einwerthiges oder allgemeiner für ein n-werthiges Atom oder eine n-werthige Atomgruppe eine andere n-werthige Atomgruppe gesetzt wird; es ist aber trotzdem nicht die reine math. Substitution; denn der Endwerth, d. h. das resultirende Molekül, ist hier ein anderes geworden, mit Eigenschaften ausgestattet, welche das ursprüngliche nicht besass und umgekehrt. Die chemische Substitution gewährt aber vor Allem eine sehr bequeme Uebersicht über die Verbindungen sowohl als über die chemischen Processe selbst; ja, sie lässt uns Körper als denkbar erscheinen, die noch kein Menschenauge gesehen. Diese organische Chemie könnte die Erde mit einer neuen Welt von organischen Wesenheiten bekleiden, wenn sie alle darstellen wollte, welche sich durch die angedeutete Substitution ableiten lassen. Aber diese bloss möglichen Körper bilden keine irdische Welt, welche den Raum beengt, sondern nur eine solche, die in Gedanken existirt, auf den Wink des Chemikers erscheint, der Technik, Medicin, Physik etc. sich dienstbar macht und auf des Chemikers Geheiss wieder als solche verschwindet.

Doch nicht bloss die Operation der Substitution kennt die Chemie; sie kann auch der identischen Gleichung nicht mehr entbehren. Es ist dem Chemiker möglich geworden, die Erscheinungen seiner Wirkungssphäre durch Gleichungen auszudrücken. Nehmen wir als Beispiel die Untersuchungsmethode, deren sich der Mineraloge bedient, um heraus zu finden, ob ein ihm vorgelegtes Kalkmineral Kohlensäure enthalte. Ein Tropfen Schwefelsäure auf das Mineral gebracht, dasselbe braust auf, und genannter Forscher ist überzeugt, dass er es mit einem Carbonat zu thun hat. Der Chemiker drückt diesen ganzen Vorgang aus durch die Gleichung

$$CaCO_3 + H_2SO_4 = CaSO_4 + CO_2 + H_2O$$

d. h. die Schwefelsäure verdrängt die schwächere Kohlensäure, und es entsteht Calciumsulphat, Kohlendioxyd und Wasser. Vorstehende Gleichung ist eine identische sowohl in Bezug auf die ganze Anzahl der in Reaction getretenen Atome als auch auf die Anzahl der Atome jeder Species; sie lässt sich sogar in mehrere identische Gleichungen zerlegen, nämlich

$$\left.\begin{array}{rcl} Ca_1 & = & Ca_1 \\ C_1 & = & C_1 \\ O_3 + O_4 & = & O_4 + O_2 + O_1 \\ H_2 & = & H_2 \\ S_1 & = & S_1 \end{array}\right\} + \text{od. addirt}$$

Atomzahl 12 = Atomzahl 12, woraus auch das Gesetz der Materie herausgelesen werden kann, dass die Atome weder der Vermehrung noch der Verminderung fähig sind oder kürzer gesagt: die Materie ist constant.

Lassen Sie uns, Verehrteste, die *nächste Stufe (5.)*, die Stufe der *Naturconstanten* oder des *physikalischen Messens* betreten.

Unter Naturconstanten verstehen wir ganz bestimmte Zahlenwerthe, ausgedrückt in irgend einer benannten Einheit, welche sich beim Messen der Erscheinungen ergeben, die sich an einem ganz bestimmten Stoff oder einer Combination von Stoffen oder endlich in einem Apparat abspielen. Solche Constanten sind z. B. das specifische Gewicht der Körper, die Atomgewichte der Elemente, die Beschleunigung der Schwere, welch' letztere besagt, ein frei fallender Körper hat nach der ersten Secunde seiner Bewegung die in cm. ausgedrückte Geschwindigkeit

	unter: 45°	*0°*	*90°*
nach Schmidt (1829)	980,5902	978,0470	983,1334
nach Pouillet (1853)	980,6057	978,1029	983,1085

Das Gebiet dieser Constantenbestimmung in der Natur ist unermesslich. Man denke ferner an die verschiedenen Elasticitäts-Constanten, die Constanten der Capillarität, die Zusammendrückbarkeits-Coëfficienten der Flüssigkeiten, die Reibungs- und Diffusions-Constanten, die Ausdehnungs-Coëfficienten, die Constanten der Schall-, Licht- und Elektricitäts-Geschwindigkeit, die Brechungsindices in der Optik u. s. w.

Diese Constanten haben für den Naturforscher den doppelten Werth, einmal mit ihrer Hülfe neue Bestimmungen ausführen, d. h. neue Constanten gewinnen zu können, anderseits auch die Identität gewisser Constanten mit schon vorhandenen nachzuweisen und damit sogar gerichtliche Untersuchungen auszuführen. So z. B. unterscheidet sich nachweisbar das menschliche Blut nur durch die Grösse seiner Blutkörperchen von demjenigen der meisten Säugethiere, von denen fast ausnahmslos die in Frage kommenden Species sämmtlich *kleinere Blutkörperchen* haben. In Brückes Physiologie finden sich folgende diesbezügliche Angaben für den Durchmesser der Blutkörperchen in Bruchtheilen eines Millimeters:

Elephant $\frac{1}{108}$	Schwein $\frac{1}{166}$
Walfisch (Balæna boops) $\frac{1}{122}$	Ochse $\frac{1}{168}$ bis $\frac{1}{180}$
Mensch $\frac{1}{126}$	Pferd $\frac{1}{181}$
Seehund (Phoca vitulina) $\frac{1}{129}$	Schaf $\frac{1}{209}$
Hund $\frac{1}{139}$	Ziege $\frac{1}{253}$ etc.

Die Erkennung und Messung der Blutkörperchen in noch frischem, flüssigem Blut unter dem Mikroskope bietet keine Schwierigkeit. Dagegen wird die Untersuchung bedeutend erschwert bei eingetrocknetem Blut, in welchem die Blutkörperchen zu strahlig gerunzelten Sternchen eingeschrumpft sind. Struve in Tiflis hat in Georgien, wo noch die Blutrache herrscht und Räubereien nicht selten sind, hunderte von gerichtlichen Untersuchungen ausgeführt an den verschiedensten verdächtigen Objecten nach der angedeuteten Richtung hin.*—Auch die Wellenlänge des Lichtes, bezw. das Spectrum eines Körpers kann zur Bestimmung seiner Natur verwendet werden, und aus geringen Unterschieden des prismatischen Flammenbildes sagt der Chemiker die Existenz noch unbekannter Elemente voraus und reiht sie in sein System ein.

Die Untersuchung aller dieser Constanten, von der Wellenlänge einer bestimmten Lichtsorte bis zu den Ergeb-

* Beiträge zur gerichtlich-chemischen Untersuchung blutverdächtiger Flecken, von Struve; siehe Virchow's Archiv für path. Anatomie und Physiologie. 1880.

nissen der Oechslin'schen Weinprobe an einem bestimmten Jahrgang „Oberländer od. Bernecker“ etc., ist oft im Stande, einen vorgelegten Körper mit einem bereits bekannten zu identificiren. Hierauf beruht nicht zum geringsten Theile die Untersuchung der Nahrungs- und Genussmittel, und berechtigt daher dieser Umstand allein schon dazu, noch einen Augenblick auf dieser Stufe zu verweilen. Wenn schon eingangs die Rede gewesen ist von der sogenannten Qualitätenmessung, so werden Sie, Verehrte, gerade an dieser Stelle vielleicht mit mir übereinstimmen, wenn ich behaupte, dass die *Zahl* mit ihren verschiedenen Benennungsarten sehr geeignet sei, die Natur vieler Dinge zu kennzeichnen.

Dabei haben wir uns ganz unbewusst scheinbar den Anschauungen einer alten philosophischen Schule oder eines philosophischen Systems genähert, nämlich dem Pythagoräismus. Die Grundanschauung der pythagoräischen Philosophie ist nach Zeller in dem Satz enthalten, dass die Zahl das Wesen aller Dinge, dass Alles seinem Wesen nach Zahl sei. Auch Aristoteles sagt wiederholt, nach pythagoräischer Ansicht beständen die Dinge aus Zahlen oder aus den Elementen der Zahlen; die Pythagoräer sollen nach Zeller in den Zahlen sogar den Stoff und die Eigenschaften der Dinge gesucht haben. Anderseits sagt Aristoteles auch, die Pythagoräer liessen die Dinge durch Nachahmung der Zahlen entstehen. Es scheint hier noch keine scharfe Unterscheidung zwischen Erscheinung und Stoff vorgenommen worden zu sein. Anknüpfend an das Walten bestimmter Zahlen und Zahlenverhältnisse in der Welt der Erscheinungen und wohl auch an den uralt-symbolischen Gebrauch gewisser Zahlen kamen die Pythagoräer ganz allgemein zu dem Satze: „Alles ist Zahl.“ Aus der Natur dieses pythagoräischen Zahlenprincips folgt aber sofort, dass die Durchführung desselben auf dem Gebiete der Dinge in eine trockene, gedankenlose Symbolik verlaufen musste, nach welcher z. B. 1 den Punkt, 2 die Linie, 3 die Fläche, 4 den Körper, 5 die Beschaffenheit desselben bedeutete; die Gerechtigkeit sollen die Pythagoräer bald auf die Zahlen 3, 4, 5, bald auf die Zahl 9 zurückgeführt haben. Was an dieser einseitigen Zahlenmystik als wahrer Kern erscheint, ist, was wir oben schon ausgesprochen haben, dass in den Naturerscheinungen Zusammenhang und Gesetzmässigkeit walte, welche in Mass und Zahl dargestellt werden könne. —

Nach der Ermittlung der für bestimmte Fälle gültigen Messungsresultate, die bei der Wiederkehr der nämlichen Erscheinungen unter den nämlichen Bedingungen numerisch identisch gleich ausfallen müssten, handelt es sich darum, diese gefundenen Resultate in möglichst anschaulicher Form aufzuzeichnen und wir können daher diese zu betretende *Stufe* bezeichnen als die *Graphik naturwissenschaftlicher Messungsresultate.* Nehmen wir als Exempel die nach den Versuchen von Regnault aufgestellte Tafel für Wasserdampf, wo in der mit $+ t$ bezeichneten Colonne die Temperaturen verzeichnet sind und wo E den jeweils dazugehörigen Sättigungsdruck bedeutet.

$+t$	E mm.	$+t$	E mm.
0^0	4,600	80^0	354,643
10^0	9,165	90^0	525,450
20^0	17,391	100^0	760,000
30^0	31,548	110^0	1075,370
40^0	54,906	120^0	1491,280
50^0	91,982	130^0	2030,28
60^0	148,791	140^0	2717,63
70^0	233,093	150^0	3581,23

$+t$	E mm.	$+t$	E mm.
160^0	4651,62	200^0	11688,96
170^0	5961,66	210^0	14324,80
180^0	7546,39	220^0	17390,36
190^0	9442,70	230^0	20926,40

Vergleicht man die folgenden Zahlen der ausführlichen Tafel von Regnault:

Temperatur	Sättigungsdruck	Zunahme per Grad
0	4,600	0,340
100	760,000	27,590
200	11688,96	245,41
230	20926,40	375,92

so sieht man, wie sehr der Einfluss der Temperatur auf die Zunahme des Sättigungsdruckes steigt. Diese Reihe von Zahlenwerthen der Tafel ist für das Intervall von 0^0 bis 100^0 in Fig. 14 graphisch dargestellt. Die Werthe des Sättigungsdruckes, ausgedrückt in mm., sind in gleichen Abständen als Lothe auf einer horizontalen Geraden aufgetragen. Die Endpunkte der Lothe wurden durch eine Linie, die sich der Lage der Punkte möglichst anpasst, verbunden. Diese Curve, 4,6 bis 760, gibt nun ein anschauliches Bild von den verschiedenen Zahlenwerthen des Sättigungsdruckes und lässt auch leicht erkennen, wie sehr der Einfluss der Temperatur auf die Zunahme des Sättigungsdruckes steigt. Ein Blick genügt, um zu erkennen, wie und wo die Werthe steigen oder fallen, ob schnell, ob langsam und wo die kleinsten und grössten Werthe liegen. So lassen sich auch die Wirkungen anderer Kräfte, z. B. die des Luftdruckes etc., oder auch der Gang der Temperatur am Tage, im Monat, im Jahr leicht graphisch darstellen. So ist z. B. in Fig. 15 der Gang der Temperatur, welcher durchschnittlich in der letzten Woche des Juli täglich stattfand, construirt worden. Das Thermometer zeigte, von 12^h Nachts anfangend bis 12^h Nachts, zu je 2 Stunden durchschnittlich

13, 11, 11, 13, 15, 18, 21, 23, 23, 20, 17, 15, 13^0 Reaum.

Das Minimum trat um $3^1/_2{}^h$ Morgens ($10^1/_2{}^0$), das Maximum (24^0) Nachmittags um 3^h ein.

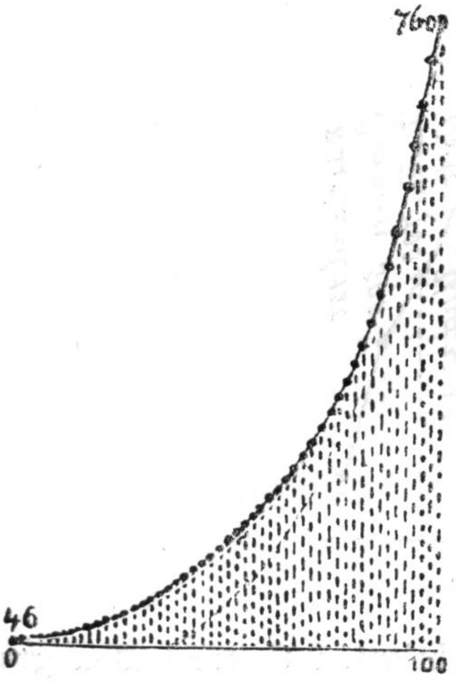


Fig. 14

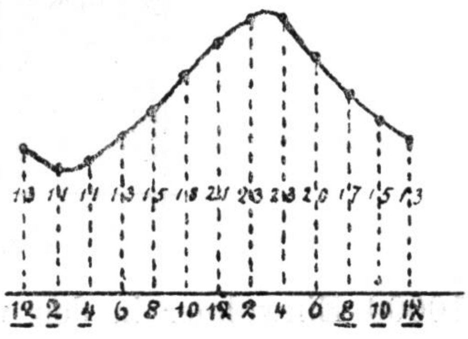


Fig. 15

Auf analoge Weise kann die Sterblichkeit einer Stadt als veränderlich mit der Jahreszeit dargestellt werden; ebenso der Verlauf einer Krankheit, die Intensität des Auftretens einer Epidemie, die Zahl der Eheschliessungen in den verschiedenen Jahren, die Fruchtpreise etc. etc.

Obgleich diese Darstellungen die Incorrectheit haben, dass die Lothe und ihre gegenseitigen Abstände nicht durch dasselbe Mass gemessen sind, d. h. gemessen werden können und man daher die Curven nach Belieben mehr oder weniger gestreckt zeichnen kann, indem man die Abstände der Lothe grösser oder kleiner wählt, so geben die Linien doch von dem Verlaufe der betreffenden Erscheinung ein übersichtliches Bild. Die in Fig. 14 und 15 dargestellten Grössen gingen *continuirlich* in einander über; es wird jedoch die graphische Darstellung vielfach auch bei *discontinuirlichen* Zahlwerthen angewendet, wie bereits einige angeführte Beispiele zeigen. So ist weiter in Fig. 16 die Zahl der Elementarschüler auf

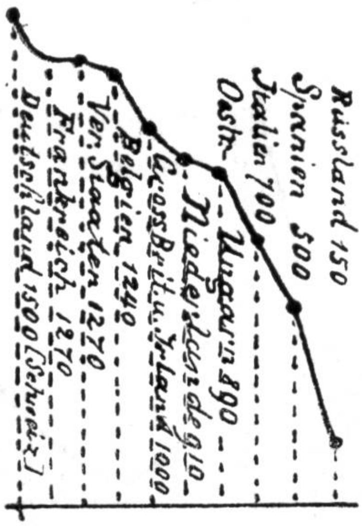


Fig. 16

je 10000 Einwohner in den wichtigsten Culturstaaten graphisch dargestellt.

Ein streng mathematisches Gesetz lässt sich in den meisten solchen Curven nicht auffinden; denn es fehlt der bestimmte functionelle Zusammenhang zwischen dem Lothe und seinem jeweiligen Abstande von einem auf der Horizontallinie gewählten Anfangspunkt.

Die streng wissenschaftlich mathematischen Gesetze der graphischen Statik lassen wir hier unerwähnt, da dieselben weniger der Naturwissenschaft als der Mathematik selbst zugehören.

So hätten wir denn endlich die oberste Sprosse in der Stufenfolge der Anwendungen der Mathematik in der Naturwissenschaft erklommen; ich bezeichne sie als den *Ausdruck des Naturgesetzes durch das Mittel der Analysis;* es ist, kurz gesagt, die Stufe der *mathematischen Physik.* — Nichts in der Natur geschieht gesetzlos. Alles ist vollkommen bestimmt; sagt ja schon das Buch der Weisheit: „Alles ist geordnet mit Mass, Zahl und Gewicht, und die Gesetze sind ohne Wandel.“ Damit ist schon klar dargelegt, dass die dadurch ausgesprochenen Naturgesetze nur *mathematisch aufgefasst* werden können. Die Natur, sagt Plato, übt immer Mathematik. In manchen Fällen ist es dem Forscher gelungen, der Natur die ganz bestimmte Function zwischen Ursache und Wirkung abzulauschen, und es wird, wie Gauss sagt, der Triumph der Wissenschaft sein, wenn es dereinst gelingt, das bunte Gewirr der Erscheinungen zu ordnen, die einzelnen Kräfte, von denen sie das zusammengesetzte Resultat sind, auseinander zu legen und einer jeden Sitz und Mass nachzuweisen. — So leitet die Astronomie, die bestausgebaute von den Naturwissenschaften, ihre Träger auf den beschwerlichen Pfaden langwieriger Rechnungen zur Entdeckung nie geschauter Planeten und Kometen; so erblicken wir jetzt Neptun am Himmel dank der Rechnungen zweier Mathematiker (Leverrier und Adams).

Als Grundlage dient der mathematischen Physik die analytische Mechanik, welche als eine Lehre von den Bewegungen im weitesten Sinne des Wortes betrachtet werden kann. Es lässt sich das Newton'sche Gravitationsgesetz, welches schon Anfangs citirt wurde, durch die Gleichung ausdrücken

$$P = \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \gamma$$

und in ähnlicher Weise viele andere Gesetze. Die stetige Wirkung der Kräfte, die diese und andere Bewegungen hervorbringen, lässt sich als eine Reihenfolge stossweise wirkender Kraftäusserungen begreifen und berechnen, welches Pulsiren der Naturkräfte selbst gleichsam ein Bild der in uns stets wechselnden Gedanken- und Vorstellungsreihen ist. Die von Descartes in das Studium der Curven und Flächen eingeführten analytischen Gleichungen oder, dass ich es kurz sage, die Lehren der analytischen Geometrie sind nicht bloss der Anwendung auf Geometrie und Mechanik fähig: ihre Anwendung erstreckt sich auch auf allgemeine Erscheinungen. Die Differentialgleichungen für die Verbreitung der Wärme drücken die allgemeinsten Bedingungen aus und führen die speciell physikalischen Fragen auf rein analytische Probleme zurück.

Verzeihen Sie meine Wortbrüchigkeit, wenn ich während der Besprechung dieser Stufe mich entschlossen habe, Ihnen noch eine *weitere* zwar nicht zu formuliren, aber doch, wenn auch nur schüchtern, für eine spätere Zeit in Aussicht zu stellen, nämlich die Anwendung der Mathematik auf die Lehre vom Menschen; ich denke hier keineswegs an die vielen schon erkannten Gesetze seines Bewegungs-Mechanismus,* nicht an einzelne Capitel der Physiologie, es müssten diese ja auf frühere Stufen verwiesen werden; ich denke vielmehr an den menschlichen Geist selber, an die Denkprocesse. Es darf hier nämlich nicht verschwiegen werden, dass Herbart und nach ihm Drobisch einen Versuch gemacht haben, die Mathematik auf Psychologie anzuwenden. Weiter hat im Jahr 1877 Dr. E. Schröder eine Schrift unter

* Siehe u. a. Meyer, Dr. Herm., Prof., Statik und Mechanik des menschlichen Fusses; Jena 1886.

dem Titel: „Der Operationskreis des Logikcalculs“ veröffentlicht, worin er eine durchaus elementare Methode entwickelt, die Probleme der deductiven Logik mittelst Rechnung zu lösen. Seit jener Zeit sind in dieser Richtung noch weitere Schritte gethan worden, besonders durch den Amerikaner S. Peirce. In nächster Zeit wird eine weitere, umfassendere bezügliche Schrift von Dr. E. Schröder erscheinen unter dem Titel: „Vorlesungen über die Algebra der Logik“ (exacte Logik). Doch ich begnüge mich hier damit, Ihnen diese Perspective eröffnet zu haben.

Es muss jedoch an dieser Stelle auch noch constatirt werden, dass die Geschichte von Männern berichtet, welche in verkehrter Weise das meiste Wissen gewaltsam zu mathematisiren versuchten.

Von den Beispielen hiefür, die Raabe in seinen Schriften anführt, will ich Ihnen zwei vorführen, welche auf Rechnung der im Anfang unseres Jahrhunderts sich breit machenden Naturphilosophie zu setzen sind:

1. „Es wurde der ganze Inhalt der Heilkunde in die „mathematische Formel $\sqrt[n]{(a^x)^n} = a^x$ zusammengefasst, womit „gesagt werden sollte, wenn die Arznei die Krankheit auf„hebt, so wird der Patient auf seinen Normalzustand vor der „Krankheit gebracht“, was jedenfalls auch ohne diese mathematische Formel begreiflich gewesen wäre.

2. Ein anderer Philosoph derselben Richtung erklärte die Existenz des vorhandenen moralischen Uebels wörtlich wie folgt: „Die Existenz des moralischen Uebels ist eine Folge „der Schiefe der Verhältnisse der uns umgebenden Dinge „zu uns selbst. Diese Schiefe der Verhältnisse aber ist eine „Folge der Schiefe der Ekliptik. Wenn einst in späterer

„Zeit bei vollendeterer Weltenentwicklung die Schiefe der „Ekliptik ihr Ende erreicht haben wird, dann wird mit ihr „die Schiefe unserer Ansichten oder das moralische Uebel „sein Ende erreichen."

II.

Lassen Sie uns jetzt zum zweiten, ungleich kleinern Theil unserer Erörterungen übergehen, nämlich zu den *Einflüssen der Naturwissenschaft auf die mathematischen Disciplinen.*

Da die Mathematik über die höchsten Fragen, die den Menschen hienieden interessiren, keine Auskunft zu geben vermag, so werden die Leistungen und Fortschritte derselben vielfach, ganz besonders in einigen deutschen Staaten, von den Vertretern eines durch lange Jahre gross gezogenen Schul-Philologenthums im Bewusstsein ihrer eigenen grossartigen Schöpfungen sehr geringschätzig angesehen. Ich erinnere Sie hier nochmals an den Göttinger Gelehrten Hollmannus, der auch als Experimentalphysiker solche Ansichten bis zur Entdeckung des fatalen Loches an seiner Luftpumpe theilte. So wurden auch in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von J. C. V. Hoffmann, folgende verbürgte Aeusserungen mitgetheilt: Ein Rector in Sachsen hiess in der Studienstunde einen Schüler die mathematische Arbeit weglegen mit den Worten: „Was für Barbarica treiben Sie da?" Ein anderer beehrte die Mathematik mit dem Titel „dummes Zeug" und ein dritter sehr schonungsvoll mit „Nebenfach". Aber auch anderwärts haben oft auch nur die ersten auf der Schule gelehrten Elemente der Mathematik es nicht vermocht, diese ganze Wissenssphäre vor dem Vorwurf der Trockenheit zu schützen, und in der That würde dieser Vorwurf nicht ganz unbegründet sein, wenn das, was gemeinhin unter Mathematik gewöhnlich verstanden wird, sie selbst auch wirklich wäre. Gerade da, auf der Stufe, wo die Jugend sich mit ihr zu befassen anfängt, muss die Mathematik mit dem Leben in Verbindung treten, mit den Verhältnissen in der Natur Fühlung behalten und nicht sich der auf dieser Stufe schon möglichen Anwendungen entschlagen. Die Naturwissenschaft liefert reichliches Material für zu ermittelnde Grössenbeziehungen, und so gewinnt unsere Wissenschaft gleich anfangs beim jugendlichen Geist an Interesse. Wir betonen also, dass eine nicht allzu weitgehende Anlehnung an die Verhältnisse in Natur und Technik geeignet sei, bei'm jugendlichen Geist Interesse für Mathematik zu erwecken.

Aber auch der gereifte Forscher wird durch Naturprobleme oft auf ganz neue Gesichtspunkte für seine Wissenschaft geführt. Das tiefeingehende Studium der Natur bildet sogar eine ergiebige Quelle für mathematische Entdeckungen, indem es ein Mittel ist für die Vervollkommnung der Analysis selbst und zur Auffindung derjenigen Grundlehren derselben, die vom erkenntnisstheoretischen Standpunkt aus am wichtigsten sind. So gehören z. B. die Gleichungen für die Bewegungen der Wärme, die für die Vibrationen tönender Körper etc. einem vor verhältnissmässig noch kurzer Zeit erschlossenen Gebiete der Analysis an.

Auch die Beschäftigung mit den Wahrscheinlichkeiten hat der Mathematik schon zu ganz ansehnlichen Leistungen Anlass gegeben. Sobald nämlich der Mathematiker sich an die Ergründung der Naturgesetze machte, mussten ihm zwei Umstände hindernd entgegentreten: 1. die Unzuverlässigkeit sinnlicher Wahrnehmungen und 2. die Unmöglichkeit einer wirklich absoluten Bestimmung von Zeit- und Raumgrössen. Mannigfaltig ist die Natur der Fehlerquellen, auf welche bei der Erwerbung von Kenntnissen Bedacht zu nehmen ist. Ganze Capitel, ja sogar selbständige Schriften sind schon erschienen über *Sinnestäuschungen*. Auch unser Gedächtniss wird zuweilen untreu, ja wir machen Rechnungsfehler; kurzum, wir dürfen auch hier sagen: „Es irrt der Mensch, so lang er strebt". Selbst die Wahrheit ist nicht immer zugleich wahrscheinlich, sonst hätte nicht Jahrhunderte lang das ptolemäische Weltsystem das herrschende sein können. Aber trotz all' dieser Irrthümer, über die wir nie hinauskommen können, liegt doch in den Wahrnehmungen, bezw. Erfahrungen ein Fünkchen Wahrheit. Wie weit nun dieses Körnlein von Wahrheit sich hat herausschälen lassen, das sucht die Wahrscheinlichkeits-Rechnung durch Zahlen darzustellen, wird ja doch das Verlangen nach Wahrheit, wo es möglich ist, durch Zahlen am vollständigsten gestillt. Die reine Mathematik hat hier als Einheit die absolute Gewissheit anerkannt, nach der die fragliche Grösse der Hoffnung des Eintretens eines von mehreren gleich möglichen Ereignisses, oder der kleinste Fehler, den man bei der Wahl eines aus Messungsresultaten berechneten Mittelwerthes gemacht hat, berechnet werden kann. Unsere Urtheile zeigen nach dieser Richtung hin die verschiedensten Grade innerer Ueberzeugung, welche zum Theil auch sprachlich zum Ausdrucke gebracht werden können. Vom Werthe Null ausgehend, führt uns die Zahlenreihe successive durch die verschiedensten Abstufungen bis zur vollendetsten Ueberzeugung, mit der wir von der Existenz des eigenen Ich reden.*

* Vergl. den Ausspruch von Descartes: „Ich denke, also bin ich."

Als Einflüsse der Naturwissenschaft auf die Mathematik hätten wir daher zu verzeichnen:

1. Die Naturwissenschaften sind im Stande, den ersten Unterricht in der Mathematik zu beleben und interessanter zu gestalten;
2. das gründliche Studium der Natur bildet eine Fundgrube für mathematische Entdeckungen.

Weitere Einflüsse weiss ich Ihnen einstweilen keine mehr zu nennen; denn die Mathematik hat sich schon zeitig vom Dienste der menschlichen Bedürftigkeit frei gemacht, hat sich losgerissen von der Erforschung der Himmelsräume und ihren eigentlichen Gegenstand in die ätherische Welt der Gedanken verlegt.

So wollen wir denn zum Schlusse noch der Vortheile und der veredelnden Einflüsse gedenken. welche das gleichzeitige Studium beider Kategorien von Wissenschaften gewährt. Viele derselben liegen auf der Hand. Es liegt die Zeit noch nicht allzu fern, in der ungewöhnliche Regengüsse oder sehr lange anhaltende Dürre, ein Komet mit sehr langem Schweife, die Verfinsterungen, Nordlichter, überhaupt ausserordentliche Erscheinungen als Zeichen des himmlischen Zorns angesehen wurden, heraufbeschworen durch die Verbrechen der Erde. Erzeugt es dagegen heute nicht ein wohlthuendes Gefühl der Sicherheit, wenn wir eine im Kalender angezeigte Sonnen- oder Mondsfinsterniss zur angegebenen Zeit sich pünktlich einstellen sehen? was so sicher zum Voraus bestimmt werden kann, dass ein Kaiser des himmlischen Reiches (China), nämlich Tschung-Khang, seine zwei Hofastronomen Hi und Ho, welche im Wohlleben die Berechnung der am 22. October 2137 v. Chr. eintretenden totalen

Sonnenfinsterniss versäumten, so dass sich also diese letztere unangemeldet einstellte, hinrichten liess.

Weichen nicht kindische Besorgnisse, wenn der vom Astronomen vorausgesagte Anzug eines in noch weitentfernten Himmelsräumen befindlichen Kometen durch Beobachtung sich bewahrheitet?* —

Wer in heutiger Zeit dahinlebt, ohne um die Erfolge der Mathematik oder die Resultate neuerer Naturforschung zu wissen, kann unmöglich die von ihnen beherrschte Gegenwart richtig verstehen, und dessen Leben gleicht dem eines fremden Wanderers in noch unbekannten Continenten.

„Wenn daher Hegel in einer Gymnasialrede sagen „durfte: „Wer die Werke der Alten nicht gekannt hat, „„hat gelebt, ohne die Schönheit zu kennen“, so dürfen „wir vielleicht mit mindestens eben so grossem Recht aus„rufen: Wer die Mathematik und die Resultate der neuern „Naturforschung nicht gekannt hat, hat gelebt, ohne die „Wahrheit zu kennen.“

Wie viele für den Menschen höchst nothwendige Kenntnisse sind durch glückliche Combination von Mathematik und Naturlehre gewonnen worden: Kenntnisse aus der Schifffahrtskunde, Geographie, Technik, Mechanik, Optik etc. „Wer gab,“ sagt Herrschel, „zuerst der Chirurgie die Kühn„heit, ein lebendiges Auge zu öffnen, um dem wegen zu grosser, „durch keine Linse aufzuhebender Erhabenheit der Hornhaut „Erblindeten wieder zum Lichte seiner Augen zu verhelfen? „War es nicht die zuvor durch die Mathematik erlangte Kennt„niss von den Gesetzen des Sehens?“

---

* Vergl. den von Halley und Clairaut angekündigten Durchgang eines Kometen für den Anfang des Jahres 1759.

Aber nicht bloss das Verständniss der Gegenwart und ihrer Cultur wird durch das gemeinsame Studium unserer Disciplinen ermöglicht, nicht bloss haben diese den Menschen gelehrt, die Bedürfnisse für das Leben auf eine seiner würdigere Weise zu befriedigen, sondern es liegt in beiden auch ein gleich begeisterndes Gefühl. Für die Naturforschung werden Sie, Verehrte, als Mitglieder einer naturwissenschaftlichen Gesellschaft, mir dies ohne weiteres zugeben, ansonsten ich Sie auf das Leben und die Werke Göthe's verweisen würde; dass aber auch die Mathematik in dieser Beziehung keineswegs zurücksteht, dafür zeugt z. B. schon ein diesbezügliches Gemälde von Rafael (Schule zu Athen). Als weiteren Beleg lassen Sie mich noch die eigenen Worte Fouriers, eines der grössten französischen Mathematiker, anführen. Er sagt nämlich: „Die Mathematik bildet sich „nur allmälig weiter, aber sie wächst und fusst mitten unter „den unaufhörlichen Schwankungen und den Irrthümern des „menschlichen Geistes. Ihr Attribut ist die Klarheit, sie „vereint getrennte Erscheinungen und entdeckt das geheime „Band, welches sie vereinigt. Wenn Luft und Licht und „die wogenden Erscheinungen der Elektricität und des Mag„netismus uns zu entfliehen scheinen, wenn die Körper fern „von uns in die Unermesslichkeit des Raumes gestellt sind, „wenn der Mensch das Schauspiel des Himmels verflossener „Jahrhunderte schauen und die Wirkungen der Schwere und „Wärme tief im ewig unzugänglichen Innern unsers Erd„balls erforschen will, dann ruft er die mathematische Analysis „zu seiner Hülfe herbei. Sie verkörpert den unfühlbaren „Stoff und fesselt die flüchtige Erscheinung, sie ruft die „Körper aus der Unendlichkeit des Himmels und erschliesst „uns das Innere der Erde. Sie scheint eine Kraft des mensch„lichen Geistes, die bestimmt ist, uns für die Unvollkommen-

„heit der Sinne und für die Kürze unsers Lebens zu entschä-„digen. Ja, was noch bewunderungswürdiger ist, sie befolgt „einen und denselben Gang im Studium dieser Erscheinun-„gen, sie erklärt alle durch dieselbe Sprache, fast als ob sie „die Einheit und Einfachheit im Plane des Weltalls bezeugen „wollte."

Anmerkung. Die in den Text eingestreuten Figuren waren ursprünglich in grösserem Masstabe auf Zeichnungs-Blätter gezeichnet und in den Conturen so gehalten, dass sie auch aus grösserer Entfernung noch erkannt werden konnten. Dies konnte aber nur auf Kosten der Genauigkeit geschehen, was der Leser gütigst entschuldigen wolle.