

Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen = Bulletin de l'Association suisse des électriciens, de l'Association des entreprises électriques suisses

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen

Band: 83 (1992)

Heft: 9

Artikel: Wahrscheinlichkeit und kausales Schliessen : Darstellung und Verarbeitung von ungewisser Information

Autor: Kohlas, Jürg

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-902822>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.05.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Wahrscheinlichkeit und kausales Schliessen

Darstellung und Verarbeitung von ungewisser Information

Jürg Kohlas

Während im Beitrag *Fuzzy Logic, Bulletin 1/92*, dargelegt wurde, wie mit unscharfen Begriffen in technischen Anwendungen umzugehen ist, zeigt der Autor in diesem zweiten Artikel, wie mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung aus beobachteten Ereignissen (Evidenzen) Rückschlüsse auf die Wahrscheinlichkeit von möglichen Ursachen gezogen werden können. In einem dritten und letzten Beitrag (*Bulletin 13/92*) wird eine dritte interessante Theorie, die Zuverlässigkeitstheorie des Schliessens mit unsicheren Argumenten, beschrieben werden.

Alors que dans l'article *Fuzzy Logic, Bulletin 1/92*, on avait exposé comment traiter les concepts incertains dans les applications techniques, l'auteur montre dans ce deuxième article, comment il est possible, à l'aide du calcul des probabilités découlant d'événements observés (évidences) de tirer des conclusions sur la probabilité des causes possibles. Dans un troisième et dernier article (*Bulletin 13/92*) on décrira une troisième théorie intéressante, la théorie de la fiabilité de la conclusion s'appuyant sur des arguments incertains.

Adresse des Autors

Prof. Dr. Jürg Kohlas, Institut für Automation und Operations Research, Universität Freiburg, 1700 Freiburg.

Kausale Modellierung und Bayessche Formel

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die klassische Theorie der Ungewissheit. Sie wird heute allerdings – mindestens was die übliche Schulausbildung anbetrifft – meist nur als mathematische Theorie von Massen- und Zufallsphänomene dargestellt. Das trifft jedoch nur einen Teil ihrer wahren Bedeutung. Jakob Bernoulli hat die Wahrscheinlichkeitsrechnung in seiner *Ars Conjectandi* (Die Kunst des Vermutens), wie fast alle seine Zeitgenossen, durchaus als Theorie der Argumentation unter teilweiser Ungewissheit angesehen, als Verfahren, die Glaubwürdigkeit von Beweisen, Schlüssen und Folgerungen zu beurteilen, Risiken abzuwägen und rationale Entscheidungen zu treffen. Auch moderne Autoren haben diese Sicht der Wahrscheinlichkeitsrechnung weiter gepflegt und entwickelt (Beispiele sind Ramsey, Jeffrey, de Finetti, Polya, Fishburn). Damit wird diese Theorie auch zu einem Instrument der Entscheidungsanalyse und der künstlichen Intelligenz. Es gibt sogar Dogmatiker, die die klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung als einzigen rationalen Ansatz des Schliessens unter Ungewissheit ansehen und dafür auch mathematische «Beweise» anführen (z.B. der Engländer Lindley; die Beweise sind natürlich mathematisch korrekt, fragwürdig sind aber die Axiome als Modelle der Wirklichkeit, die diesen Beweisen unterlegt werden.

Trotz dieser langen Tradition der Wahrscheinlichkeitstheorie entwickelte sich in der künstlichen Intelligenz eine beträchtliche Skepsis gegen ihre Anwendung in Expertensystemen. Das hatte viele durchaus ernst zu nehmende Gründe. Manche da-

von sind aber durch die neuesten Forschungen und Entwicklungen auf dem Gebiet des Schliessens unter Ungewissheit aus der Welt geschafft oder zum mindesten entschärft worden. Zwei der wichtigsten Einwände betrafen einerseits die mangelnde Modularität der Wissensrepräsentation aufgrund wahrscheinlichkeitstheoretischer Konzepte und andererseits die mangelnde Effizienz der Inferenzverfahren, die auf wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellen basieren. In der Tat waren noch vor fünf Jahren die verfügbaren Ansätze in keiner Weise an die Bedürfnisse grosser, vernetzter Wissensbasen der künstlichen Intelligenz angepasst. Das hat sich in der Zwischenzeit dank einigen grundlegenden Arbeiten drastisch geändert.

Zur Illustration sei in diesem Teil ein unterdessen bereits als klassisch zu betrachtendes, einführendes Beispiel von Judea Pearl [1] dargestellt. Es wird ein Alarmsystem untersucht, das gegen Einbrüche sichern soll. Das Schrillen des Alarmsignals wird dabei als wahrscheinliche Folge eines Einbruchs angesehen. Das ist eine einfache Ursache-Wirkungs-Kette. Eine Ursache U (oft auch als Hypothese H bezeichnet) wird mit Hilfe einer bedingten Wahrscheinlichkeit $P(W|U)$ mit einer Wirkung W (auch als Evidenz E bezeichnet) in Beziehung gesetzt. $P(W|U)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Wirkung W eintritt (das Alarmsignal schrillt), wenn die Ursache U (ein Einbruch) vorhanden ist.

In einem solchen Zusammenhang interessiert dann meistens der Rückschluss auf die Ursache, wenn die Wirkung beobachtet wird: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich ein Einbruch stattfindet, wenn das Alarmsignal schrillt? Die

Antwort darauf gibt die berühmte Formel von Bayes¹:

$$P(U|W) = P(W|U)P(U)/P(W) \quad (1)$$

Man definiert hier nun $O(U) = P(U)/P(\sim U)$, wobei $\sim U$ das Gegenteil von U bedeutet (es findet kein Einbruch statt). $O(U)$ wird A-priori-Chance (Odds auf englisch) genannt, ein Begriff, der aus der Wettbranche wohlbekannt ist und das Verhältnis der Chancen beider möglicher Ereignisse angibt (z.B. sei die A-priori-Chance für einen Einbruch auf 1 zu 10000 geschätzt, d.h. $O(U) = 10^{-4}$). Ferner führt man das sogenannte Likelihood-Verhältnis $L(W|U) = P(W|U)/P(W|\sim U)$ ein. Dieses gibt das Chancenverhältnis eines Alarms bei einem Einbruch zu jenem bei keinem Einbruch an. Wenn eine Chance von 95% besteht, dass ein Einbruch einen Alarm auslöst, $P(W|U) = 0,95$, und eine kleine Chance von 1%, dass ein Alarm auch durch ein anderes Ereignis ausgelöst werden kann, $P(W|\sim U) = 0,01$, dann wird $L(W|U) = 0,95/0,01 = 95$.

Dividiert man nun die Bayessche Formel (1) mit der symmetrischen für $P(\sim U|W)$, so erhält man die A-posteriori-Chance für einen Einbruch.

$$O(U|W) = L(W|U)O(U) = 95 \cdot 10^{-4} = 0,0095 \quad (2)$$

Diese Formel besagt, dass der Grad der Glaubwürdigkeit einer Ursache, basierend auf einer A-priori-Annahme oder einem A-priori-Wissen $O(U)$ und dem Likelihood-Verhältnis $L(W|U)$ bei gegebener Wirkung (Evidenz) W gleich dem Produkt dieser beiden Grössen sein muss. Man beachte, dass die Kenntnis der absoluten Wahrscheinlichkeiten $P(W|U)$ und $P(W|\sim U)$ gar nicht notwendig ist. Schätzen muss man nur das Verhältnis der beiden Werte: Um wieviel wahrscheinlicher ist es, dass ein Alarm durch einen Einbruch statt aus einem anderen Grund ausgelöst wird?

Aus der A-priori-Chance eines Einbruchs kann man leicht die entsprechende Wahrscheinlichkeit rückrechnen, wenn man die Bedingung, dass $P(U|W) + P(\sim U|W) = 1$ sein muss, berücksichtigt: $P(U|W) = O(U|W)/(1 + O(U|W)) = 0,00941$. Die Evidenz eines Alarms W hat die Wahrscheinlichkeit eines Einbruchs von 1 in 10000 um einen Faktor von rund 100 auf 94,1 in 10000 erhöht. Absolut ge-

sehen ist diese Wahrscheinlichkeit allerdings immer noch gering und reflektiert kaum die Besorgnis, die ein Alarm eigentlich auslösen sollte. Es würde sich möglicherweise nicht lohnen, wegen einer so kleinen Wahrscheinlichkeit die Polizei auszurücken zu lassen. Das hat seinen Grund in dem nicht sehr grossen Likelihood-Verhältnis der Alarmanlage oder in der kleinen (zu kleinen?) A-priori-Wahrscheinlichkeit eines Einbruchs. Und diese A-priori-Wahrscheinlichkeit ist auch der schwache Punkt dieses Modellansatzes: Sie ist oft sehr schwierig zu bestimmen und andererseits ausschlaggebend für das Rechenergebnis. Es wird sich zeigen, dass die in Teil III Bulletin SEV/VSE 13/92 beschriebene Evidenztheorie diesen Nachteil vermeidet (und dafür andere Schwächen hat).

Andererseits zeigt es sich, dass man aus einfachen kausalen Beziehungen der beschriebenen Art komplexe Beziehungsnetze aufbauen kann, die realistische Wissensbasen darstellen. Zudem liefert der auf der Bayesschen Formel beruhende Inferenzmechanismus in solchen Netzen zum mindesten qualitativ überzeugende Ergebnisse und Schlüsse. Eine geeignete Kalibrierung kann die Ergebnisse auch quantitativ den Erwartungen anpassen. Daher ist dieser Ansatz sehr ernst zu nehmen. Dies wird durch einen Ausbau des Beispiels illustriert.

Kombinierte Evidenz

Angenommen, das Haus wird durch zwei, unabhängig voneinander funktionierende Alarmanlagen überwacht. Dann können bei einem Einbruch unter Umständen zwei Wirkungen (zwei verschiedene Alarmglocken) $W1$ und $W2$ gehört werden. Der kritische Punkt liegt im Begriff «unabhängig». Mathematisch ist damit gemeint, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit der kombinierten Wirkung $W1 \cap W2$ gegeben (das Symbol \cap steht für die logische «Und»-Verknüpfung), dass ein Einbruch stattfindet, als Produkt wie folgt geschrieben werden darf:

$$P(W1 \cap W2 | U) = P(W1 | U)P(W2 | U). \quad (3)$$

Die heikle Frage ist, ob die physikalischen und technischen Gegebenheiten der Installationen, die Annahme dieser sogenannten bedingten Unabhängigkeit erlauben. Sie bringt mathematisch aber eine beträchtliche Vereinfachung mit sich.

Diese Art von Voraussetzung ist ausschlaggebend für das Aufstellen verzweigter Beziehungsnetze kausaler Beziehungen, wie sich später zeigen wird. Es scheint glücklicherweise so zu sein, dass in sehr vielen Fällen die bedingte Unabhängigkeit als Strukturierungsmittel komplexer Zusammenhänge sehr wohl gerechtfertigt werden kann, und in der Tat entspricht sie weitgehend der Art und Weise, wie Menschen sich gewisse Zusammenhänge zurechtlegen. Es handelt sich wiederum um ein weiteres ökonomisches Prinzip der Informationsverarbeitung, ohne dass komplexe Verknüpfungen nicht zu überblicken und zu verarbeiten wären.

Falls beide Alarmsysteme ansprechen, dann lässt sich die Glaubwürdigkeit eines Einbruchs durch die nachstehende, leicht herzuleitende Bayessche Formel berechnen:

$$O(U|W1 \cap W2) = L(W1|U)L(W2|U)O(U) = 95 \cdot 95 \cdot 10^{-4} = 0,9025. \quad (4)$$

Dabei sind beide Alarmsysteme mit der gleichen Charakteristik $L(W1|U) = L(W2|U)$ angenommen. Damit wird $P(U|W1 \cap W2) = 0,4744$. Die Wahrscheinlichkeit eines Einbruchs hat sich durch diese doppelte Evidenz wesentlich verstärkt. Auf eine analoge Art und Weise lässt sich auch die Glaubwürdigkeit eines Einbruchs berechnen, wenn nur eines der beiden Alarmsysteme anspricht, während das andere schweigt.

Verkettung von kausalen Beziehungen

Die Einbruchgeschichte sei nun so verändert, dass das Alarmsignal nicht direkt bei der Polizei schrillt, sondern im Hause selbst. Der Hauseigentümer, Herr Huber, ist jedoch nicht zu Hause. Hingegen telefoniert ihm seine Nachbarin, Frau Meier, und meldet ihm, sie glaube einen Alarm in seinem Hause gehört zu haben. Hier tritt nun eine weitere kausale Verkettung auf: Ein Alarmsignal (als Ursache) verursacht möglicherweise ein Telefon von Frau Meier (als Wirkung). Zur Unterscheidung der verschiedenen Ereignisse seien die Symbole E (für einen Einbruch), A (für ein Alarmsignal) und M (für das Telefon von Frau Meier) eingeführt. Nach der Formel von Bayes gilt wie vorher

$$P(E|M) = \alpha P(M|E)P(E) \quad (5a)$$

$$P(\sim E|M) = \alpha P(M|\sim E)P(\sim E) \quad (5b)$$

¹ Sie folgt aus

$P(U \cap W) = P(U) \cdot P(W|U) = P(W) \cdot P(U|W)$.

α ist hier einfach ein Normierungsfaktor, der sich aus der Beziehung $P(E|M) + P(\sim E|M) = 1$ bestimmen lässt. Nun gilt ganz allgemein nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung

$$P(M|E) = P(M|A \cap E)P(A|E) + P(M|\sim A \cap E)P(\sim A|E) \quad (6)$$

wobei $P(M|A \cap E)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit für M ist, gegeben A und E . Es ist hier jedoch gerechtfertigt, anzunehmen, dass M tatsächlich nur indirekt von E abhängt, nämlich insofern, ob A stattfindet oder nicht, d.h. dass $P(M|A \cap E) = P(M|A)$ und $P(M|\sim A \cap E) = P(M|\sim A)$. Diese Annahme ist eine weitere wichtige Form der bedingten Unabhängigkeit, die den Umgang mit kausalen Ketten vereinfacht und in grösserem Stil erst praktikabel macht.

Mit dieser Annahme wird Gl. 5 zu

$$P(E|M) = \alpha(P(M|A)P(A|E) + P(M|\sim A)P(\sim A|E))P(E) \quad (7)$$

Frau Meier sei eine etwas ängstliche Person, die etwa auch Geräusche hört, wo keine sind. Deswegen wird $P(M|A) = 1$ (wenn ein Alarm ertönt, hört ihn Frau Meier sicher) und $P(M|\sim A) = 0,05$ (auch wenn kein Alarm ertönt, glaubt Frau Meier gelegentlich einen solchen zu hören) angenommen. Im übrigen werden die gleichen Zahlen wie oben vorausgesetzt. Dann können die folgenden Rechnungen durchgeführt werden:

$$P(E|M) = \alpha(1 \cdot 0,95 + 0,05 \cdot 0,05) \cdot 10^{-4} = 0,9525 \cdot 10^{-4} \alpha,$$

$$P(\sim E|M) = \alpha(P(M|A)P(A|\sim E) + P(M|\sim A)P(\sim A|\sim E))P(\sim E) = \alpha(1 \cdot 0,01 + 0,05 \cdot 0,99) \cdot (1 - 10^{-4}) = 0,06 \alpha.$$

Aus der Normalisierungsbedingung $\alpha(0,9525 \cdot 10^{-4} + 0,06) = 1$ folgt schliesslich $P(E|M) = 0,0017$, was rund fünfmal kleiner ist, als der oben erhaltene Wert von $P(E|A)$. Das Verlassen auf eine nicht ganz zuverlässige Zeugin vermindert die Glaubwürdigkeit eines Einbruches beträchtlich. Der Grund liegt darin, dass der Anruf von Frau Meier eher mit ihrer Unzuverlässigkeit erklärt wird, als mit der Annahme eines Alarms. Auch hier funkt die kleine A-priori-Einbruchswahrscheinlichkeit wesentlich dazwischen. Sie macht eben die Annahme eines ungerechtfertigten Anrufs im Verhältnis zur Existenz eines Alarms relativ wahrscheinlich.

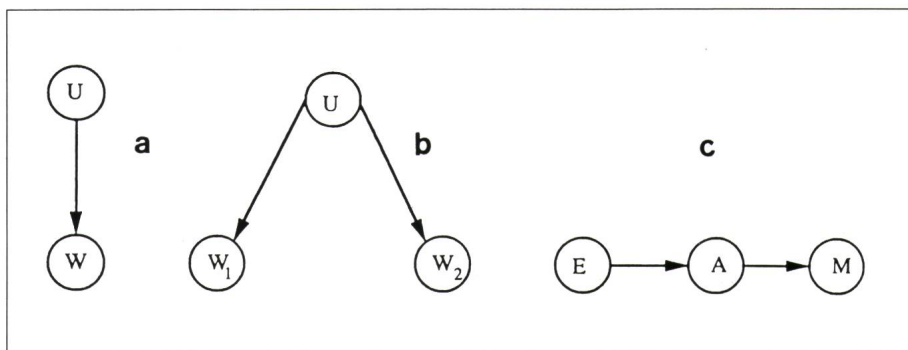


Bild 1 Graphische Darstellung von Grundstrukturen kausaler Verknüpfungen

- a die einfache kausale Beziehung
- b verschiedene Wirkungen einer Ursache
- c Verkettung von kausalen Beziehungen

Bayessche Netzwerke

Die hier betrachteten einfachen Fälle bilden die elementaren Bausteine für den Aufbau von Netzwerken kausaler Verkettungen. Diese können auch tatsächlich graphisch dargestellt werden. Dabei werden Variablen eingeführt und als Knoten eines Netzwerkes dargestellt. In den obigen Beispielen wurden den Ereignissen U , W bzw. W_1 und W_2 oder E , A und M Boolesche (zweiwertige) Variablen zugeordnet, die das Eintreten oder Ausbleiben des entsprechenden Ereignisses anzeigen. Im allgemeinen können diese Variablen jedoch mehrwertig (nicht nur dual) sein. Eine Variable wird nun mit einem Pfeil zu einer anderen Variablen verbunden, wenn sie Ursache oder Einflussgrösse für eine andere Variable ist. Im Bild 1 sind auf diese Weise die obigen Beispiele dargestellt.

Im Bild 2 ist ein etwas realistischeres Beispiel aus einer fundamentalen Veröffentlichung [2] dargestellt. Es ist eine Darstellung der folgenden (stark vereinfachten) medizinischen Wissensbasis:

■ Luftknappheit (Dyspnoea) kann durch Tuberkulose, Lungenkrebs oder Bronchitis, oder keinem von den dreien oder von mehr als einer der Krankheiten verursacht sein. Ein Besuch in Asien erhöht die Chancen von Tuberkulose, und Rauchen ist ein bekannter Risikofaktor sowohl für Lungenkrebs und Bronchitis. Die Ergebnisse einer einzelnen Brust-Röntgenaufnahme diskriminieren nicht zwischen Lungenkrebs und Tuberkulose. Auch die Existenz von Dyspnoea erlaubt nicht zwischen Tuberkulose, Lungenkrebs und Bronchitis zu unterscheiden.

Die Knoten in Bild 2 repräsentieren die Ereignisse (Besuch in Asien, Tuberkulose, Rauchen usw). Die Pfeile stellen die kausalen Verkettungen dar. Neu an diesem Beispiel ist, dass ein Ereignis wie Dyspnoea mehrere Ursachen (eingehende Pfeile) haben kann. In einem solchen Fall müssen als Daten die bedingten Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Kombinationen von Ursachen definiert werden. Im Beispiel von Dyspnoea wären das die vier bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(D|E \cap B)$, $P(D|\sim E \cap B)$, $P(D|E \cap \sim B)$ und $P(D|\sim E \cap \sim B)$. Das Modell setzt voraus, dass alle bedingten Wahrscheinlichkeiten, die für

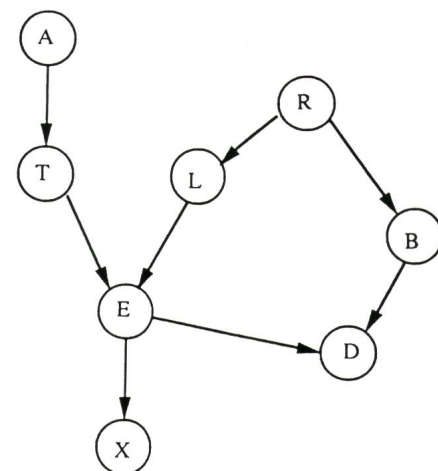


Bild 2 Das Bayessche Netzwerk für eine (stark vereinfachte) medizinische Wissensbasis

- A Besuch in Asien
- T Tuberkulose
- L Lungenkrebs
- D Dyspnoea
- B Bronchitis
- E Ereignis (Tuberkulose oder Lungenkrebs)
- X Röntgenaufnahme

die Beschreibung der kausalen Pfeilbezeichnungen notwendig sind, erfasst und geschätzt werden.

Das Ereignis E ist eine logische Oder-Verknüpfung der Ereignisse T und L . Die Kausalität ist da rein deterministisch, was sich dadurch ausdrückt, dass die bedingten Wahrscheinlichkeiten nur die Werte Null und Eins annehmen: $P(E|T \cap L) = P(E|\sim T \cap L) = P(E|T \cap \sim L) = 1$ und $P(E|\sim T \cap \sim L) = 0$. Das illustriert, dass in einem solchen kausalen Modell ohne weiteres beliebige logische Verknüpfungen zwischen Ereignissen, wie auch jede andere rein deterministische, funktionale Beziehung dargestellt werden kann.

Eine solche Wissensbasis sollte beispielsweise Auskunft zu folgenden Fragen geben: Ein Patient, der sich mit Dyspnoea zur Untersuchung einstellt, hat vor kurzem Asien besucht. Seine Rauchgewohnheiten sind noch unbekannt und Röntgenaufnahmen sind noch keine gemacht. Was sind unter diesen Bedingungen die Chancen für die drei möglichen Krankheiten und wie würde sich die Chance für

Bronchitis ändern, wenn Tuberkulose durch einen Test ausgeschlossen wird? Würde die Erhebung der Rauchgewohnheiten oder eine Röntgenaufnahme mehr Information zum Lungenkrebs ergeben? Welches ist die wichtigste Information zur Bildung des Gesamturteils? Alle diese und ähnliche Fragen können tatsächlich durch Auswertung eines Bayesschen Netzwerkes wie dasjenige von Bild 2 effizient beantwortet werden. Allerdings stellt dies einige mathematische Probleme, die über die elementaren Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung hinausgehen. Ein Problem hat seinen Grund darin, dass gewisse Ursachen (wie das Rauchen im Beispiel) über mehrere, verschiedene Verkettungswege eine bestimmte Wirkung (wie Dyspnoea) beeinflussen können. Das führt wahrscheinlichkeitstheoretische Abhängigkeiten ein, die eine direkte Verallgemeinerung der oben beschriebenen einfachen Anwendungen der Bayesschen Formel verunmöglichen. Falls jedoch – im Gegensatz zum obigen Beispiel – im Bayesschen Netzwerk jeder Knoten nur über

höchstens einen Verkettungsweg mit einem anderen Knoten verbunden ist, spricht man von einem Bayesschen Baum. Dann besteht das angesprochene Problem nicht. Man hat es in diesem Fall im wesentlichen mit einer Verallgemeinerung der aus der Automatik bekannten Filterungs- oder Glättungsproblematik zu tun, und es können einfache Lösungen analog etwa einem Kalmann-Filter gefunden werden.

Der wesentliche Fortschritt besteht aber gerade darin, dass nunmehr auch allgemeine Methoden zur Behandlung des allgemeinen Falls entwickelt worden sind. Der Aufsatz [2] ist die bahnbrechende Arbeit auf diesem Gebiet. Es gibt bereits ein kommerzielles Produkt namens Hugin, das diesen neuen Ansatz verwertet.

Literatur

- [1] Pearl J.: Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference. Morgan and Kaufman, San Mateo CA, 1988.
- [2] Lauritzen S. L., Spiegelhalter D. J.: Local Computations with Probabilities on Graphical Structures and their Application to Expert Systems. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 50 (1988) 2, pp. 157–224.