

**Zeitschrift:** bulletin.ch / Electrosuisse

**Herausgeber:** Electrosuisse

**Band:** 99 (2008)

**Heft:** 17

**Artikel:** Rastmomente in Synchronmotoren analytisch berechnen

**Autor:** Steinbrink, Jörn

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-855883>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 08.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Rastmomente in Synchronmotoren analytisch berechnen

## Unerwünschte Rastmomente bei permanentmagneterregten Synchronmotoren vorausbestimmen

Das Rastmoment und die Rüttelkraft bei permanentmagnet-erregten Maschinen lassen sich analytisch mit ausreichender Genauigkeit berechnen. So können Entwickler diese vorab beurteilen und allenfalls Massnahmen treffen. Die analytische Me-thode basiert auf der Drehfeldtheorie. Mittels konformer Abbil-dung wird die Luftspaltkontur erfasst und das resultierende Feldspektrum aus dem magnetischen Skalarpotenzial berech-net. Die Auswertung der Wechselwirkung jeweils zweier unter-schiedlicher Feldwellen macht es möglich, die Ursachen der Rastmomentanregung zu ermitteln und Gegenmassnahmen ein-zeln zu qualifizieren. Numerische Parameterstudien können so auf ein Minimum beschränkt werden. Das Berechnungsverfah-ren wurde anhand von Messungen an mehreren Versuchs-maschinen geprüft [1].

Ein wichtiges Auslegungskriterium ist die Drehmomentwelligkeit des Antriebs. Diese unterteilt sich nach dem Entstehungs-mechanismus des rotorpositionsabhängigen magnetischen Energieinhalts des Luft-spaltfeldes in ein lastabhängiges Pendel-moment und ein von der Last unabhängiges Rastmoment. Das Ziel, eine umfassende analytische Beschreibung des lastunab-hängigen Rastmoments anzugeben und deren Einflussgrößen detailliert zu erfas-sen, bedarf der exakten Berechnung des Luftspaltfeldes in seinen radialen und tan-

den. Erst durch oft aufwendige Parameter-studien lässt sich auf den physikalischen Zusammenhang der einzelnen Einfluss-größen zurückschliessen und die Wirk-samkeit einzelner Stellschrauben feststel-len. Das in dieser Arbeit beschriebene ana-

lytische Verfahren ermöglicht hingegen, gezielt die Wirkung einzelner Parameter freizustellen und damit deren Zweckmä-sigkeits, also das Verhältnis von Aufwand zu Wirkung, und deren Grenzen zu erkennen.

### Kräfte im Magnetfeld

Zur Berechnung der Kräfte im Magnet-feld stehen verschiedene Ansätze zur Ver-fügung. Allen Ansätzen gemeinsam ist die Auswertung der magnetischen Energie im Luftspalt. Der im Elektromaschinenbau übliche Weg der Berechnung der Kräfte durch Auswertung der räumlichen magnetischen Volumenkraftdichte [2] über das Luftspalt-volumen

$$F = \int_V f_V dV \\ = \int_V \left\{ S \times B - \frac{1}{2} H^2 \text{grad} \mu + \frac{1}{2} \text{grad} \left( H^2 \rho_S \frac{\partial \mu}{\partial \rho_S} \right) \right\} dV \quad (1)$$

erweist sich als übersichtlich. Ausserdem können die einzelnen Anteile mit den Be-zeichnungen Lorentz-, Reluktanz- und Magnetostriktionskraft anschaulich gedeutet werden. Mit Vernachlässigung der Ma-

Jörn Steinbrink

gentialen Komponenten. Die weitverbreitete Methode [3, 5], das Luftspaltfeld aus Strombelags- und Leitwertwellen unter An-nahme eines rein radialen Verlaufs zu er-mitteln, führt zu erheblichen Fehlern, da sich der tatsächliche Feldverlauf in der Um-gebung der Nutöffnung davon deutlich un-terscheidet. Die Berechnung des Luftspalt-feldes ist deshalb in seiner Gesamtheit not-wendig. Dazu steht die numerische Feld-berechnung zur Verfügung, die hier als Vergleichsnormal herangezogen wird. Mit numerischen Berechnungen kann aber nur das Gesamtergebnis des Zusammenwir-kens der Einflussgrößen festgestellt wer-

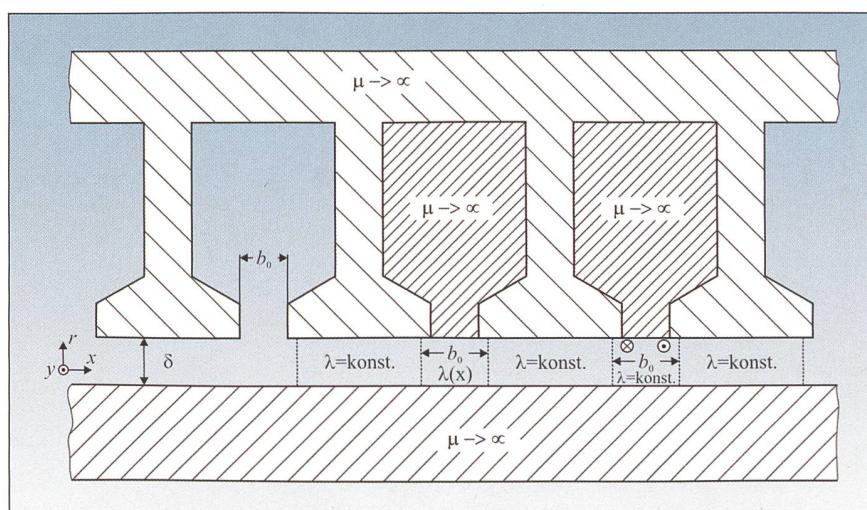


Bild 1 Ersatzanordnung einer realen Nut.

Links die reale Nut. Mitte: Korrekte Erfassung ausschliesslich der radialen Feldkomponenten durch Leitwert-schwankungen respektive Permeabilitätschwankungen bei glattem Luftspalt (tangentielle Feldkomponenten vernachlässigt). Rechts: Korrekte Erfassung der radialen und tangentialen Feldkomponenten durch fiktive Strombeläge über der Nutöffnung bei glattem Luftspalt konstanten Leitwerts.

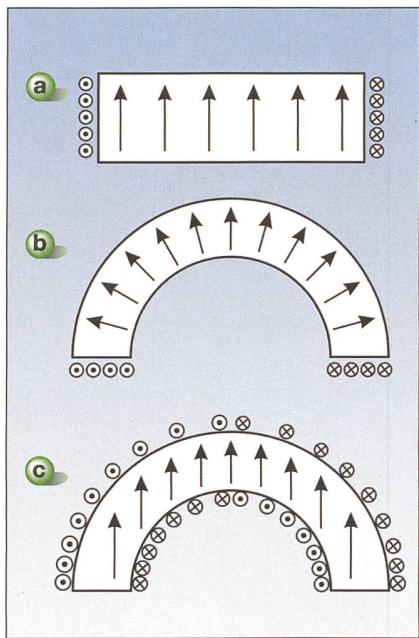


Bild 2 Ersatzstrombeläge verschiedener Magnetformen.

Mit paralleler (a), radialer (b) und diametraler (c) Orientierung.

gnetostriktionskraft und der hier nicht aufgeführten räumlichen elektrischen Kraftdichte vereinfacht sich die Berechnung weiter.

Unter Verwendung des Grenzwertes des Stromdichtevektors  $S$  bei verschwindender radialer Ausdehnung gelangt man zum Strombelag. Sind nur axiale und tangentielle Strombelagskomponenten vorhanden, folgt

$$a(x, y, t) = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} (s(x, y, t)) = \begin{pmatrix} a_r(x, y, t) \\ a_x(x, y, t) \\ a_y(x, y, t) \end{pmatrix} \quad (2)$$

Vernachlässigt man den Einfluss der Endbereiche und axiale Störungen wie Kühlslitze, treten im Luftvolumen nur radiale und tangentielle Komponenten des magnetischen Feldstärkevektors  $B$  auf:

$$b(x, y, t) = \begin{pmatrix} b_r(x, y, t) \\ b_x(x, y, t) \\ b_y(x, y, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_r(x, y, t) \\ b_x(x, y, t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Somit ergibt sich für den ersten Term der Volumenkraftdichte

$$f_{V,S}(x, y, t) = \begin{pmatrix} f_{V,S_r} \\ f_{V,S_x} \\ f_{V,S_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_y(x, y, t)b_x(x, y, t) \\ a_y(x, y, t)b_r(x, y, t) \\ -a_x(x, y, t)b_r(x, y, t) \end{pmatrix} \quad (4)$$

Aus Gleichung (4) erhält man für die Lorentzkraft, in die Richtungen separiert, den radialen Anteil

$$F_{S,r}(x, y, t) = - \int_V a_y(x, y, t) b_x(x, y, t) dV e_r \quad (5)$$

und den tangentialen Anteil

$$F_{S,x}(x, y, t) = - \int_V a_y(x, y, t) b_r(x, y, t) dV e_x \quad (6)$$

Existieren im Modell nur Strombeläge im Luftspalt aus der eingeprägten Durchflutung auf dem Radius  $R$  und keine Strombeläge zur Nachbildung der Nuten, vereinfacht sich die Gleichung (6) durch Integration über das Luftspaltvolumen infinitesimaler radialer Ausdehnung zu

$$F_{S,x}(x, y, t) = 2\pi R \int_0^{1/2\pi} \int_0^R a_y(x, y, t) b_r(x, y, t) dx dy e_x \quad (7)$$

Diese Darstellung wird allgemein zur Berechnung der Tangentialkraft in elektrischen Maschinen herangezogen. In Wirklichkeit liegen bei genutzten Maschinen die Leiter in einem nahezu feldfreien Raum, und die Kraft tritt als Reluktanzkraft an den Zahnflanken in tangentialer Richtung auf. Erst die Ersatzvorstellung mit Einführung eines an der Oberfläche der Nutöffnungen angeordneten Strombelags ermöglicht die Rechnung nach Gleichung (7), als Äquivalent zu der an den Zahnflanken angreifenden Zugkraft.

Die dritte Zeile von Gleichung (4) erlaubt die Berechnung der axialen Kraft durch Schrägung.

$$F_{S,y}(x, y, t) = - \int_V a_x(x, y, t) b_r(x, y, t) dV e_y \quad (8)$$

Die Kraftwirkung aus dem zweiten Term der Gleichung (1) hat ihre Ursache in einer

variablen Permeabilität und wird mit Reluktanzkraft bezeichnet.

$$f_{V,\mu}(x, y, t) = - \frac{1}{2} \left( h_r^2(x, y, t) + h_x^2(x, y, t) + h_y^2(x, y, t) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial r} \\ \frac{\partial \mu}{\partial x} \\ \frac{\partial \mu}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Mit Verlagerung der gesamten magnetischen Spannungsfälle der Eisenwege in den fiktiv vergrößerten Luftspalt ist ein Gradient der Permeabilität nur an den Grenzflächen von Luft und idealem Eisen vorhanden [4]. Vernachlässigt man wie bei der Lorentzkraft die axialen Feldkomponenten, folgt

$$h(x, y, t) = \begin{pmatrix} h_r(x, y, t) \\ h_x(x, y, t) \\ h_y(x, y, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_r(x, y, t) \\ h_x(x, y, t) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} b_r(x, y, t) \\ b_x(x, y, t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Wird weiter vorausgesetzt, dass die Permeabilität keine Abhängigkeit von der axialen Komponente besitzt, erhält man für die Kraftdichte

$$f_{V,\mu}(x, y, t) = - \frac{1}{2\mu_0^2} \left( b_r^2(x, y, t) + b_x^2(x, y, t) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial r} \\ \frac{\partial \mu}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Durch Integration über das Luftspaltvolumen folgt der Reluktanzkraftanteil in radialer Richtung

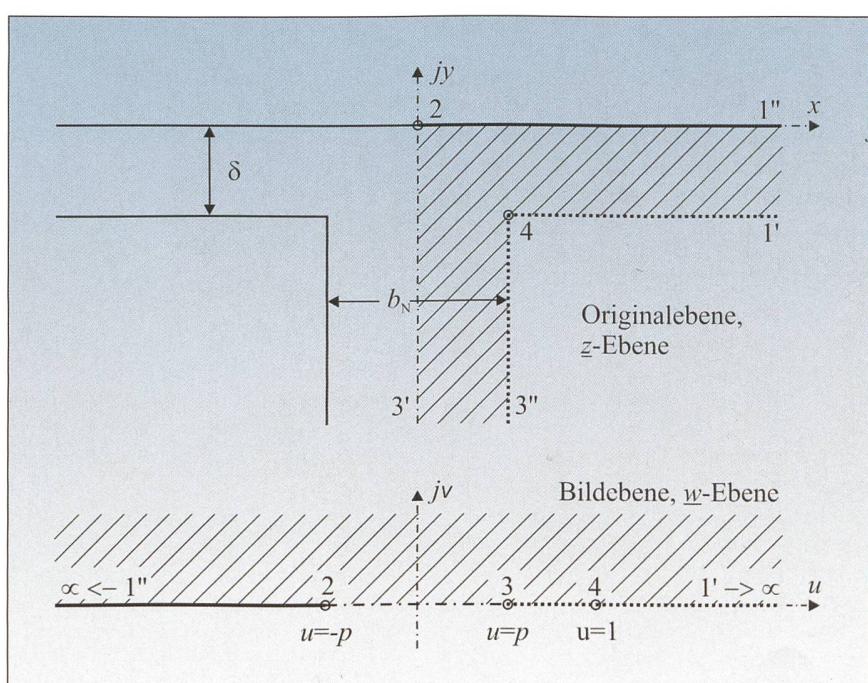


Bild 3 Konforme Abbildung einer halben Nut.

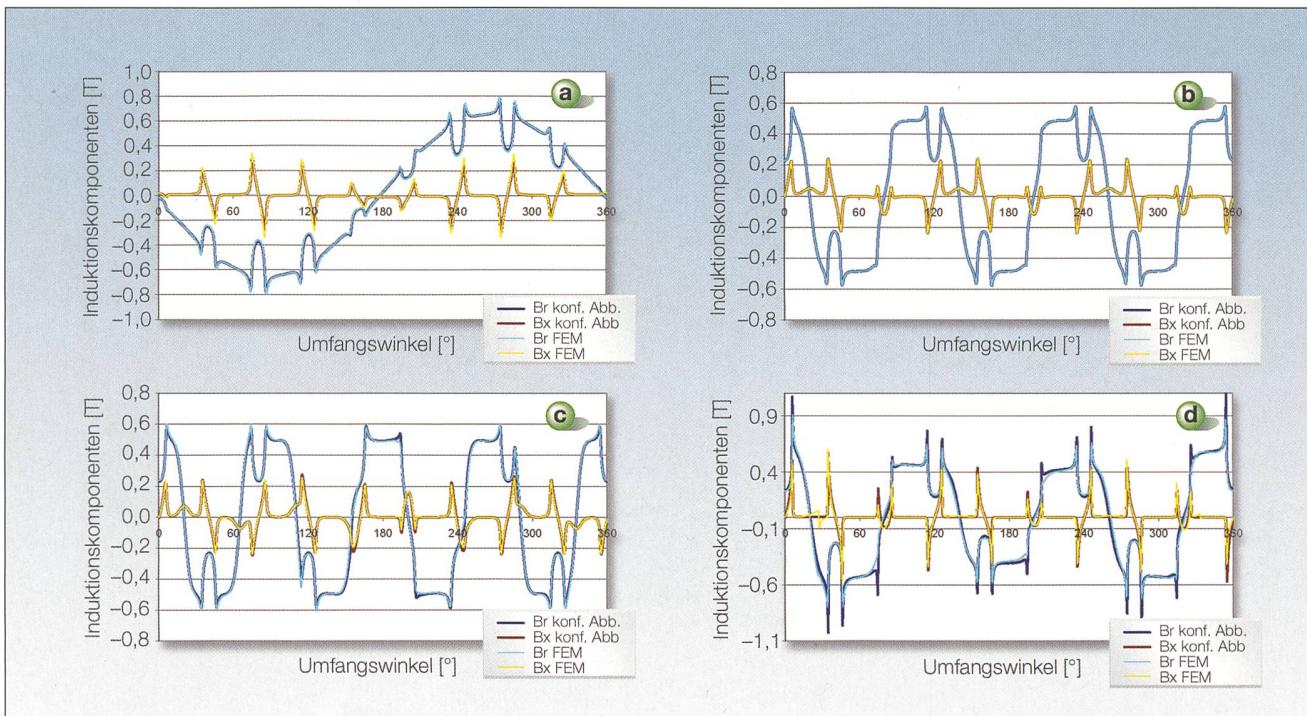


Bild 4 Vergleich der Komponenten der Luftspaltinduktion aus Berechnungen mittels konformer Abbildung und FEM.

(a) Bei eingeprägtem Strombelag mit  $p = 1$ , (b) unter Berücksichtigung der realen Magnetisierungsverteilung  $p = 3$ , (c) mit  $p = 4$  und (d) für  $p = 3$  und einer exzentrischen Verlagerung von  $\delta_e = 270 \mu\text{m}$ .

$$F_{\mu,r}(x, y, t) = -\frac{1}{2\mu_0} \int_V (b_r^2(x, y, t) + b_x^2(x, y, t)) \frac{\partial \mu}{\partial r} dV e_r \quad (12)$$

Wird dies unter Annahme unendlicher Permeabilität im Eisen für einen glatten Luftspalt, d.h.  $b_x(x, y, t) = 0$  an der Grenzfläche, angewandt, ergibt sich für die radiale Kraft [5]

$$F_{\mu,r}(x, y, t) = R I \int_0^{2\pi} \frac{b_r^2(x, y, t)}{2\mu_0} dx \quad (13)$$

Formuliert man die in tangentialer Richtung variierten Leitwerte um in eine in tangentialer Richtung veränderliche Permeabilität mit nunmehr konstanter radialer Ausdehnung  $\Delta r$ , wie in [3] ausgeführt und in Bild 1 mittig veranschaulicht, ergibt sich der Zusammenhang

$$\mu(x, y, t) = \Delta r \lambda(x, y, t) \quad (14)$$

Somit bestimmt sich der tangentiale Reluktanzkraftanteil zu

$$F_{\mu,x}(x, y, t) = -\frac{1}{2} \int_V \frac{b_r^2(x, y, t) + b_x^2(x, y, t)}{\mu^2(x, y, t)} \frac{\partial \mu(x, y, t)}{\partial x} dV e_x \quad (15)$$

In der Vernachlässigung der tangentialen Feldanteile im Ansatz nach Gleichung (14) zeigen sich die Grenzen dieser Modellvorstellung.

## Flächenkraftdichte

Wird dem elektromagnetischen Feld eine fiktive mechanische vektorielle Spannung  $\sigma$  zugeordnet, bestimmt sich die Kraft auf ein einfache zusammenhängendes, unbewegliches Objekt im Feld durch das Hüllintegral einer beliebigen Hüllkurve um das Objekt [4]. Das Volumenintegral der räumlichen Kraftdichte  $f_v$  (vgl. (1)) geht in die Divergenz des Maxwell'schen Spannungstensors

$$F = \int_V f_v dV = \int_V \nabla \cdot T dV = \oint_A T \cdot dA \quad (16)$$

über. Der Maxwellsche Spannungstensor lautet unter Vernachlässigung der Feldgrößen des elektrischen Feldes

$$T = B \otimes H - \frac{1}{2} \frac{HB}{2} \quad (17)$$

für homogene, lineare, isotrope Materialien, was wiederum die Vernachlässigung von Elektro- und Magnetostriktion bedeutet. Aus dem Tensor erhält man den Vektor der Flächenkraftdichte

$$f = T e_n = \mu H (H e_n) - \frac{1}{2} \mu H^2 e_n = \frac{B}{\mu} (B e_n) - \frac{1}{2\mu} B^2 e_n \quad (18)$$

mit dem Normalvektor  $e_n$  der Flächenelemente  $dA$  der Bilanzhülle. Die auf die Bi-

lanzhülle wirkende Kraft ist äquivalent der Summe aus Lorentz- und Reluktanzkraft.

Für die praktische Auswertung ist der Einschluss von Grenzflächen in der Bilanzhülle zu vermeiden, weil zusätzlich Grenzflächenkräfte in der Bilanz zu berücksichtigen wären. Deshalb wird eine Hüllfläche im Luftspalt, hier eine kreiszylindrische Luftspaltfläche, als Bilanzhülle verwendet. Aus Gleichung (18) folgt unter Vernachlässigung der axialen Feldkomponente der Flächenkraftdichtevektor

$$f(x, y, t) = \frac{1}{2\mu_0} \begin{pmatrix} b_r^2(x, y, t) - b_x^2(x, y, t) \\ 2b_r(x, y, t)b_x(x, y, t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Die erste Zeile von Gleichung (19) enthält die Radialzugwellen

$$\sigma_r(x, y, t) = \frac{b_r^2(x, y, t) - b_x^2(x, y, t)}{2\mu_0} \quad (20)$$

und die zweite Zeile die Tangentialzugwellen

$$\sigma_x(x, y, t) = \frac{b_r(x, y, t)b_x(x, y, t)}{\mu_0} \quad (21)$$

Im Falle einer Maschine mit glattem Luftspalt und idealen Eisen entstehen tangentialen Feldkomponenten nur durch die Existenz von Strombelägen in der Grenzschicht, welche eine sprunghafte Änderung der

## Motoren

Feldkomponente an Grenzflächen wider spiegelt [2].

$$h_x(x, y, t) = a_y(x, y, t) \quad (22)$$

Dies entspricht der allgemein benutzten Beziehung zur Berechnung der Tangential zugwellen respektive des Drehmoments für den praktischen Gebrauch [3, 5].

$$\sigma_x(x, y, t) = a_y(x, y, t) b_r(x, y, t) \quad (23)$$

Sofern das Integral der angreifenden Tangentialzugwellen längs des Umfangs auf beliebigem Luftspaltradius ungleich null ist, entsteht eine resultierende Tangentialkraft

$$\begin{aligned} F_x(y, t) &= \frac{1}{\mu_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R b_r(x, y, t) b_x(x, y, t) dy r dx \\ &= \frac{Rl}{\mu_0} \int_0^{2\pi} b_r(x, y, t) b_x(x, y, t) dx \end{aligned} \quad (24)$$

und hieraus ein Drehmoment. Das Integral kann nur dann ungleich null sein, wenn das Produkt der harmonischen Funktionen aus axialem Strombelag und radialem Induktionskomponente keine Abhängigkeit von der Umfangskoordinate mehr besitzt. Die mögliche zeitliche Abhängigkeit (Pendelmoment) kennzeichnet im Weiteren eine von null verschiedene Kreisfrequenz  $\omega$ .

### Drehmoment

Wird mit dem Ansatz über die Volumenkraftdichte gerechnet, ist zum Drehmomentanteil, der aus der Lorentzkraft (6) entsteht, noch der Anteil, der aus der Reluktanzkraft (15) entsteht, zu addieren und über das Luftspaltvolumen zu integrieren.

$$\begin{aligned} M(y, t) &= \int_V a_y(x, y, t) b_r(x, y, t) r dV + \\ &- \frac{1}{2} \int_V \frac{b_r^2(x, y, t) + b_x^2(x, y, t)}{\mu^2(x, y, t)} \frac{\partial \mu(x, y, t)}{\partial x} r dV \end{aligned} \quad (25)$$

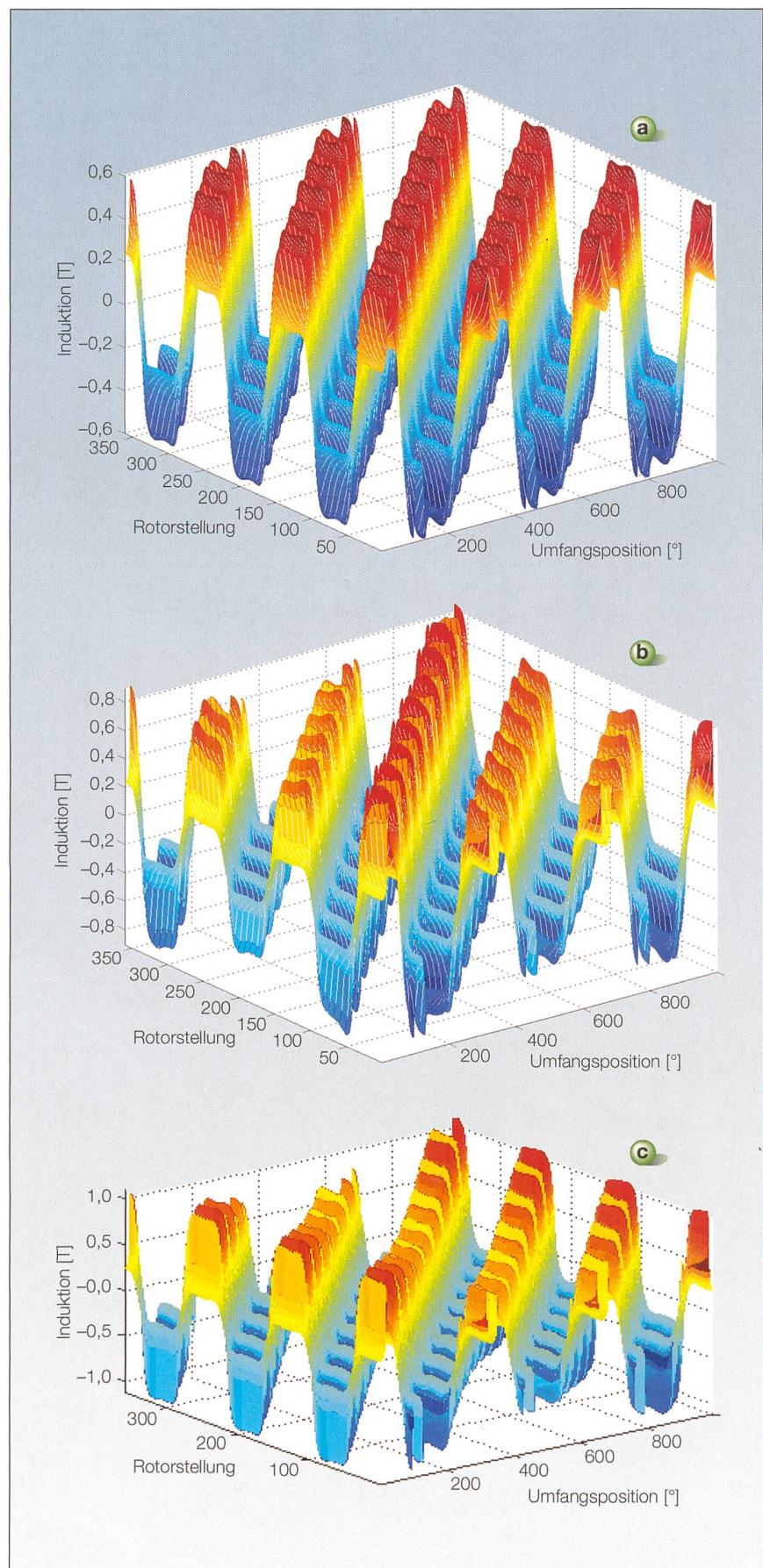
Mit dem Ansatz über die Flächenkraftdichte erhält man das Drehmoment aus der Tangentialkraft auf der zylindrischen Bilanzhülle durch Multiplikation mit dem Wirkradius  $R$  nach Gleichung (24).

$$M(y, t) = \frac{R}{\mu_0} \int_0^{2\pi} b_r(x, y, t) b_x(x, y, t) dx \quad (26)$$

Zur Berechnung des Drehmoments ist es also ausreichend, auf einem beliebigen Radius im Luftspalt die Komponenten des Magnetfeldes zu kennen.

### Die Drehfeldtheorie

Der Drehfeldtheorie [5, 7] liegt die Zerlegung der Strombeläge, des magnetischen Luftspaltleitwerts, der magnetischen Span-



**Bild 5** Feldverteilung in verschiedenen Rotorpositionen einer vollständigen Rotorumdrehung. Mit (a)  $p = 3$ , (b)  $p = 3$  und einer dynamischen Exzentrizität von  $\delta_e = 270 \mu\text{m}$  sowie (c)  $p = 3$  und einer statischen Exzentrizität von  $\delta_e = 270 \mu\text{m}$ .

nung des Luftspalts und der magnetischen Induktion des Luftspalts in unendliche Fourierreihen zugrunde. Durch einen Stromfluss in der räumlich verteilten Wicklung, der bei Stromrichterspeisung neben der Grundschiwingung mehrere Oberschwingungen  $\mu$  enthält, oder durch Permanentmagnete – mit äquivalenten Strömen ersetzt – wird ein Strombelag

$$a(x, t) = -\sum_v A_v \sin(vx - \omega_v t + \varphi_v) \quad (27)$$

mit den Ordnungszahlen und Frequenzen eines symmetrischen Statorstrombelags

$$v = p \left(1 + \frac{2m}{n} g\right) \wedge \quad (28)$$

$$f_v = f_1 \left(1 + 2mg_\mu\right) \forall g, g_\mu \in \mathbb{Z}$$

bzw. mit den Ordnungszahlen und Frequenzen eines mit der Drehzahl  $n$  drehenden, symmetrischen Permanentmagnetrotors

$$v = p(1+2g) \wedge \quad (29)$$

$$f_v = p(1+2g)n \quad \forall g \in \mathbb{N}_0$$

hervorgerufen. Die häufig unsymmetrischen Permanentmagnetrotoren enthalten weitere Ordnungszahlen im Spektrum. Durch Integration des Strombelags erhält man die Felderregung

$$v(x) = \int a(x) R dx + c(t) \quad (30)$$

Zusammen mit der harmonischen Reihe des Luftspaltleitwerts einer zentrisch gelagerten Maschine

$$\lambda(x, t) = \Lambda_0 + \sum_v \Lambda_v \cos(vx - \omega_v t + \varphi_v) \quad (31)$$

mit

$$v = g_1 N_1 + g_2 2p \wedge \quad (32)$$

$$f_v = g_2 2p n \quad \forall g_1 \in \mathbb{Z}_0, g_2 \in \mathbb{N}$$

generiert die Felderregung ein magnetisches Feld

$$b(x, t) = v(x, t) \lambda(x, t) \quad (33)$$

$$= \sum_v B_v \cos(vx - \omega_v t + \varphi_v)$$

das aus einer Grundwelle der Polpaarzahl  $p$  und einer unendlichen Anzahl von Oberfeldern besteht. Die Grundwelle bezeichnet diejenige Feldwelle, die zusammen mit der Grundwelle des Strombelags ein konstantes Drehmoment zur Folge hat. Zu den Oberfeldern im symmetrischen, ungestörten Betrieb treten im Fehlerfall (Exzentrizitäten, Wicklungsfehler, magnetische Unsymmetrien wie Polamplitudenfehler, Polbreitenfehler etc.) in den Strombelags- und/oder den Leitwertwellen weitere Komponenten auf.

## Permanentmagnete in der Drehfeldtheorie

Im homogenen Raum kann die Magnetisierung unter Anwendung des Biot-Savart'schen Gesetzes durch eine Stromdichte

$$S_M = \text{rot} M_H \quad (34)$$

und auf der Oberfläche durch einen Strombelag

$$A_M = \text{Rot} M_H = M_H \times e_n \quad (35)$$

erfasst werden [4]. Das heisst, die die atomaren bzw. molekularen Ströme beschreibende Magnetisierung ist formal durch eine Stromdichte im Inneren und einen Oberflächenstrombelag ersetzbar. Die eingeprägte Magnetisierung kann entsprechend Bild 2 unter der Voraussetzung einer überall im Magnet identischen Magnetisierungsspannweite durch an den Oberflächen angeordnete Strombeläge äquivalent ersetzt werden.

Für parallel orientierte quaderförmige Magnete, die oft in hoher Anzahl nebeneinander auf den Rotorblechkörper geklebt werden, kann unter der Voraussetzung unendlicher Permeabilität der Eisenwege das Strombelagsspektrum durch

$$A_{2v}(r) = \frac{1}{\Lambda_0 r} \frac{\mu_0 M_0}{\mu_{rec}} \frac{v}{v^2 - 1} \left( \frac{r}{R_M} \right)^{v-1} \left( 1 + \left( \frac{R_1}{r} \right)^{2v} \right) \quad (36)$$

$$\left( \frac{(v-1) R_M^{2v} + 2R_2^{v+1} R_M^{v-1} - (v+1) R_2^{2v}}{\frac{\mu_{rec} + 1}{\mu_{rec}} \left( R_1^{2v} - R_2^{2v} \right) - \frac{\mu_{rec} - 1}{\mu_{rec}} \left( R_M^{2v} - R_2^{2v} \left( \frac{R_2}{R_M} \right)^{2v} \right)} \right) \cos(vx_2)$$

mit

$$M_v = \frac{4}{\pi} \frac{p}{v} \frac{B_r}{\mu_0} \sin \left( \frac{v}{p} \frac{\pi}{2} \alpha_p \right) \quad (37)$$

ermittelt werden [8]. Hierin symbolisiert  $R_M$  den Außenradius des Permanentmagneten und  $\alpha_p$  den Polbedeckungsgrad.

Für Magnetringe liegt die Orientierungsverteilung mit der jeweiligen Magnetisierungsvorrichtung fest. Diese wird zweckmässigerweise gleich als äquivalenter Strombelag in Fourierreihen entwickelt.

## Luftspaltkontur konform abbilden

Zur Berücksichtigung des Nutungseinflusses im Luftspaltfeld bedient man sich am besten der konformen Abbildung und idealisiert die tatsächliche Nutgeometrie. Mit geringem mathematischem Aufwand ist das Problem nur mit den Annahmen einer unendlichen Permeabilität, unendlicher Nuttiefe und unendlicher Nutteilung lösbar. Werden die Nuttiefe und/oder die Nutteilung als endlich oder weitere Kontureinheiten erfasst, sind elliptische bzw. hyperelliptische Integrale zu lösen, wobei sich

das Ergebnis nur geringfügig von der idealisierten Problemstellung unterscheidet [9]. Durch die konforme Abbildung einer stromlosen Nut entsprechend Bild 3 erhält man die Lösung der Potenzialverteilung mit der komplexen Form des magnetischen Skalarpotenzials

$$\underline{\varphi}(\underline{w}) = \underline{\Psi} + j \frac{\Psi}{\pi} \text{arcosh} \frac{\underline{w}}{p} \quad (38)$$

im Bildbereich  $\underline{w}$ . Die Feldlinien sind Ellipsen und die Potenziallinien Hyperbeln um die Brennpunkte  $u = p$  und  $u = -p$  [10]. Hierin ist die Grösse  $p$  eine das Verhältnis Nutbreite zu Luftspaltlänge beschreibende reelle Konstante

$$p = \frac{2\delta^2}{2\delta^2 + b_N^2} \quad (39)$$

Die Lösung der konformen Abbildung einer in axialer Richtung stromdurchflossenen Nut lautet

$$\underline{\varphi}(\underline{w}) = -\underline{\Psi} - j \frac{\Psi}{\pi} \ln(\underline{w} - p) \quad (40)$$

im Bildbereich  $\underline{w}$ . Die Feldlinien sind Kreise um den Mittelpunkt  $u = p$ , von denen die Potenziallinien als Strahlen ausgehen. Mit ortabhängiger Überlagerung der Lösungen für eine stromlose und eine stromdurchflossene Nut ergibt sich die Gesamtlösung des Potenzials. Der gesuchte Feldstärkevektor folgt aus der negativen Gradientenbildung und anschliessender Transformation in den Originalbereich  $\underline{z}$

$$H(\underline{z}) = \begin{pmatrix} \text{Re} \left\{ -\frac{d\underline{\varphi}(\underline{w})}{d\underline{w}} \frac{d\underline{w}}{d\underline{z}} \right\} \\ \text{Im} \left\{ \frac{d\underline{\varphi}(\underline{w})}{d\underline{w}} \frac{d\underline{w}}{d\underline{z}} \right\} \end{pmatrix} \quad (41)$$

mit

$$\frac{d\underline{z}}{d\underline{w}} = \frac{\delta}{\pi(\underline{w} - p)} \sqrt{\frac{\underline{w} - 1}{\underline{w} + p}} \quad (42)$$

Wertet man die Abbildungsvorschrift

$$\underline{z} = \frac{\delta}{\pi} \left[ \ln \frac{1+R}{1-R} + \frac{b_N}{\delta} \arctan \left( R \frac{b_N}{2\delta} \right) \right] \quad (43)$$

mit

$$R = \sqrt{\frac{\underline{w} + p}{\underline{w} - 1}} \quad (44)$$

für die die Nutöffnung verschliessende Gerade

$$\underline{z} = x - j\delta \quad \forall 0 \leq x < \frac{b_N}{2} \quad (45)$$

aus, ergeben sich in Abhängigkeit von der Luftspaltlänge  $\delta$  Kurvenscharen in der komplexen Bildebene. Die Kurvenzüge können

## Motoren

nicht mehr geschlossen durch elementare Funktionen beschrieben werden und sind vorteilhafterweise gleich mithilfe von Näherungsverfahren diskret zu bestimmen. Die somit diskret berechneten Potenziale werden letztlich nach einer Splineinterpolation aufgrund der nicht äquidistanten Stützstellenverteilung durch Fourierreihen ausgedrückt.

### Vergleich analytisch – numerisch – Messung

Die Bilder 4 bis 7 sind für einen Motor mit 9 Nuten, einer Weite von 2,5 mm, 0,3 mm Luftspalt und 12,5 mm Bohrungsradius berechnet worden. Die gute Übereinstimmung der analytischen Vorausberechnung im Vergleich zur numerischen Berechnung belegt, dass die Vorgehensweise stimmt.

Dies zeigt sich für verschiedene Motorausführungen. In Bild 4a wird eine zweipolige Anordnung mit Einprägung eines einzelnen harmonischen Strombelags auf der Rotoroberfläche gerechnet. Dies entspricht einem unendlich dünnen, diametralen Magneten. Die Erfassung eines endlich dicken Magneten erfolgt durch Aufteilung in mehrere Schichten. Die Berücksichtigung der Orientierungsverteilung des Magneten geschieht durch eine unendliche Fourierreihe. Dieses Vorgehen bestätigt die Übereinstimmung in den Bildern 4b–d.

Im Weiteren wird der Einfluss von Fertigungstoleranzen untersucht. Bilder 5a–c zeigen dazu die Feldverteilung eines Motors bei einer vollständigen Drehung. Gut erkennbar ist der Einfluss der Exzentrizität auf lokale Maxima. Vergleicht man die Induktionsamplituden unter den einzelnen Polen

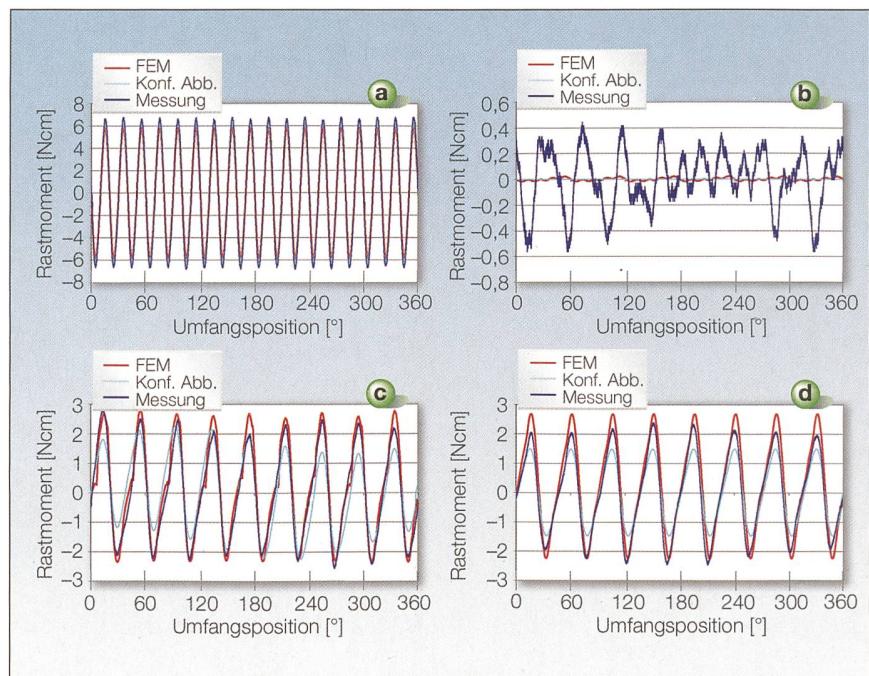


Bild 6 Vergleich des Rastmoments.

Mit (a)  $p = 3$ , (b)  $p = 4$ , (c)  $p = 4$  und eine dynamische Exzentrizität von  $\delta_e = 270 \mu\text{m}$ , (d)  $p = 4$  und eine statische Exzentrizität von  $\delta_e = 270 \mu\text{m}$ .

bei zentrischer Lage des Rotors mit denen in statischer bzw. dynamischer Rotorlage, offenbaren sich die signifikanten Änderungen.

### Rastmoment

Aus den zuvor bestimmten Induktionen leiten sich nach Gleichung (26) die Drehmomente ab. Im elektrischen Leerlauf wird das Magnetfeld ausschliesslich vom Permanentmagneten hervorgerufen, und das

Drehmoment wird als Rastmoment bezeichnet. Bilder 6a–d zeigen den Vergleich von numerischer und analytischer Berechnung mit Messungen an verschiedenen Motoren unter Berücksichtigung von Exzentrizitäten. Aus Bild 6b wird die Empfindlichkeit von theoretisch rastmomentarmen Anordnungen gegen geringste Fertigungstoleranzen sichtbar. Werden z.B. bewusst dynamische (Bild 6c) oder statische Exzentrizitäten (Bild 6d) im Labormuster eingestellt, wird dieser Einfluss korrekt erfasst.

### Rüttelkraft

Aus den Induktionskomponenten kann nach Gleichung (19) die radial wirkende resultierende Kraft bestimmt werden. Es ergibt sich nur eine allgemein mit Rüttelkraft bezeichnete Auflagerreaktion, wenn Radialzugwellen der Ordnungszahl 1 angeregt werden. Die Radialzugspannungen aller anderen Ordnungszahlen haben keine Auflagerreaktion zur Folge und sind in Abhängigkeit von der Steifigkeit der Blechpaketkörper die Ursache von magnetisch angeregten Verformungen, die sich wiederum in Magnetgeräuschen äussern. Das Vorhandensein einer Exzentrizität ist immer mit dem Vorhandensein einer Rüttelkraft, die dann einseitig magnetischer Zug genannt wird, verbunden, wie in Bild 7 zu sehen ist. Aber auch aus dem Zusammenwirken von Wicklungsfeldern mit anderen parametrischen Feldern können Rüttelkräfte entstehen, hier beispielsweise in zentrischer Po-

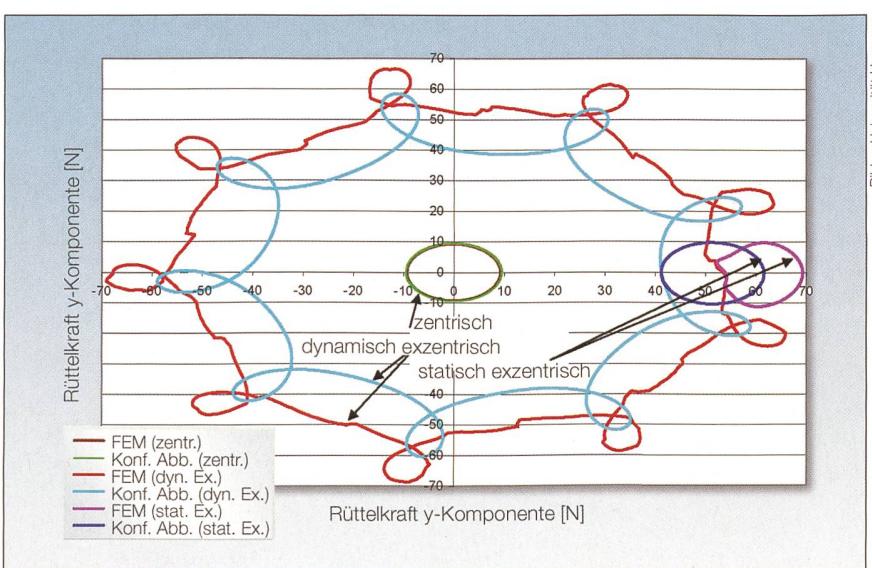


Bild 7 Vergleich der Rüttelkraft.

Mit  $p = 4$  in zentrischer Position sowie dynamischer bzw. statischer Exzentrizität von  $\delta_e = 270 \mu\text{m}$ .

sition aus dem Zusammenwirken mit Nutungsfeldern.

## Zusammenfassung

Diese Arbeit präsentiert eine Methode zur Bestimmung des Luftspaltfeldes von permanentmagnetenerregten Maschinen unter Berücksichtigung der Luftspaltkontur, insbesondere der Nutung. Aus dem Luftspaltfeld leitet sich das Maschinenverhalten wie auch das Rastmoment ab. Der Einfluss von Fertigungstoleranzen wird für verschiedene Auslegungsvarianten untersucht.

Anschliessend werden das analytisch bestimmte Drehmoment und die Rüttelkraft an der numerischen Berechnung und durchgeführten Messungen für eine Vielzahl von Motorvarianten unterschiedlicher Geometrie gespiegelt. Bei den Varianten, deren Rastmoment nicht aus Toleranzeflüssen, sondern aus dem Zusammenwirken von Wicklungs- und Nutungsfeldern generiert werden, zeigt sich eine gute quantitative Übereinstimmung. Bei den Varianten, deren Rastmoment ausschliesslich aus Toleranzeflüssen herrührt, stimmen die Verläufe qualitativ überein. Insgesamt belegen sämtliche Vergleiche der Berechnungen mit den Messungen die Richtigkeit des Berechnungsverfahrens.

## Referenzen

- [1] J. Steinbrink: Kraftwirkungen in permanentmagnetenerregten Maschinen. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 21, Nr. 370, Düsseldorf: VDI-Verlag, 2006.
- [2] K. Simonyi: Theoretische Elektrotechnik. Barth Verlagsgesellschaft, Heidelberg, 1993.

- [3] B. Ponick: Das Luftspaltmoment elektrischer Maschinen unter Berücksichtigung parametrischer Effekte. Electrical Engineering, Band 81 (1998), S. 291–296.
- [4] H. Haase, H. Garbe, H. Gerth: Grundlagen der Elektrotechnik. Schöneworth-Verlag, Hannover, 2004.
- [5] H. O. Seinsch: Oberfelderscheinungen in Drehfeldmaschinen. B. G. Teubner, Stuttgart, 1992.
- [6] F. Taegen, M. Weis: Über die Streuung im Luftspalt von Turbogeneratoren. ETZ-A, Band 88 (1967), S. 313–316.
- [7] B. Ponick: Fehlerdiagnose bei Synchronmaschinen. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 21, Nr. 174, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1995
- [8] Z. Q. Zhu et al.: Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanent magnet DC-motors, Part I: Open circuit field. IEEE Transactions on magnetics, Vol. 29, No. 1 (1993), S. 124–135
- [9] K. Frey: Anwendung der konformen Abbildung auf praktische Probleme des Elektromaschinenbaus. Arbeiten aus dem Elektrotechnischen Institut der Badischen Technischen Hochschule Fridericiana zu Karlsruhe, Band IV 1920–1924, Springer-Verlag, Berlin, 1925, S. 65–182.
- [10] E. Weber: Electromagnetic Fields. Volume I Mapping of Fields, John Wiley & Sons, New York, 1960.

## Angaben zum Autor

Dr. **Jörn Steinbrink** ist seit 1999 wissenschaftlicher Mitarbeiter und seit 2006 Oberingenieur am Institut für Antriebssysteme und Leistungselektronik der Leibniz-Universität Hannover. Leibniz-Universität Hannover, D-30167 Hannover, steinbrink@ial.uni-hannover.de

## Résumé

### Le calcul analytique des couples d'arrêt des moteurs synchrones

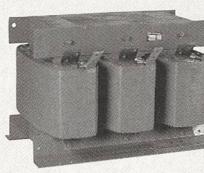
Prévision des couples d'arrêts indésirables des moteurs synchrones à excitation par aimant permanent. Le couple d'arrêt et la force de secousse des machines à excitation par aimant permanent peuvent se calculer de manière analytique avec une précision suffisante. Ainsi, les développeurs peuvent les évaluer d'avance et prendre des mesures éventuelles. La méthode analytique est basée sur la théorie des champs tournants. Le contour de l'entrefer est saisi par représentation conforme et le spectre de champ résultant calculé à partir du potentiel magnétique scalaire. L'évaluation de l'effet réciproque entre deux oscillations différentes de champ permet de déterminer les causes de l'excitation du couple d'arrêt et de qualifier individuellement des contre-mesures appropriées. Cela permet de réduire au minimum les études de paramètres numériques. Le procédé de calcul a été vérifié par des mesures effectuées lors d'essais sur plusieurs machines [1].

Suchen Sie eine Fachperson, die Ihre Drucksachen gestaltet und realisiert?

### VISUELLE GESTALTUNG : PIA THÜR

Hardturmstrasse 261, 8005 Zürich  
Tel 044 563 86 76, Fax 044 563 86 86  
piathuer@gmx.ch

## LEISTUNG ZU ERFOLG TRANSFORMIEREN



- optimiert
- vielseitig
- langfristig
- günstig

umfangreiches Programm  
kurze Lieferzeiten

Tel. 043 411 70 00, Fax 043 411 70 19  
mailbox@hubertrafo.ch

**HUBER**  
Transformatoren AG

[www.hubertrafo.ch](http://www.hubertrafo.ch)

# Verbinden und vergessen

**FRIEDL**



**FDM1**  
120 611 109



**FDM2**  
120 612 509

## Friedl-Muffen von Demelectric: kein Ausgiessen nötig!

- Schutzart IP68
- UV-, Erd- und Säurebeständig,
- bis 5 m unter Boden einsetzbar
- für Kabeldurchmesser von 6-71 mm

 **demelectric**

Generalvertretung für die Schweiz:

Demelectric AG, Steinhaldenstrasse 26, 8954 Geroldswil  
Telefon 043 455 44 00, Fax 043 455 44 11  
e-Mail: [info@demelectric.ch](mailto:info@demelectric.ch)

**e-Katalog: [www.demelectric.ch](http://www.demelectric.ch)**

**Bezug über den Grossisten. Verlangen Sie unseren Katalog.**

B92

cablecom service plus und cablecom digital home

## «Das digitale Plus ist typisch individuell»

Seit rund vier Jahren setzt die **graf.riedi ag**, eine der führenden Immobilien-Dienstleistungsunternehmen im Espace Mittelland, auf die partnerschaftliche Zusammenarbeit mit cablecom. Seither leitet Laurent Burri den Bereich **Bewirtschaftung** von **graf.riedi**. Zeit also für seine Meinung in Bezug auf **service plus** und **digital home**, den Versicherungen von cablecom für den Kabelanschluss.

«Typisch **graf.riedi** – so soll es nach den Vorgesetzten und Mitarbeitern heißen, wenn über die qualitativ hochstehenden Dienstleistungen in der administrativen wie auch der technischen Bewirtschaftung ihrer

rund 13 000 Objekten gesprochen wird. Und wohlwissend, dass jedes positive Echo hohe Professionalität und Innovationskraft voraussetzt, betont Laurent Burri: «Unsere Geschäftspartner müssen unsere Geschäftspolitik teilen. cablecom hat uns das mit ihren beiden Dienstleistungen auf eindrückliche Weise bewiesen.»

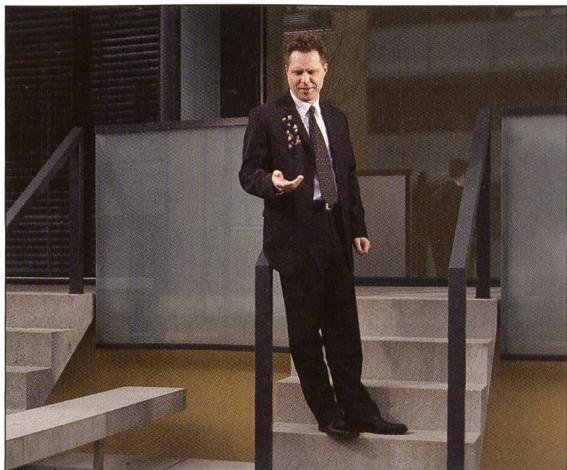
Mit **cablecom service plus** ist die Haussverteilanlage einer Immobilie immer bedürfnisgerecht auf dem neusten Stand der Technik und deren Funktionstüchtigkeit garantiert. Das erspart viel Zeit und unnötigen Ärger für alle Beteiligten. «Für uns bedeutet **service plus** vor allem eine unglaublich wertvolle Entlastung im administrativen Bereich», so Laurent Burri, und spricht damit genau auf die Leistung von **cablecom** an, die deshalb so gut ist, weil der Bewirtschafter gar nicht be-



merkt, dass ein Mieter sie beansprucht. Für nur zwei Franken pro Monat und Wohneinheit kann sich dieser bei Störungen nämlich direkt an **cablecom** wenden, 7 Tage die Woche, während 24 Stunden.

Dasselbe gilt auch für **digital home**, weil dasselbe Produkt, jedoch angeboten in den Partnernetzen von **cablecom**. «Es ist schön, sagen zu können, dass wir mit **cablecom** den Schritt in das multimediale Heute problemlos geschafft haben und für all die Möglichkeiten und individuellen Bedürfnisse von morgen gerüstet sind.» Wie stark individuell das digitale Angebot bereits ist, zeigt auch die Tatsache, dass die Installation von **hisppeed-Internet**, die Bedienung von **digital tv** oder **digital phone** für alle Benutzer ein Kinderspiel geworden ist. Irgendwie ist man fast gewillt zu sagen: «Typisch **cablecom**.»

Mehr Informationen über **cablecom service plus** gibt es unter Telefon 0800 99 56 22 oder unter [www.cablecom.ch/serviceplus](http://www.cablecom.ch/serviceplus); Informationen über **graf.riedi.immobilien**: [www.grafriedi.ch](http://www.grafriedi.ch)



«**cablecom service plus** schafft nicht nur die Basis für modernste Kommunikationstechnologien, sie gibt unseren Mieterinnen und Mietern auch die Möglichkeit des einfachen **Do-it-yourself**.» Laurent Burri, Abteilungsleiter Bereich Bewirtschaftung, **graf.riedi ag**, Bern

**graf.riedi**  
immobilien