

Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen = Bulletin de l'Association suisse des électriciens, de l'Association des entreprises électriques suisses

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen

Band: 90 (1999)

Heft: 3

Artikel: Entwurf robuster Regler mit der H-Methode

Autor: Geering, Hans P. / Roduner, Christian A.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-901912>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 04.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Entwurf robuster Regler mit der H_∞ -Methode

In diesem Aufsatz wird eine neuere, bewährte Methode für den Entwurf von Reglern vorgestellt, welche zu robusten Regelsystemen führt. Die H_∞ -Methode arbeitet mit Frequenzkennlinien (Amplitudengängen bei einschleifigen Regelkreisen, Singularwertverläufen bei Mehrgrössensystemen). Mit den beim Entwurf zu wählenden Frequenzkennlinien wird das Regelsystem so geformt, dass die spezifizierten Eigenschaften des Regelsystems (wie Bandbreite, Regelungsgüte im Passband, Resonanzüberhöhungen der Empfindlichkeit und der komplementären Empfindlichkeit sowie Robustheit gegen Modellierungsfehler im Sperrband) resultieren. Algorithmisch ist die H_∞ -Methode besonders einfach, indem lediglich zwei algebraische Matrix-Riccati-Gleichungen (z.B. mit Matlab) zu lösen sind.

Einleitung

Wir betrachten ein klassisches Regelsystem mit dem im Bild 1 dargestellten Signalflussbild.

Die Regelstrecke hat die Übertragungsfunktion $G_s(s)$ und das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) &= A_s x_s(t) + B_s u(t) \\ y(t) &= C_s x_s(t) + D_s u(t) \end{aligned} \quad (1)$$

Die Spezifikationen für das robuste Regelsystem werden durch Anforderungen an die Bandbreite ω_c und an die Amplitudengänge der Empfindlichkeit $S(s)$ und der komplementären Empfindlichkeit $T(s)$ ausgedrückt:

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_s(s)K(s)} \quad T(s) = \frac{G_s(s)K(s)}{1 + G_s(s)K(s)} \quad (2)$$

Dabei bezeichnen wir als Bandbreite ω_c die Durchtrittsfrequenz der Kreisverstärkung $L(s) = G_s(s) \cdot K(s)$ oder der Empfindlichkeit; $|L(j\omega_c)| = 1$ oder $|S(j\omega_c)| = 1$.

Die H_∞ -Methode

Übersicht

Beim Entwurf eines robusten Reglers mit der H_∞ -Methode ergänzen wir das Signalflussbild des Regelsystems (Bild 1) entsprechend einem frei wählbaren «Gewichtungsschema». Dabei erhält das erweiterte Regelsystem einen neuen fiktiven Eingangsvektor w und einen neuen fiktiven Ausgangsvektor z .

Das Gewichtungsschema wird so gewählt, dass die interessierenden Größen, zum Beispiel die Empfindlichkeit $S(s)$ und die komplementäre Empfindlichkeit $T(s)$, multipliziert mit frei wählbaren Gewichtungen $W_\cdot(s)$ in der Übertragungsmatrix $T_{zw}(s)$ auftreten.

Die Frequenzkennlinien der Gewichtungen werden so gewählt, dass die Spezifikationen für das Regelsystem mit dem als Lösung resultierenden H_∞ -Regler erfüllt werden.

Die nachfolgenden Abschnitte erläutern die H_∞ -Methode am Beispiel des sehr populären $S/KS/T$ -Gewichtungsschemas.

Systemerweiterung, Gewichtungsschema

Das Gewichtungsschema des im Bild 2 gezeigten erweiterten Regelsystems wird $S/KS/T$ -Gewichtungsschema genannt, weil in der Übertragungsmatrix $T_{zw}(s)$ die mit $W_e(s)$, $W_u(s)$ und $W_y(s)$ gewichteten Größen $S(s)$, $K(s)S(s)$ bzw. $T(s)$ auftreten:

$$T_{zw}(s) = \begin{bmatrix} W_e(s)S(s) \\ W_u(s)KS(s) \\ W_y(s)T(s) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Wahl der Gewichtungen

Der Algorithmus der H_∞ -Methode versucht, das Problem zu lösen, die H_∞ -Norm der Übertragungsmatrix $T_{zw}(s)$ unter den frei wählbaren, positiven Wert γ zu drücken:

$$\|T_{zw}(S)\|_\infty \leq \gamma \quad (4)$$

Falls dieses Problem eine Lösung hat, gelten für die Amplitudengänge der drei Komponenten der Matrix $T_{zw}(j\omega)$ die folgenden Ungleichungen:

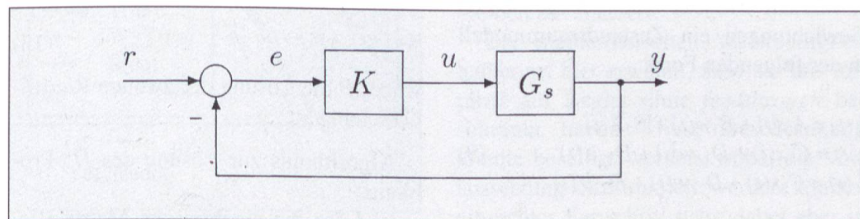


Bild 1 Signalflussbild des Regelsystems

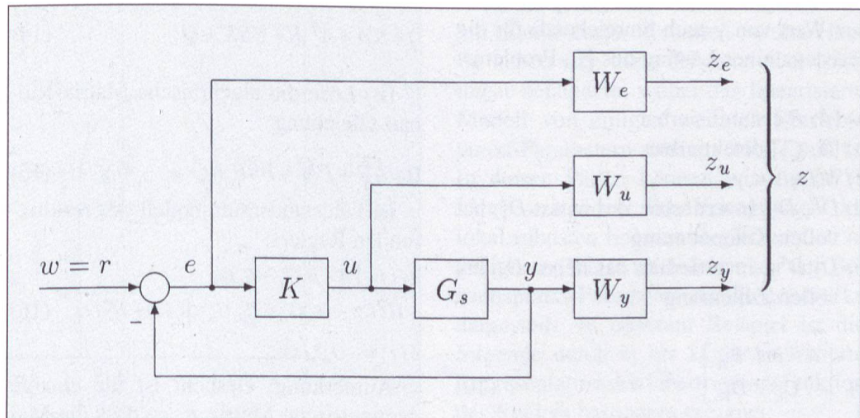


Bild 2 Standard-S/KS/T-Gewichtungsschema

$$\begin{aligned} |W_e(j\omega)S(j\omega)| &\leq \gamma \text{ f\"ur alle } \omega \\ |W_u(j\omega)K(j\omega)S(j\omega)| &\leq \gamma \text{ f\"ur alle } \omega \\ |W_y(j\omega)T(j\omega)| &\leq \gamma \text{ f\"ur alle } \omega \end{aligned} \quad (5)$$

Als Standardwert verwenden wir $\gamma = 1$. Als Gewichtungen w\u00e4hlen wir aufgrund der Spezifikationen f\u00fcr das Regelsystem

$$\begin{aligned} W_e(s) &= \frac{1}{\hat{S}(s)}, \quad W_u(s) = \frac{1}{\hat{R}(s)} \\ \text{und } W_y(s) &= \frac{1}{\hat{T}(s)} \end{aligned} \quad (6)$$

wobei die Amplitudeng\u00e4nge

$$|\hat{S}(j\omega)|, |\hat{R}(j\omega)| \text{ und } |\hat{T}(j\omega)| \quad (7)$$

bei allen Frequenzen $\omega=0 \dots \infty$ obere Schranken f\u00fcr die entsprechenden Gr\u00f6ssen des resultierenden Regelsystems darstellen:

$$\begin{aligned} |S(j\omega)| &\leq |\hat{S}(j\omega)| \text{ f\"ur alle } \omega \\ |K(j\omega)S(j\omega)| &\leq |\hat{K}(j\omega)| \text{ f\"ur alle } \omega \\ |T(j\omega)| &\leq |\hat{T}(j\omega)| \text{ f\"ur alle } \omega \end{aligned} \quad (8)$$

Durch geeignete Wahl dieser drei Schranken k\u00f6nnen wir erreichen, dass alle einleitend erw\u00e4hnten Anforderungen an das Regelsystem erf\u00fcllt werden.

L\u00f6sen des abstrakten H_∞ -Problems

Aus Bild 2 abstrahieren wir das allgemeine Grob-Signalflossbild des erweiterten Regelsystems des H_∞ -Problems gem\u00e4ss Bild 3. Der messbare Ausgang \tilde{y} der erweiterten Strecke entspricht in unserem Fall der Regelabweichung e , ihr beeinflussbarer Eingang \tilde{u} der Stellgr\u00f6sse u .

F\u00fcr die erweiterte Regelstrecke ermitteln wir aufgrund des in der Einleitung erw\u00e4hnten Modells und der gew\u00e4hlten Gewichtungen ein Zustandsraummodell in der folgenden Form:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t) + B_2\tilde{u}(t) \\ z(t) &= C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) &= C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}\tilde{u}(t) \end{aligned} \quad (9)$$

Die folgenden Voraussetzungen sind notwendig (und f\u00fcr einen gen\u00fcgend grossen Wert von γ auch hinreichend) f\u00fcr die Existenz einer L\u00f6sung des H_∞ -Problems:

- a) $[A, B_2]$ stabilisierbar
- b) $[A, C_2]$ detektierbar
- c) $\sigma(D_{11}) < \gamma$
- d) $D_{12}^T D_{12}$ invertierbar, das heisst D_{12} hat vollen Spaltenrang
- e) $D_{21} D_{21}^T$ invertierbar, das heisst D_{21} hat vollen Zeilenrang

$$f) \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \quad (10)$$

hat vollen Spaltenrang f\u00fcr alle ω .

$$g) \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \quad (11)$$

hat vollen Zeilenrang f\u00fcr alle ω .

Dabei sind a) und b) Eigenschaften der Regelstrecke, und c) bis g) k\u00f6nnen durch geeignete Wahl der Struktur des Gewichtungsschemas und der Gewichtungen stets erf\u00fcllt werden.

Um den Algorithmus der H_∞ -Methode in kompakter Weise anschreiben zu k\u00f6nnen, f\u00fchren wir die folgenden Substitutionen ein:

$$\begin{aligned} B &= [B_1 \ B_2] \\ D_* &= [D_{11} \ D_{12}] \\ \bar{R} &= \begin{bmatrix} D_{11}^T D_{11} - \gamma^2 I & D_{11}^T D_{12} \\ D_{12}^T D_{11} & D_{12}^T D_{12} \end{bmatrix} \\ \bar{S} &= \bar{B} \bar{R}^{-1} B^T \\ \bar{A} &= A - \bar{B} \bar{R}^{-1} D_*^T C_1 \\ \bar{Q} &= C_1^T C_1 - C_1^T D_* \bar{R}^{-1} D_*^T C_1 \\ G &= \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \bar{R}^{-1} (B^T K + D_*^T C_1) \end{aligned} \quad (12)$$

wobei K die L\u00f6sung der ersten Riccati-Gleichung ist

$$\begin{aligned} \hat{R} &= I - \frac{1}{\gamma^2} D_{11}^T D_{11} \\ \bar{R} &= D_{21} \hat{R}^{-1} D_{21}^T \\ \bar{C} &= C_2 - D_{21} G_1 + \frac{1}{\gamma^2} D_{21} \hat{R}^{-1} D_{11}^T D_{12} G_2 \\ \bar{S} &= \bar{C}^T \bar{R}^{-1} \bar{C} \\ &\quad - \frac{1}{\gamma^2} G_2^T D_{12}^T D_{12} G_2 - \frac{1}{\gamma^4} G_2^T D_{12}^T D_{11} \hat{R}^{-1} D_{11}^T D_{12} G_2 \\ \bar{A} &= A - B_1 G_1 + \frac{1}{\gamma^2} B_1 \hat{R}^{-1} D_{11}^T D_{12} G_2 - B_1 \hat{R}^{-1} D_{11}^T \bar{R}^{-1} \bar{C} \\ \bar{Q} &= B_1 \hat{R}^{-1} B_1^T - B_1 \hat{R}^{-1} D_{11}^T \bar{R}^{-1} D_{21} \hat{R}^{-1} B_1^T \\ H &= [P \bar{C}^T + B_1 \hat{R}^{-1} D_{21}^T] \bar{R}^{-1} \end{aligned} \quad (13)$$

wobei P die L\u00f6sung der zweiten Riccati-Gleichung ist.

Algorithmus zur L\u00f6sung des H_∞ -Problems:

- (i) L\u00f6se die algebraische Matrix-Riccati-Gleichung

$$0 = K\bar{A} + \bar{A}^T K - K\bar{S}K + \bar{Q} \quad (14)$$

- (ii) L\u00f6se die algebraische Matrix-Riccati-Gleichung

$$0 = \bar{A}P + P\bar{A}^T - P\bar{S}P + \bar{Q} \quad (15)$$

- (iii) Zustandsraummodell des resultierenden Reglers:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= [A - B_1 G_1 - B_2 G_2 \\ &\quad - H(C_2 - D_{21} G_1 - D_{22} G_2)] \xi(t) + H\tilde{y}(t) \\ \tilde{u}(t) &= -G_2 \xi(t) \end{aligned} \quad (16)$$

Anmerkung: Gesucht ist die einzige symmetrische Matrix K , so dass die Matrix $\bar{A} - \bar{S}K$ eine Stabilit\u00e4tsmatrix ist, bzw.

P , so dass die Matrix $\bar{A} - P\bar{S}$ eine Stabilit\u00e4tsmatrix ist. (Matlab liefert automatisch die richtigen L\u00f6sungen.) Die Matrizen K und P sind positiv-semidefinit, falls das H_∞ -Problem eine L\u00f6sung hat.

Ordnungsreduktion und Balancierung

Aufgrund der Systemerweiterungen f\u00fcr den Entwurf des H_∞ -Reglers resultieren im Regler im allgemeinen einige Modi, die f\u00fcr das Eingangs-Ausgangs-Verhalten des Reglers praktisch kaum relevant sind. Die Ordnung des Reglers kann dann entsprechend reduziert werden. Dies kann mit dem Algorithmus von Moore erfolgen [1, Kap. 2.8], [2, Kap. 6.4]. Die Ordnung wird schrittweise so lange reduziert, als keine «sp\u00fcrbare» Verschlechterung des Regelsystems eintritt (Empfindlichkeit, komplement\u00e4re Empfindlichkeit, Nyquist-Kurve, Sprungantwort).

Bei der Balancierung geht es darum, ein Zustandsraummodell des Reglers zu erhalten, das numerisch m\u00f6glichst gut konditioniert ist. Der obengenannte Algorithmus von Moore liefert dies als Nebenprodukt. Alternativ kann die resultierende \u00dcbertragungsfunktion des Reglers mit einem Zustandsraummodell realisiert werden, das aufgrund einer besonderen, physikalisch sinnvollen Struktur inh\u00e4rent numerisch problemlos ist [5].

Umsetzung auf digitale Regelung

Im allgemeinen werden wir den Regler mit einem Digitalrechner realisieren. F\u00fcr die Umsetzung des erhaltenen zeitkontinuierlichen Reglers in einen entsprechenden zeitdiskreten eignet sich die Methode der bilinearen Transformation [1, Kap. 2.9.3] am besten.

Anwendungsbeispiel

Die Regelstrecke besteht aus der Serie-schaltung eines Tiefpasses 1. Ordnung und einer Totzeit:

$$G_s(s) = \frac{e^{-sT}}{1 + s\tau} \text{ mit } T = 0,28s, \tau = 0,19s \quad (17)$$

Forderungen f\u00fcr den Reglerentwurf:

- a) Durchtrittsfrequenz der Empfindlichkeit: $\omega_c \approx 2$ rad/s. (Bei dieser Kreisfrequenz hat die Totzeit eine Phase von $-\omega_c T = -\pi/6$.)
- b) Station\u00e4rer Nachlauffehler der Sprungantwort $\leq 1\%$ ($\Rightarrow S(0) \leq 0,01$)
- c) Robustheit

Adresse der Autoren

Prof. Dr. Hans P. Geering, Dr. Christian A. Roduner, Institut f\u00fcr Mess- und Regeltechnik, ETHZ, 8092 Z\u00fcrich
E-Mail geering@imrt.mavt.ethz.ch

Wir wählen das Standard *S/KS/T*-Gewichtungsschema gemäss Bild 2 mit den Gewichtungen: W_e als Tiefpass 1. Ordnung mit dem statischen Übertragungsfaktor W_{e0} und der Durchtrittsfrequenz ω_0 , W_u klein und konstant, um die obige Voraussetzung d) strukturell bereits zu erfüllen, und W_y im wesentlichen als PD-Element mit dem statischen Übertragungsfaktor W_{y0} und der Durchtrittsfrequenz ω_1 .

$$W_e(s) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_0} + 1} \text{ mit } W_{e0} = 100,$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{6T} \text{ rad/s}$$

$$W_u(s) \equiv 10^{-4}$$

$$W_y(s) = \frac{s + W_{y0}}{\varepsilon s + 1} \text{ mit } W_{y0} = \frac{2}{3}, \omega_1 = 10\omega_0,$$

$$\varepsilon = 10^{-4} \text{ s/rad}$$

Da wir für den Reglerentwurf ein Streckenmodell endlicher Ordnung benötigen, approximieren wir G_s mittels eines Padé-Allpass-Elements der Ordnung k [2]. Die letztere bestimmen wir so, dass die Kreisfrequenz mit einem Phasen-Approximationsfehler von etwa $\pi/6$ bei $3\omega_1$ liegt:

$$(18) \quad k \frac{2}{T} \geq 3\omega_1 \Rightarrow k = \lceil 1.5\omega_1 T \rceil = 8 \quad (19)$$

Für die erweiterte Regelstrecke 11. Ordnung resultiert aus dem H_∞ -Algorithmus

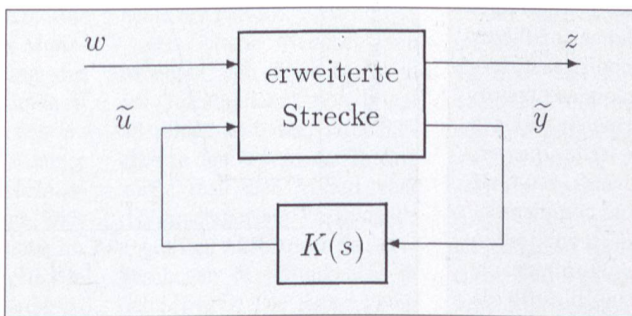


Bild 3 Signalflussbild des H_∞ -Regelsystems

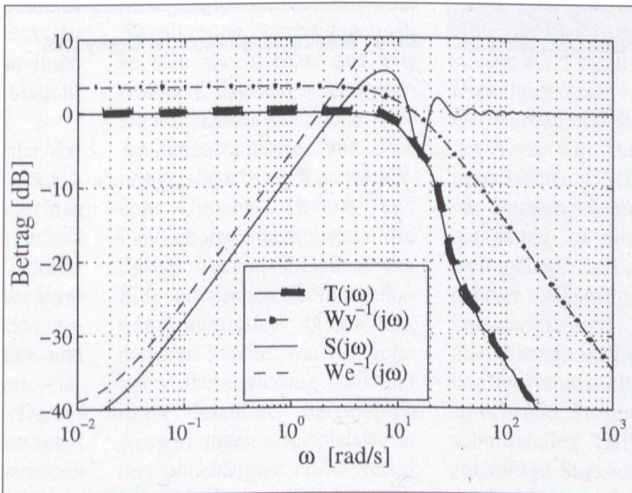


Bild 4 Frequenzkennlinien des Regelsystems

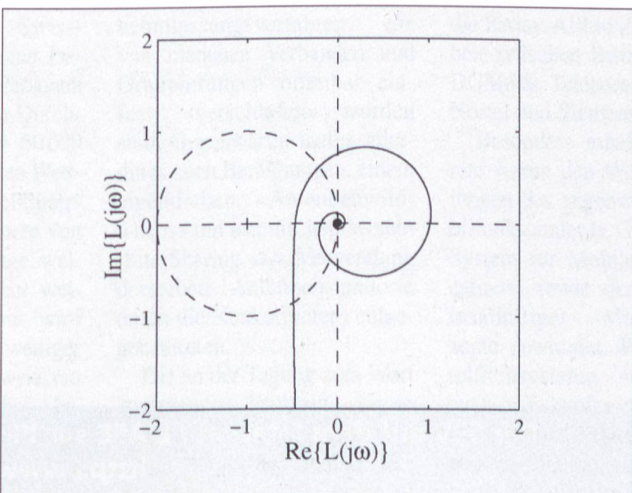


Bild 5 Nyquistkurve des Regelsystems

mus ein robuster Regler 11. Ordnung. Es zeigt sich, dass die Ordnung dieses Reglers mit dem Algorithmus von Moore praktisch ungestraft auf 3 reduziert werden kann. Der reduzierte Regler hat das Zustandsraummodell

$$\dot{\xi}(t) = \begin{bmatrix} 0,253 & 3,590 & 2,395 \\ -3,262 & 0,832 & 20,952 \\ -1,328 & -11,607 & -5,007 \end{bmatrix} \xi(t) + \begin{bmatrix} -0,829 \\ 1,219 \\ -1,8480 \end{bmatrix} e(t) \quad (20)$$

$$u(t) = [-0,808 \quad -0,390 \quad -6,711] \xi(t) + 0,376 e(t)$$

Die Eigenschaften des zeitkontinuierlichen Regelsystems werden mit den folgenden drei Bildern visualisiert: Bild 4 zeigt die Amplitudengänge der Empfindlichkeit und der komplementären Empfindlichkeit sowie deren Entwurfsschranken. In Bild 5 ist die Nyquistkurve $L(j\omega) = G_s(j\omega) \cdot K(j\omega)$ des aufgeschnittenen Regelkreises und in Bild 6 die Einheitssprungantwort des Regelsystems dargestellt.

Schlussbemerkungen

In diesem Aufsatz haben wir die H_∞ -Methode zum Entwurf eines robusten Reglers für einen einschleifigen Regelkreis diskutiert. Die Methode verallgemeinert sich in trivialer Weise auf den Mehrgrössenfall: Anstelle der Amplitudengänge treten die Singularwertverläufe [1, Kap. 2.3]; aber die im Abschnitt «Die H_∞ -Methode» angegebenen Gleichungen bleiben unverändert.

Der mathematischen Vollständigkeit halber sei hier erwähnt, dass wir uns implizit auf Regler ohne *feedthrough* beschränkt haben. Diese Beschränkung könnte beseitigt werden, wobei die Voraussetzung c) eliminiert werden könnte; ein echter Fortschritt wäre dabei aber in der Praxis nicht zu verzeichnen.

In der Praxis haben wir es natürlich mit nichtlinearen Systemen zu tun. Häufig lassen sich diese Systeme aber lokal linear behandeln, wobei das linearisierte Modell von einigen wenigen Betriebspunkt-Parametern abhängt (hier T und τ). In diesen Fällen können wir die LPV-Idee¹ verwenden: Die Kenngrössen der lokal robusten linearen Regler werden in geeigneter Weise als Funktionen der Betriebspunkt-Parameter der Regelstrecke dargestellt. In unserem Beispiel ist die folgende durch k_1 bis k_6 parametrisierte Repräsentation der Übertragungsfunktion des Reglers besonders geeignet:

¹ LPV als Abkürzung von «linear parameter varying»

$$K(s) = k_1 + \frac{k_2}{s} + k_3 s \frac{k_4 s + 1}{k_5^2 s^2 + 2k_5 k_6 s + 1}$$

mit

$$\begin{aligned} k_1 &= 0,687 & k_2 &= 2,50 & k_3 &= 0,0351 \\ k_4 &= -0,0351 & k_5 &= 0,0629 & k_6 &= 0,123 \end{aligned} \quad (21)$$

In diesem Sinne ist in [5] das etwas anspruchsvollere Problem der Kraftstoffregelung eines Benzinmotors mit Dreiwegekatalysator für den gesamten Betriebsbereich behandelt worden.

Literatur

- [1] H.P. Geering: Robuste Regelung, Vorlesungsskript², IMRT Press, Institut für Mess- und Regeltechnik, ETH, Zürich, 1997.
- [2] C.A. Roduner: H_∞ -Regelung linearer Systeme mit Totzeiten, Diss. ETHZ Nr. 12337, Zürich, 1997; Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 708, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1998.
- [3] U. Christen: Engineering Aspects of H_∞ Control, Diss. ETHZ Nr. 11433, Zürich, 1996.
- [4] U. Christen, H.P. Geering: Inverting and Non-inverting H_∞ Controllers. Systems and Control Letters 30(1997), pp. 31–38.

[5] C.A. Roduner, C.H. Onder, H.P. Geering: Automated Design of an Air/Fuel Controller for an SI Engine Considering the Three-Way Catalytic Converter in the H_∞ Approach, Proceedings of the 5th IEEE Mediterranean Conference on Control and Systems, S5-1.PDF, pp. 1–7, Paphos, Zypern, July 1997.

² <http://www.imrt.mavt.ethz.ch/~geering/ROBREG/RobRegToc.html>

Conception de régulateurs robustes avec la méthode H_∞

Cet article présente une méthode permettant la conception de régulateurs destinés à des systèmes particulièrement robustes. La méthode H_∞ travaille avec des caractéristiques de fréquence (caractéristiques des amplitudes pour circuits régulateurs à boucle simple, gradients de valeurs singulières pour systèmes à grandeurs multiples). En choisissant, lors de la conception, les caractéristiques de fréquence appropriées, le système de régulation prend forme de façon à générer les propriétés spécifiées du système (telles que largeur de bande, qualité de régulation dans la bande, acuité de résonance de la sensibilité et de la sensibilité complémentaire ainsi que la robustesse aux erreurs de modélisation dans la bande d'inhibition). Sur le plan des algorithmes, la méthode H_∞ est extrêmement simple puisqu'il suffit de résoudre deux équations algébriques de matrice Riccati (p. ex. avec Matlab).

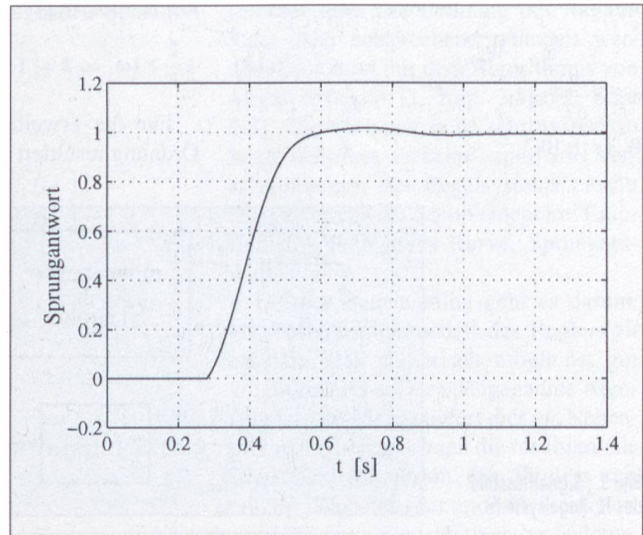


Bild 6 Einheitssprungantwort des Regelsystems