Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen = Bulletin de l'Association suisse des électriciens, de l'Association des entreprises électriques suisses

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen

Band: 79 (1988)

Heft: 21

Artikel: Chaos in elektrischen Netzwerken

Autor: Hasler, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-904096

Chaos in elektrischen Netzwerken

M. Hasler

Chaos ist in der Physik fast zum Modethema geworden. Dass Chaos aber auch in der Elektrotechnik eine gewisse Bedeutung hat, zeigt dieser Beitrag. Die wesentlichen Merkmale von chaotischem Verhalten werden anhand von zwei Vergleichsbeispielen, einem linearen und einem nichtlinearen Netzwerk, erläutert. Die für den Ingenieur relevanten Fragen werden gestellt, ohne dass jedoch heute zufriedenstellende Antworten gegeben werden können.

L'étude du chaos est devenu presqu'une mode en physique. Le présent article montre que le chaos intervient également en électrotechnique. Les propriétés caractéristiques du comportement chaotique sont mises en évidence à l'aide de deux exemples simples, un circuit linéaire et un circuit non-linéaire. Les questions pertinentes pour l'ingénieur sont posées, sans que l'on puisse donner aujourd'hui des réponses satisfaisantes.

Adresse des Autors
Prof. Dr. *Martin Hasler*, Eidgenössische Technische Hochschule Lausanne, CM-Ecublens, 1015 Lausanne.

Seit etwa 20 Jahren werden in der wissenschaftlichen Literatur, vor allem in den Zeitschriften der Physik, Arbeiten über Chaos publiziert. Am Anfang waren es einige wenige Forscher, die sich mit dem Thema befassten; inzwischen ist es geradezu ein Modegebiet geworden. Auch die Ingenieurwissenschaften sind von dieser Welle nicht verschont geblieben. Die Grundhaltung des Ingenieurs gegenüber dem Stichwort *Chaos* ist jedoch anders als beim Physiker. Dies lässt sich leicht anhand der verschiedenen Berufsaufgaben verstehen.

Der Physiker hat als Naturwissenschafter ein natürliches Interesse an allem Neuen und Exotischen, während der Ingenieur alle Phänomene als lästig empfindet, welche das korrekte Funktionieren der von ihm entworfenen Geräte in Frage stellen. Wie alle Menschen hat er die Tendenz, das Unangenehme zu verdrängen. Daher steht er dem Phänomen Chaos eher ungläubig gegenüber, oder er ist mindestens überzeugt, dass es in seinem Arbeitsgebiet irrelevant ist.

Der Zweck dieses Artikels ist es, den Elektroingenieur darauf aufmerksam zu machen, dass chaotisches Verhalten in elektrischen Netzwerken sehr wohl auftreten kann. Das Wissen um die Natur dieser Phänomene kann ihm nützlich sein bei der Interpretation von überraschenden experimentellen Resultaten und Computersimulationen.

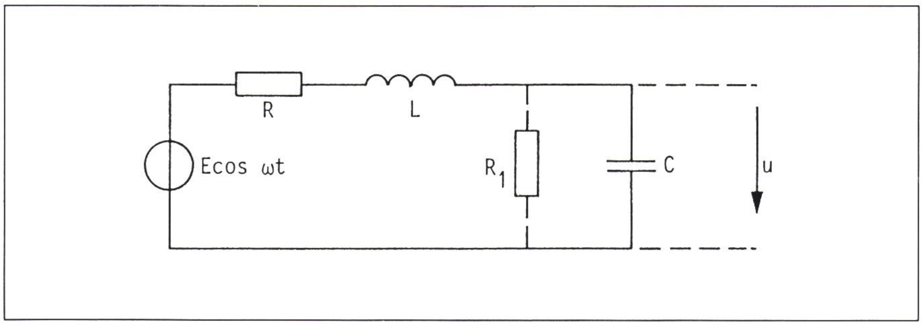
Zwei Vergleichsnetzwerke

Um die nachfolgende Diskussion konkret zu gestalten, werden zwei einfache Netzwerke, ein lineares und ein nichtlineares, als Vergleichsbeispiele benützt. Das erste ist der RLC-Schwingkreis von Figur 1, welcher von einer Wechselstromquelle angetrieben wird. Mit den üblichen Rechenmethoden findet man die Ausgangsspannung u in laplacetransformierter Form:

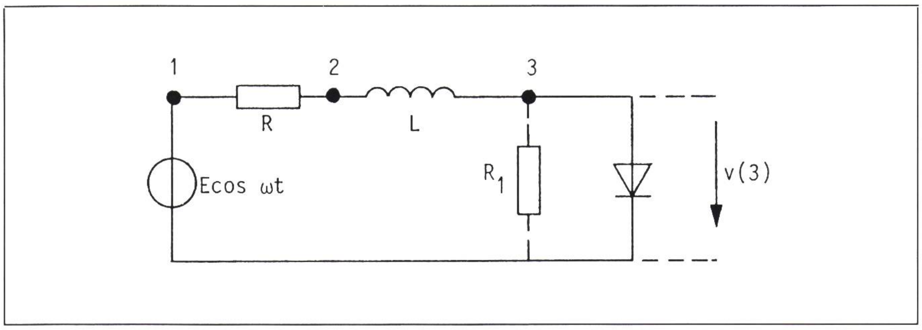
$$\mathrm{U(p)} = \frac{E}{LC(p^2+\omega^2)[\mathrm{p}^2+\{(R/L)+1/R_1 C\}\,p+(R_1+R)/(R_1 LC)]} + \frac{i_0+(p+(R/L))\,u_0}{C[\mathrm{p}^2+\{(R/L)+1/R_1 C\}p+(R_1+R)/(R_1 LC)\}]} \quad (1$$

Wobei E die Amplitude und ω die Kreisfrequenz der Quelle, i_0 der Anfangsstrom in der Spule und u_0 die Anfangsspannung im Kondensator bezeichnen.

Das nichtlineare Netzwerk (Fig. 2) unterscheidet sich vom linearen der Figur 1 nur dadurch, dass die Elemente R_1 und C durch eine Diode ersetzt sind. Effektiv wird für eine Diode normalerweise ein Widerstand und ein parallelgeschalteter Kondensator als Ersatzschaltbild verwendet. Allerdings sind die zwei Elemente dann nichtlinear (Fig. 3), mit der Spannungs-Strom-Kennlinie der Figur 4a für den Widerstand und der Spannungs-Ladungs-Kennlinie der Figur 4b für den Kondensator. Wegen dieser Nichtlinearitäten kann die Ausgangsspannung nicht mehr explizit berechnet werden, aber qualitativ ist die normale Arbeitsweise des Netzwerkes leicht verständlich. Abgesehen von Einschwingvorgängen schneidet die Diode im wesentlichen die Hälfte der sinusförmigen Schwingungen ab, wobei die Spule zusätzlich noch eine Phasenverschiebung bewirkt (Fig. 6). Wie wir sehen werden, kann



Figur 1 **Linearer RLC-Schwingkreis**



Figur 2 **Nichtlinearer Schwingkreis**

sich dieser nichtlineare Schwingkreis aber noch ganz anders verhalten.

Was ist chaotisches Verhalten?

Merkwürdigerweise kann vorläufig keine mathematisch absolut präzise Antwort auf diese Frage gegeben werden. Dies allein ist schon ein Hinweis darauf, dass es sehr schwierig ist, für Anwendungen signifikante mathematische Sätze herzuleiten. Anderseits kann man jedoch einige wesentliche Eigenschaften von chaotischem Verhalten angeben. Deren genaue Definitionen sind jedoch heikel und können auch zu Kontroversen Anlass geben. Die folgenden Ausführungen sind als Ansicht des Autors und nicht unbedingt als allgemein akzeptierte Fakten zu verstehen.

Drei Eigenschaften sind charakteristisch für chaotisches Verhalten von physikalischen Systemen im allgemeinen, und von elektrischen Netzwerken im speziellen:

1. Aperiodizität - Kontinuierliches Spektrum
2. Lokale Instabilität
3. Globale Beschränktheit.

1. Aperiodizität

Die Ausgangsspannung des linearen Schwingkreises von Figur 1 verhält sich qualitativ folgendermassen. Ausgehend vom Wert u_0 folgt ein Einschwingvorgang. Wenn dieser abgeklungen ist, nimmt $u(t)$ Sinusform an, mit der gleichen Periode wie die Quelle. Das Frequenzspektrum ist also ganz auf $f = \omega/2\pi$ konzentriert. Diese Eigenschaften können direkt aus der Laplace- Rücktransformation von (1) abgelesen werden.

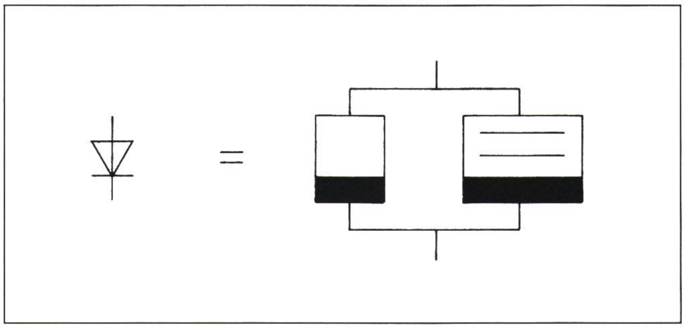
Das Verhalten des nichtlinearen Schwingkreises von Figur 2 ist normalerweise sehr ähnlich. Nach dem Einschwingvorgang stellt sich eine periodische Schwingung mit der gleichen Periode wie die Quelle (Fig. 5a) ein. Sie ist jedoch nicht mehr sinusförmig, d.h. ihr Spektrum ist zwar diskret, aber es treten nicht nur die Frequenz f, sondern auch alle Vielfachen nf auf. Weil man im nichtlinearen Fall keine explizite Formel wie (1) zur Verfügung hat, ist es nicht einfach, diese qualitativen Eigenschaften auch nachzuweisen. Es ist sogar sinnlos, einen allgemeinen Beweis dafür zu suchen, weil die Eigenschaften gar nicht immer zutreffen. In gewissen Bereichen der Netzwerkparameter tritt zum Beispiel eine andersartige periodische Schwingung auf. Ihre Periode ist ein Vielfaches der Quellenperiode und ihre Grundfrequenz dementsprechend f/m ein Bruchteil der Quellenfrequenz (Fig. 5b). Man nennt sie daher eine *subharmonische Schwingung*. Sie hat ebenfalls ein diskretes Spektrum, welches auf die Frequenzen nf/m, $n = 0,1,2,\ldots$ konzentriert ist.

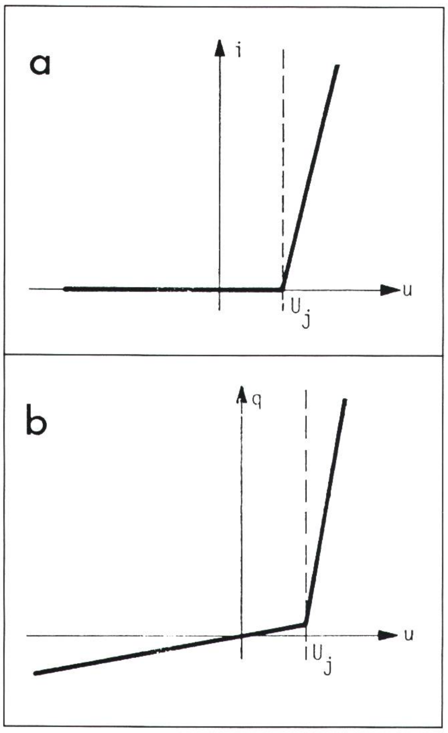
Im Prinzip wäre auch eine quasiperiodische Schwingung möglich, deren Spektrum ebenfalls diskret ist, aber nicht mehr nur aus Vielfachen einer Grundfrequenz besteht. Dieses Phänomen wurde jedoch am nichtlinearen Netzwerk der Figur 2 nicht beobachtet. Schliesslich gibt es Parameterbereiche, wo die Ausgangsspannung überhaupt keine Periodizität mehr aufweist, auch keine quasiperiodische Schwingung, wie Figur 5c zeigt. Eine eindrücklichere Darstellung ist in Figur 6 gegeben, wo der Strom in der Spule als Funktion der Zeit gegen die Ladung im Kondensator aufgetragen ist. Das Spektrum ist in diesem Fall nicht mehr diskret, sondern kontinuierlich. Das ist das erste Merkmal von chaotischem Verhalten.

2. Lokale Instabilität

Im linearen Netzwerk der Figur 1 ist die Ausgangsspannung immer stabil.

Figur 3
Ersatzschaltbild für die Diode





Figur 4 Kennlinie der Nichtlinearitäten

a Nichtlinearer Widerstand

b Nichtlinearer Kondensator

Das bedeutet, dass eine kleine Änderung der Anfangsspannung u_0 nur eine kleine Änderung der Spannung $u(t)$, für alle Zeiten $t>0$ bewirkt. Nach dem Einschwingvorgang «vergisst» die Spannung $u(t)$ sogar diese Änderung, d.h. die sich einstellende sinusförmige Schwingung hat eine Amplitude und eine Phase, welche nicht von u_0 und i_0 abhängen. Man spricht von *asymptotischer Stabilität* (für $t \rightarrow \infty$).

Dieselbe Eigenschaft trifft auch auf das normale Verhalten des nichtlinearen Netzwerkes der Figur 2 zu. Treten jedoch subharmonische Schwingungen auf, so ist $u(t)$ nicht mehr in jedem Fall stabil. Es gibt nämlich gewisse Anfangswerte u_0, i_0, bei welchen eine noch so kleine Variation der Anfangswerte eine grosse Abweichung von $u(t)$ bewirken kann, wenn man genügend lange wartet. Diese instabilen Schwingungen sind jedoch die Ausnahme.

Für das chaotische Verhalten hingegen ist die Instabilität aller Spannungsverläufe $u(t)$ charakteristisch. Zwei beliebig nahe beieinanderliegende Wertepaare (u_0, i_0) und (u_0', i_0') erzeugen fast immer Schwingungen $u(t)$ und $u'(t)$, welche im Laufe der Zeit auseinanderstreben. Das ist das zweite Merkmal von chaotischem Verhalten.

3. Globale Beschränktheit

Wir haben im Abschnitt «Lokale Instabilität» nicht erwähnt, dass auch der lineare Schwingkreis instabiles Verhalten aufweisen könnte. Dies ist dann der Fall, wenn gewisse Elementwerte negativ sind, z.B. C. Unter diesen Umständen wächst jedoch $u(t)$ fast immer über alle Schranken. Die Instabilitäten des nichtlinearen Netzwerkes von Figur 2 sind jedoch ganz anderer Art. Zwei nahe beieinanderliegende Anfangswerte erzeugen zwar zwei auseinanderstrebende Spannungen $u(t)$ und $u'(t)$, die aber nicht gegen unendlich streben, sondern beschränkt bleiben. Beim linearen Netzwerk sind der lokale Aspekt und der globale Aspekt der Instabilität gekoppelt, was beim nichtlinearen Netzwerk nicht mehr der Fall ist.

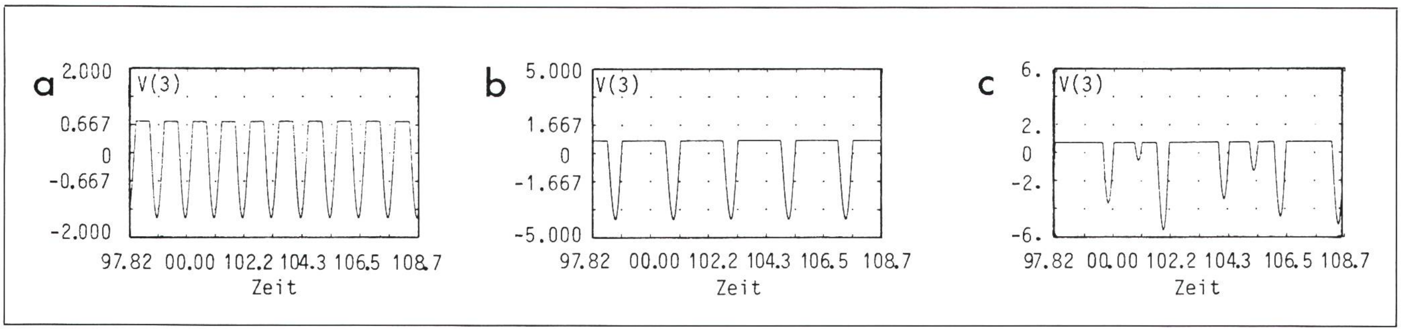
Man kann sich leicht vorstellen, dass das Verhalten eines Netzwerkes bei welchem alle Spannungsverläufe (lokal) instabil und trotzdem beschränkt sind, sehr ungeordnet sein muss. Intuitiv gesprochen stossen sich die verschiedenen Lösungen der Netzwerkgleichungen gegenseitig ab und sind dennoch gezwungen, in einem begrenzten Raum zu bleiben. Dies erzeugt Chaos. Analogien zu Gebieten des menschlichen Lebens seien dem Leser überlassen (Politik, ...). Die Beschränktheit der Lösungen, oder besser, deren Kombination mit der allgegenwärtigen lokalen Instabilität, ist also das dritte Merkmal von chaotischem Verhalten.

Welche Netzwerke können sich chaotisch verhalten?

Diese Frage kann leider noch weniger beantwortet werden, als die früher gestellte Frage nach dem Wesen des chaotischen Verhaltens. Wir müssen uns daher mit Beispielen begnügen. Eine grosse Anzahl von Netzwerken, deren chaotisches Verhalten bekannt ist, sind in [1] beschrieben. Bemerkenswert ist dabei, dass es sich, wie in unserem Beispiel, um sehr einfache Netzwerke handelt. Sie sind für das Studium von Chaos speziell geeignet. Man soll darob nicht vergessen, dass einige davon Modelle von praktisch verwendeten Schaltungen sind, einfach mit etwas anderen Parameterwerten. Erwähnt sei das Modell für einen Messtransformator in einer Hochspannungsanlage [2], das Modell eines mit einem Pilotsignal synchronisierten Oszillators [3], im speziellen eines PLL (Phase-Locked Loop) [4], und ein digitales Filter [5]. Wir sind überzeugt, dass die Zukunft noch weitere Beispiele an den Tag bringen wird.

Wie kann man chaotisches Verhalten umgehen?

Die Aufzählung der Beispiele im vorhergehenden Abschnitt zeigt

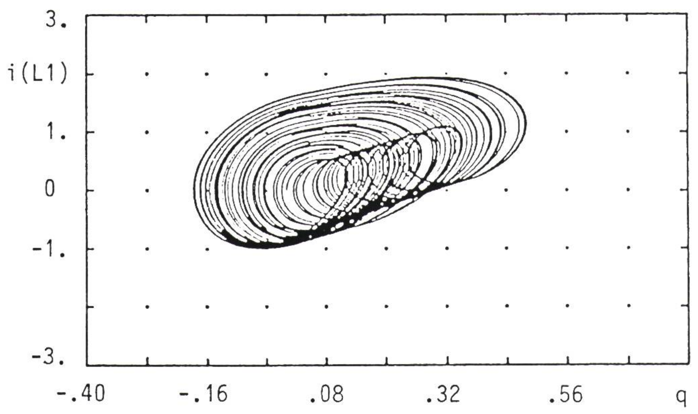


Figur 5 Verschiedene Netzwerkreaktionen

a Schwingung mit Grundfrequenz

b Subharmonische Schwingung

c Chaotische Schwingung



Figur 6
Darstellung der chaotischen Schwingung im Zustandsraum

q Ladung des Kondensators
i(L1) Spulenstrom

schon, dass Chaos in ganz verschiedenartigen Arbeitsgebieten des Elektroingenieurs auftreten kann. Weil jedoch Chaos normalerweise unerwünscht ist, braucht der Ingenieur Hilfsmittel, welche es ihm erlauben, chaotisches Verhalten auszuschliessen.

Leider ist heute das einzig generell verwendbare Hilfsmittel die numerische Simulation, eine Methode, die sowohl aufwendig als auch unzuverlässig ist. Genau genommen müsste man eine unendliche Anzahl von unendlich langen Strom- und Spannungsverläufen berechnen, um das chaotische Verhalten mit Sicherheit feststellen zu können. Das kann man natürlich nicht, und daher ist die Methode unzuverlässig. Wenn man jedoch eine sehr grosse Anzahl von genügend langen und sorgfältig ausgewählten Simulationen durchführt, so kann man von einer gewissen Zuverlässigkeit der Resultate sprechen. Die Methode ist dann allerdings sehr aufwendig.

Es besteht also ein Bedarf an mehr grundlegenden Methoden, welche erlauben, diese störenden Phänomene auszuschliessen. Als mathematisches Hilfsmittel bieten sich die Lyapunovfunktionen an. Diese Methode ist absolut zuverlässig, wenn sie zu einem Resultat führt. Hier ist aber der wunde Punkt. Die geradlinige Anwendung der Methode von Lyapunov liefert sehr oft kein brauchbares Resultat. Trotzdem ist das Potential dieser Methode noch nicht voll ausgeschöpft. Wesentliche Fortschritte erreicht man nur mit grosser Intuition. Sie ist für das Auffinden einer günstigen Lyapunovfunktion unerlässlich. Einige Anwendungen dieses theoretischen Hilfsmittels auf Netzwerkprobleme findet man in [6].

Was kann nun ein Ingenieur tun, wenn er anhand von numerischen Simulationen oder experimentell festgestellt hat, dass seine Schaltung sich chaotisch verhält? Er muss die Netzwerkparameter verändern bis die störenden Phänomene verschwinden. In der Praxis dürfte der Fall jedoch nicht so klar sein, weil rein äusserlich gesehen chaotisches Verhalten von Rauschen irgendwelcher Herkunft kaum zu unterscheiden ist. Numerische Simulationen werden in diesem Falle nützlich sein, weil sie erlauben, verschiedene Effekte zu trennen. Es ist wichtig, das chaotische Verhalten des Netzwerkmodelles an sich zu identifizieren, weil z.B. im Gegensatz zu thermischem Rauschen ein Kühlen der Schaltung kaum Abhilfe schaffen wird.

Schlussfolgerungen

Elektrische Netzwerke können sich chaotisch verhalten. Dies äussert sich durch Aperiodizität trotz periodischer Quellen, kontinuierliches Spektrum der Spannungen und Ströme sowie deren generelle Instabilität. Diese lokale Instabilität ist jedoch von einer globalen Stabilität, der Beschränktheit der Spannungen und Ströme, begleitet. Normalerweise kann chaotisches Verhalten in Netzwerken nicht toleriert werden. Hilfsmittel sind daher vonnöten, um solche Phänomene auszuschliessen. Leider steht generell nur die numerische Simulation zur Verfügung, die sehr aufwendig ist, während die Methode von Lyapunov (noch?) zu wenige praktisch verwendbare Resultate liefert.

Literatur

[1] *L.O. Chua:* Special issue on chaotic systems. Proc. IEEE 75(1987)8.
[2] *L.O. Chua* a. o.: Dynamics of a piecewise-linear resonant circuit. IEEE Trans. CAS 29(1982)8, p. 535...547.
[3] *Y.S. Tang* a. o.: Synchronization and chaos. IEEE Trans. CAS 30(1983)9, p. 620...626.
[4] *J. Grudniewicz, J. Kudrewicz* and *T. Barczyk:* Synchronization and chaos in a real discrete phase-locked loop. Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems, June 1988, Helsinki; p. 269...272.
[5] *L.O. Chua* and *T. Lin:* Chaos in digital filters. IEEE Trans CAS 35(1988)6, p. 648...658.
[6] *M. Hasler* and *J. Neirynck:* Nonlinear circuits. Boston, Artech House, 1986.