

<b>Zeitschrift:</b>	Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen = Bulletin de l'Association suisse des électriciens, de l'Association des entreprises électriques suisses
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen
<b>Band:</b>	78 (1987)
<b>Heft:</b>	1
<b>Artikel:</b>	Digitale Signalverarbeitung : theoretische Grundlagen : Teil 4 : praktische Aspekte digitaler Systeme
<b>Autor:</b>	van den Enden, A. W. M. / Verhoeckx, N. A. M.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-903798">https://doi.org/10.5169/seals-903798</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Digitale Signalverarbeitung: Theoretische Grundlagen

## Teil 4: Praktische Aspekte digitaler Systeme

A. W. M. van den Enden und N. A. M. Verhoeckx

**In diesem letzten von vier Teilen<sup>1</sup> stehen praktische Aspekte von digitalen Systemen im Vordergrund. Es werden die Umwandlung analoger Signale in zeitdiskrete und später in wertdiskrete sowie die damit verbundenen Begriffe wie Abtasttheorem und Quantisierungsfehler behandelt.**

**Cette quatrième partie traite principalement des aspects pratiques de systèmes numériques, notamment de la conversion de signaux analogiques en signaux discrets temporels ou de valeur, ainsi que des notions y relatives, telles que le théorème d'exploration et les erreurs de quantification.**

Diese Aufsatzerie ist eine Übersetzung des gleichnamigen englischen Beitrags in Philips Techn. Review 42(1985)4. Die Übersetzung besorgte H. Ochsner, dipl. Ing. ETH, Institut für Kommunikationstechnik, ETH Zürich.

<sup>1</sup> Bull. SEV/VSE 77(1986)11, 15, 17

### Adresse der Autoren

A. W. M. van den Enden  
und N. A. M. Verhoeckx,  
Philips Research Laboratories,  
NL-5600 JA Eindhoven.

### 4.1 Von der kontinuierlichen zur diskreten Zeit und umgekehrt

Soll ein analoges Signal  $x_a(t)$  durch ein zeitdiskretes System verarbeitet werden, so stellt sich zuerst das Problem, das analoge Signal ohne bzw. mit möglichst wenig Verlust an Information in ein zeitdiskretes umzuwandeln. Ob und wann dies möglich ist, wird durch das Abtasttheorem<sup>1</sup> angegeben:

Enthält das Signal  $x_a(t)$  keine Frequenzanteile oberhalb  $\omega_{\max} = 2\pi f_{\max}$  rad/s, so ist sämtliche Information über  $x_a(t)$  in den Werten  $x_a(nT)$  enthalten, falls  $T \leq 1/(2f_{\max})$  gilt.

Die Werte  $x_a(nT)$  gewinnt man durch Abtastung von  $x_a(t)$  mit der Ab-

<sup>1</sup> Das Abtasttheorem wird normalerweise C.E. Shannon zugeschrieben. Er formulierte es im Rahmen seiner Informationstheorie in den vierziger Jahren. Beinahe gleichzeitig bewies es aber auch V.A. Kotelnikov in der Sowjetunion. Die theoretische Grundlage legten jedoch bereits 1915 E.T. und J.M. Whittaker, so dass man besser die Formulierung von A.J. Jerri [18] verwendet und den Begriff «WKS-Abtasttheorem», gebildet aus den Anfangsbuchstaben der drei Namen, verwendet.

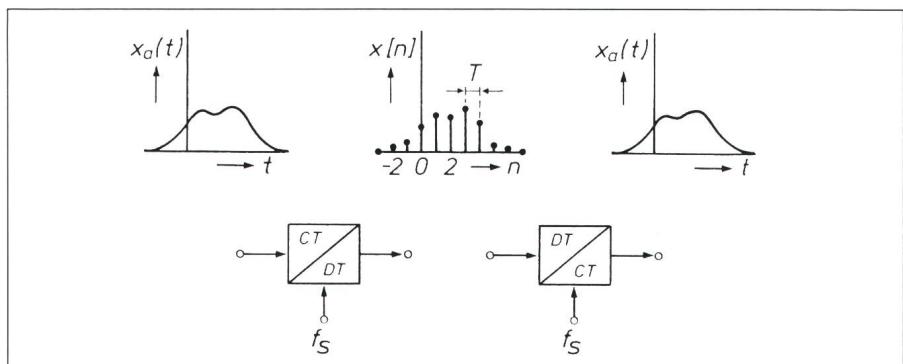
tastrate  $f_s = 1/T$ . Definiert man nun das diskrete Signal zu

$$x[n] = x_a(nT) \quad (90)$$

so ist der Übergang von zeitkontinuierlichen zu zeitdiskreten Signalen vollzogen (Fig. 43). Die Art und Weise, wie diese Abtastwerte repräsentiert werden, beispielsweise durch ganze Zahlen oder Ladungspakete, ist vorläufig unwichtig. Der spektrale Zusammenhang zwischen dem Spektrum  $X_a(j\omega)$  von  $x_a(t)$  und  $X(e^{j\omega T})$  des diskreten Signals  $x[n]$  kann einfach durch periodische Wiederholung von  $X_a(j\omega)$  und eine Skalierung mit  $1/T$  gewonnen werden:

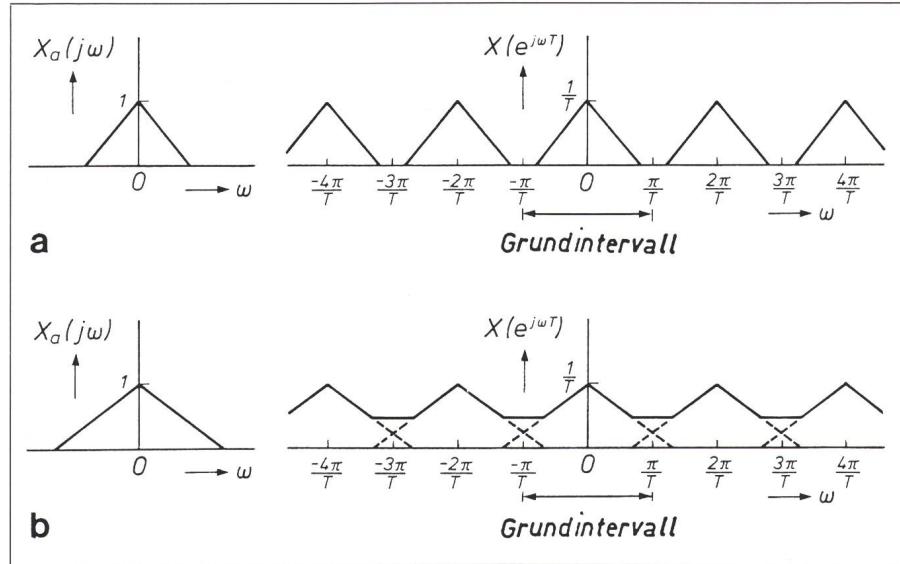
$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\omega - j\frac{2\pi n}{T}\right) \quad (91)$$

Die Figur 44 zeigt die Spektren des abgetasteten Signals für zwei Fälle; im einen Fall ist das Abtasttheorem erfüllt, im andern nicht. Man sieht in der Figur 44b, dass sich die einzelnen Teilspektren teilweise überlappen. Dieser Effekt wird mit dem englischen Begriff



Figur 43. Abtastung

Um ein kontinuierliches Signal in ein zeitdiskretes umzuwandeln, ist eine Abtastung (CT / DT) notwendig; die Rückgewinnung des ursprünglichen kontinuierlichen Signals geschieht mittels Tiefpassfilterung (DT / CT). CT bedeutet continuous time, DT steht für discrete time.  $f_s$  bezeichnet die Abtastrate,  $T = 1/f_s$  das Abtastintervall.



Figur 44. Abtasttheorem

- a Erfüllt die Abtastung der Figur 43 das Abtasttheorem, so ist das Spektrum  $X(e^{j\omega T})$  der Sequenz  $x[n]$  lediglich eine wiederholte und skalierte Version des Spektrums  $X_a(j\omega)$  des ursprünglichen, analogen Signals  $x_a(t)$ .
- b Ist dies nicht der Fall, so überlappen sich die verschiedenen Wiederholungen; diesen Effekt bezeichnet man mit Aliasing. In diesem Fall kann das Signal  $x_a(t)$  nicht mehr aus der Impulsfolge zurückgewonnen werden.

**Aliasing** bezeichnet. Offenbar hat die spektrale Überlappung zur Folge, dass das ursprüngliche Spektrum  $X_a(j\omega)$  und damit das Signal  $x_a(t)$  nicht mehr aus dem abgetasteten Signal  $x[n]$  gewonnen werden kann. Aus der Figur 44a, wo das Abtasttheorem befriedigt wird, ist zu erkennen, dass das Grundintervall von  $X(e^{j\omega T})$  bis auf eine Skalierung identisch ist zu  $X_a(j\omega)$ . Hier erfolgt die Rückwandlung des abgetasteten Signals in ein kontinuierliches durch eine ideale kontinuierliche Tiefpassfilterung. Dieses Filter hat die Verstärkung  $T$  innerhalb des Bereichs  $|\omega| < \pi/T$  bzw. die Verstärkung 0 außerhalb. Nun lässt sich aber so ein Filter in der Praxis nicht realisieren, da sich seine Stossantwort von  $t = -\infty$  nach  $t = \infty$  ausdehnen würde.

Eine praktische Anordnung der Abtastung und Rückwandlung ist in der Figur 45 zu sehen. Vor der eigentlichen Abtastung befindet sich ein Vorfilter mit Tiefpasscharakteristik, dessen Durchlassbereich bis zur halben Abtastrate reicht. Dadurch wird ein Aliasing, welches durch zu hohe Frequenzen – beispielsweise von Rauschsignalen – verursacht würde, verhindert. Bei der Rückwandlung bildet man aus den Abtastwerten zuerst ein stückweise konstantes Signal  $\hat{x}_a(t)$ . Das Spektrum dieser Approximation zeigt nun gegenüber dem Frequenzverlauf des ursprünglichen gefilterten Signals  $\bar{x}_a(t)$  Verzerrungen, welche als  $(\sin x)/x$ -

$x$ -Verzerrungen bekannt sind. Zudem sind die Frequenzen außerhalb des Grundintervalls unvollständig unterdrückt. Die Unterdrückung dieser Anteile kann durch ein nachfolgendes Tiefpassfilter verbessert werden, schliesslich liegt ein geglättetes Signal  $\tilde{x}_a(t)$  vor.

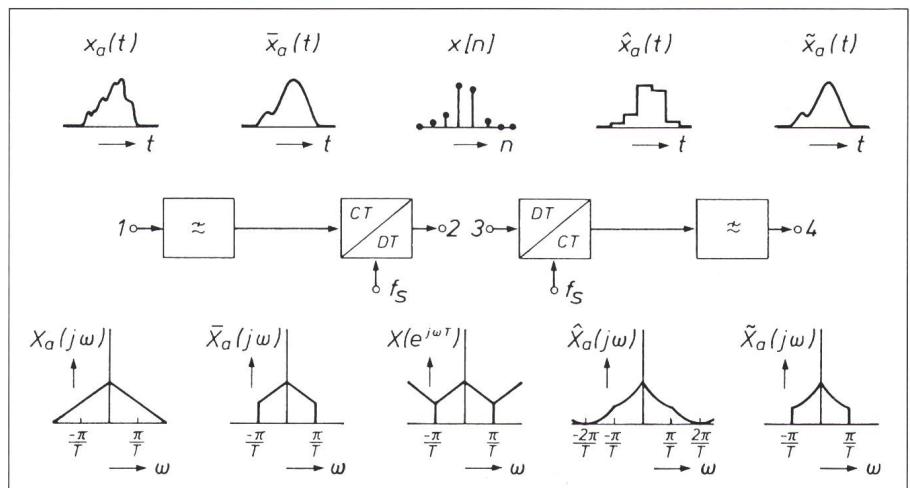
Das Signal  $\hat{x}_a(t)$  in der Figur 45 besteht aus einer Reihe von Rechteckimpulsen, deren Fouriertransformation die Form einer  $(\sin x/x)$ -Funk-

tion hat. Dieselbe Verzerrung ist natürlich auch in  $\tilde{X}_a(j\omega)$  von  $\tilde{x}_a(t)$  für  $|\omega| < \pi/T$  vorhanden. Normalerweise wird diese Verzerrung durch eine entsprechende  $x/(\sin x)$ -Vorverzerrung im Grundintervall zwischen den Punkten 2 und 3 (Fig. 45) rückgängig gemacht [19].

## 4.2 Unterschiedliche Abtastraten

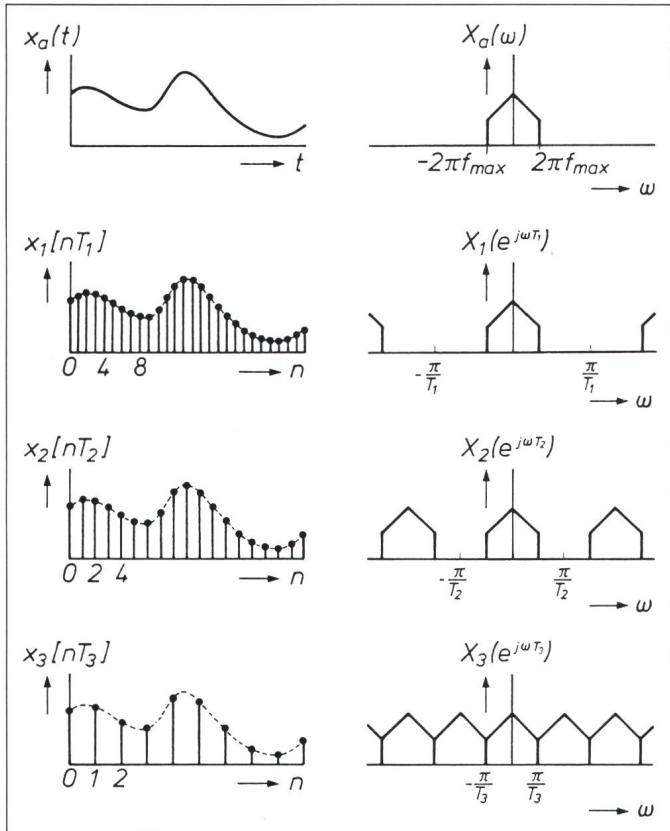
Bislang wurden lediglich diskrete Systeme mit einer einzigen Abtastrate behandelt. Sowohl Eingangs-, Ausgangs- als auch die internen Signale besaßen alle die Abtastrate  $f_s = 1/T$ . Wie aber aus dem letzten Abschnitt bekannt ist, kann bei der Abtastung  $f_s$  beliebig gewählt werden, solange das Abtasttheorem ( $f_s \geq 2f_{\max}$ ) eingehalten wird. Dann ergibt jedes zeitdiskrete Signal, unabhängig von  $f_s$ , eine vollständige Darstellung des ursprünglichen kontinuierlichen Signals (Fig. 46).

Bei der digitalen Signalverarbeitung ist die Anzahl Rechenoperationen, welche pro Sekunde ausgeführt werden müssen, unmittelbar mit der Abtastrate verbunden: Je höher  $f_s$ , desto mehr Operationen müssen pro Sekunde durchgeführt werden. Man ist deshalb interessiert,  $f_s$  so tief wie möglich, am besten möglichst in der Nähe von  $2f_{\max}$ , zu halten. Nun kann aber die Maximalfrequenz  $f_{\max}$  für verschiedene Signale innerhalb eines Systems sehr unterschiedlich sein, in einem Tiefpassfilter ist beispielsweise  $f_{\max}$  des Ausgangssignals kleiner, oft sogar we-



Figur 45. Praktische Abtastung und Rückgewinnung

In der praktischen Realisierung wird das analoge Signal  $x_a(t)$  vor der Abtastung durch einen Vorfilter mit Tiefpasscharakteristik gefiltert, um sicherzustellen, dass das Abtasttheorem eingehalten wird. Bei der Rückwandlung der Impulsfolge wird die Funktion zuerst durch das Signal  $\hat{x}_a$  (Schrittfunction) approximiert. Die anschliessende erneute Tiefpassfilterung entfernt die Unstetigkeiten. Im unteren Bilddrittel sind die dazugehörigen Spektren dargestellt.



**Figur 46  
Änderung der  
Abtastrate**

Ein kontinuierliches Signal  $x_a(t)$  und drei diskrete Signale  $x_1[nT_1]$ ,  $x_2[nT_2]$  und  $x_3[nT_3]$ , welche durch Abtastung von  $x_a(t)$  mit verschiedenen Abtastraten gewonnen wurden. Die dazugehörigen Spektren zeigen, dass das Abtasttheorem in allen drei Fällen eingehalten wurde; alle drei diskreten Signale sind also vollständige Darstellungen des analogen Signals.

sehr einfach bestimmen. Zu diesem Zweck zeigt die Figur 48 für den Fall  $R = 3$  die zu einem SRD bzw. SRI gehörenden Ein- und Ausgangsspektren. Man sieht so beispielsweise, dass das Grundintervall des Ausgangsspektrums im Fall des SRD (Fig. 48a) um den Faktor  $R$  kleiner wird; die gestrichelten Linien zeigen, dass in  $Y(e^{j\omega T_2})$  ein spektrales Überlappen (Aliasing) auftreten kann, falls das Spektrum  $X(e^{j\omega T_1})$  nicht genügend schmal ist. Dies ist offenbar dann der Fall, wenn eine Abtastung von  $x[nT_1]$  mit  $f_{s2}$  das Abtasttheorem verletzt. Umgekehrt wird bei einem SRI das Grundintervall des Ausgangssignals um den Faktor  $R$  grösser, wobei  $X(e^{j\omega T_1})$  im Grundintervall von  $Y(e^{j\omega T_2})$  genau  $R$  mal repetiert wird.

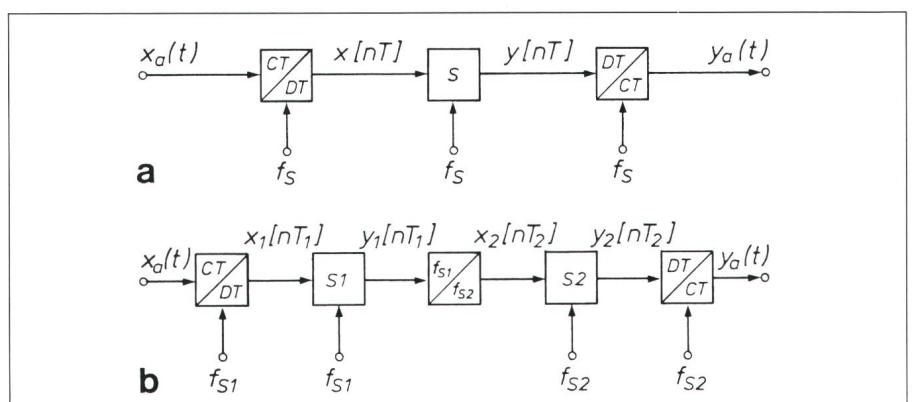
Um ein spektrales Überlappen zu verhindern, ist vor dem SRD ein ideales diskretes Tiefpassfilter, das einen Durchlassbereich  $|\omega| < \pi/T_1$  und eine Abtastfrequenz  $1/T_1$  besitzt, zu schalten. Diese Kombination wird als Dezimator bezeichnet und kann nur approximativ realisiert werden.

Die periodischen Wiederholungen innerhalb des Grundintervalls des Ausgangssignalsspektrums  $Y(e^{j\omega T_2})$  eines SRI können durch ein ideales diskretes Tiefpassfilter, das einen Durchlassbereich  $|\omega| < \pi/T_1$  und eine Abtastfrequenz  $1/T_2$  besitzt, entfernt werden; man erhält so einen Interpolator, welcher aber ebensowenig exakt realisiert werden kann. Sein Ausgangssignal ist geglättet, d.h. enthält nicht mehr die vielen Abtastpunkte mit Wert 0 wie  $y[nT_2]$ .

In der Praxis findet man den SRD meistens einem diskreten Filter nachfolgend. Eine derartige Kombination von Netzwerken bezeichnet man als *Dezimatorfilter*, weil die Abtastrate seit-

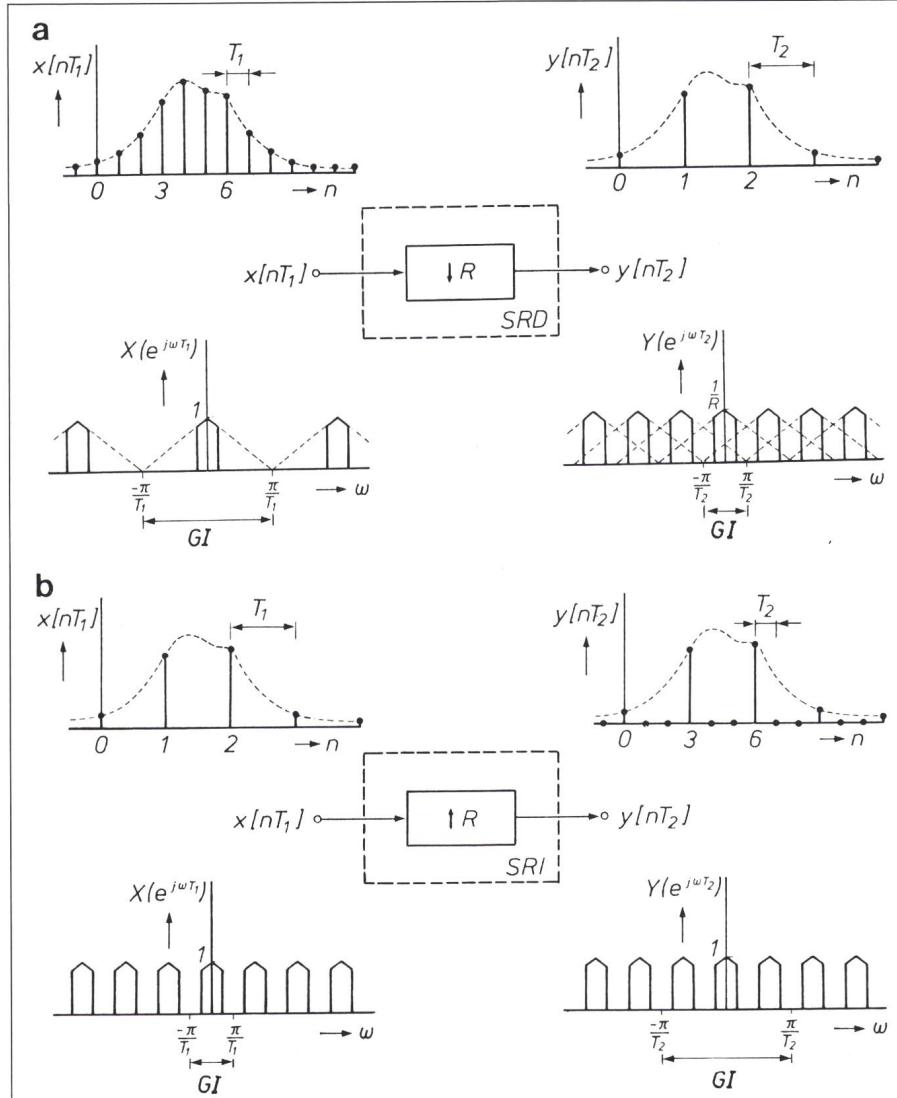
lich einfach zu realisieren, hingegen ist ihr Einfluss auf die Arbeitsweise eines ganzen Systems schwieriger zu bestimmen. Sowohl SRD als auch SRI sind zwar *linear*, aber *zeitvariant*. Aus diesem Grund können sie nicht durch Systemfunktion, Übertragungsfunktion oder Impulsantwort beschrieben werden.

Man kann nun allerdings das Verhalten auf eine andere Art und Weise



**Figur 47. Diskrete Verarbeitung eines analogen Signals**

- Es wird nur eine Abtastrate  $f_s$  verwendet. Diese muss hoch genug sein, um sicherzustellen, dass das Abtasttheorem an allen Punkten im diskreten System S eingehalten wird.
- Ist die höchste vorkommende Frequenz nicht an allen Orten gleich, so kann es sinnvoll sein, in verschiedenen Systemteilen ( $S_1$ ,  $S_2$ ) verschiedene Abtastraten ( $f_{s1}$ ,  $f_{s2}$ ) zu verwenden; diese werden in einem geeigneten Umwandler angepasst.



Figur 48. Umwandlung der Abtastrate

- a Ein SRD (sampling rate decreaser) ist eine Schaltung, welche die Abtastrate um einen ganzzahligen Faktor  $R = f_{s1}/f_{s2} = T_2/T_1$  reduziert, indem sie jeweils  $R - 1$  Abtastwerte entfernt. In diesem Beispiel wurde  $R = 3$  gewählt. GI bezeichnet das Grundintervall.
- b Ein SRI (sampling rate increaser) ist eine Schaltung, welche die Abtastrate um einen ganzzahligen Faktor  $R = f_{s2}/f_{s1} = T_1/T_2$  erhöht, indem sie jeweils  $R - 1$  Abtastwerte mit dem Wert hinzufügt. Auch in diesem Beispiel ist  $R = 3$ .

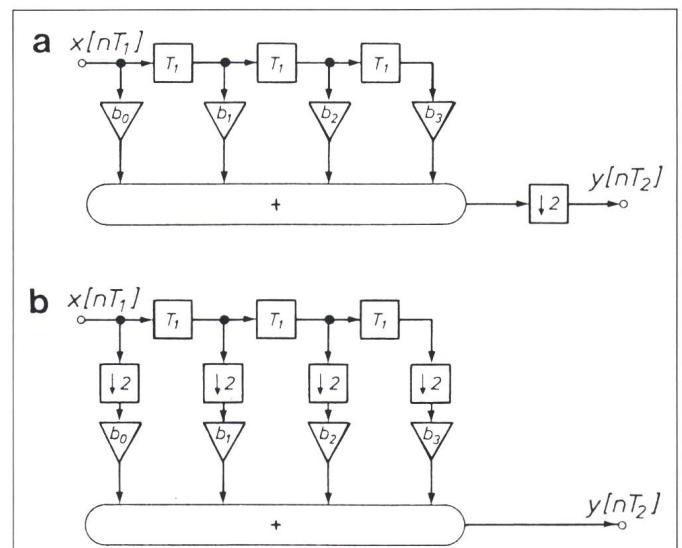
nes Ausgangssignals niedriger ist als diejenige des Eingangs. Es ist aber zu beachten, dass dieses Filter *kein* lineares zeitinvariantes diskretes System (LTD-System) ist. Nun ist es aber nicht sehr sinnvoll, im Filter Abtastwerte zu bestimmen, um sie anschliessend im SRD zu ignorieren. Vielmehr können die Schaltungen geeignet miteinander verflochten werden, dies ist in der Figur 49 zu ersehen.

Die Kaskade eines SRI und eines diskreten Filters bezeichnet man als *Interpolationsfilter*. Auch hier kann man von der Tatsache Gebrauch machen, dass eine grosse Zahl von Abtastpunkten den Wert 0 besitzt und so eine geeigneteren verflochtenen Schaltung finden (Fig. 50). Offenbar ist auch

Figur 49

#### Dezimatorfilter

- a Kombination eines diskreten Filters mit einem SRD von  $R = 2$ . In dieser Schaltung sind vier Multiplikationen pro Intervall  $T_1$  notwendig.
- b Durch Verwendung mehrerer SRD kann dasselbe Signal  $y[nT_2]$  mit lediglich vier Multiplikationen pro Intervall  $T_2 = 2T_1$  gewonnen werden.

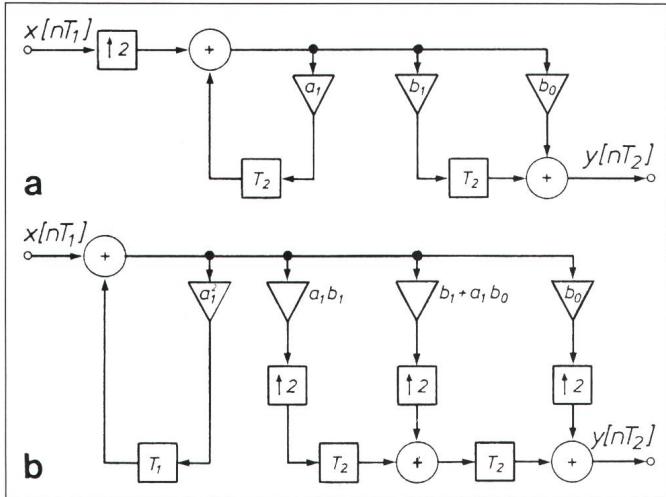


das Interpolationsfilter keine LTD-Schaltung. Eine wichtige Anwendung von Dezimator- und Interpolationsfiltern findet man bei der Abtastung und der Rückwandlung diskreter in kontinuierliche Signale. Erlauben die tatsächlichen Wandler eine erhöhte Abtastrate, so können die Vor- bzw. nachfolgenden analogen Filter durch die Anwendung von Dezimatoren und Interpolatoren wesentlich vereinfacht werden [19]. Durch eine geeignete Wahl von Dezimator- und Interpolationsfiltern können übrigens auch rationale Abtastratenverhältnisse  $R$  erreicht werden [20].

### 4.3 Von kontinuierlichen zu diskreten Werten

Im ersten Teil dieser Reihe wurde erwähnt, dass digitale Signale nur einen aus einer endlich grossen Anzahl diskreter Werte annehmen können. Dies gilt auch für andere Größen eines digitalen Systems, wie z.B. für die Koeffizienten der Filter. Nun wird aber bei der praktischen Anwendung digitaler Systeme oft von analogen – demnach wertekontinuierlichen – Signalen ausgegangen, wie dies in den bisherigen Betrachtungen auch der Fall war.

Der Übergang von wertekontinuierlichen zu wertediskreten Signalen lässt sich nun nie mehr völlig rückgängig machen, da die Anzahl erlaubter Signalwerte in jedem Fall reduziert wird, das heisst Information verlorengeht. Drei Punkte sind bei diesem Übergang zu beachten: die Quantisierung, der Überlauf und die Zahlendarstellung der Signalwerte.



**Figur 50.** Interpolationsfilter

- a Die Interpolation wird durch Kombination eines diskreten Filters mit einem SRI erreicht und benötigt sechs Multiplikationen pro Intervall  $T_1$ .
- b Durch geeignete Verflechtung der SRI kann die Anzahl der Multiplikationen auf vier pro Intervall  $T_1 = 2T_2$  reduziert werden.

## Quantisierung

Unter Quantisierung versteht man den Vorgang, bei welchem eine Grösse  $x$  derart in ein  $x_Q$  umgewandelt wird, dass  $x_Q$  zwar ungefähr gleich gross ist wie  $x$ , aber aus weniger Werten aufgebaut ist. Den Zusammenhang zwischen  $x_Q$  und  $x$  bezeichnet man als Quantisierungscharakteristik. Die gebräuchlichsten Methoden sind in der Figur 51 zu sehen: Rundung auf die nächstgelegene Schwelle, Quantisierung auf den nächstkleineren Wert und Quantisierung auf den Wert mit nächstgelegenem kleinerem Betrag. In diesen Beispielen ist die Differenz  $q$  zwischen zwei aufeinanderfolgenden Werten von  $x_Q$  konstant.

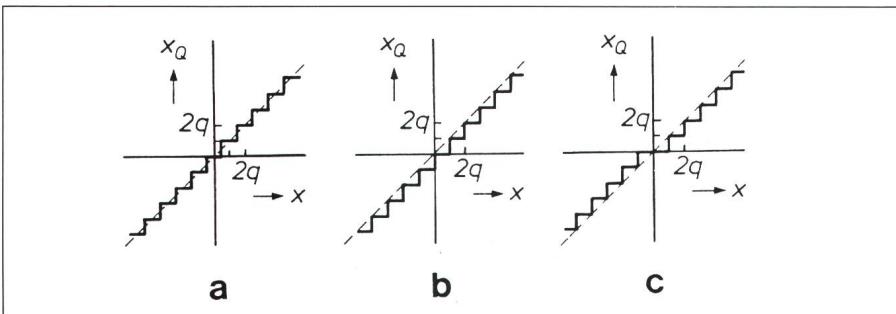
## Überlauf (Overflow)

Ein Überlauf tritt dann ein, wenn der Signalwert  $x$  ausserhalb eines be-

grenzten Intervalls  $(-X, X)$  zu liegen kommen sollte, wobei dies vom System aber verunmöglicht wird. Formelmässig wird also  $x$  derart in ein  $x_p$  umgewandelt, dass

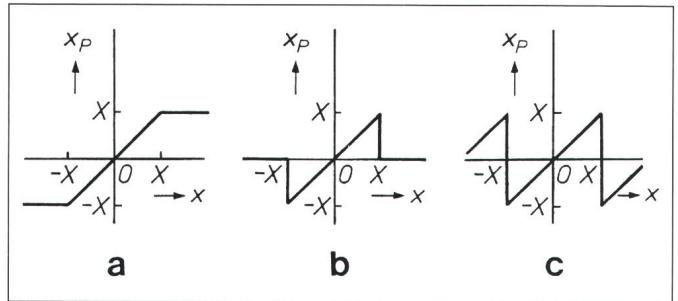
$$x_p \begin{cases} = x & |x| \leq X \\ \leq X & |x| > X \end{cases} \quad (92)$$

Den Zusammenhang zwischen  $x$  und  $x_p$  bezeichnet man als Overflow-Charakteristik. Auch hier sind drei Beispiele solcher Charakteristiken zu sehen (Fig. 52): Sättigung, Zurücksetzen auf Null und Repetition des Quantisierungsbereichs (Sägezahn-Overflow). Theoretisch kann jedes beliebige Quantisierungsverhalten mit jedem beliebigen Overflow-Verhalten kombiniert werden.



**Figur 51.** Quantisierung

- Die Figur zeigt drei Möglichkeiten der Quantisierung (mit Quantisierungsintervall  $q$ ):
- a Rundung auf die nächstgelegene Schwelle
  - b Quantisierung auf den nächstkleineren Wert
  - c Quantisierung auf den Wert mit nächstgelegenem kleinerem Betrag



**Figur 52.** Overflow

- Drei Möglichkeiten des Overflow-Verhaltens sind:
- a Sättigung
  - b Zurücksetzen auf Null
  - c Repetition des Quantisierungsbereichs

## Zahlendarstellung

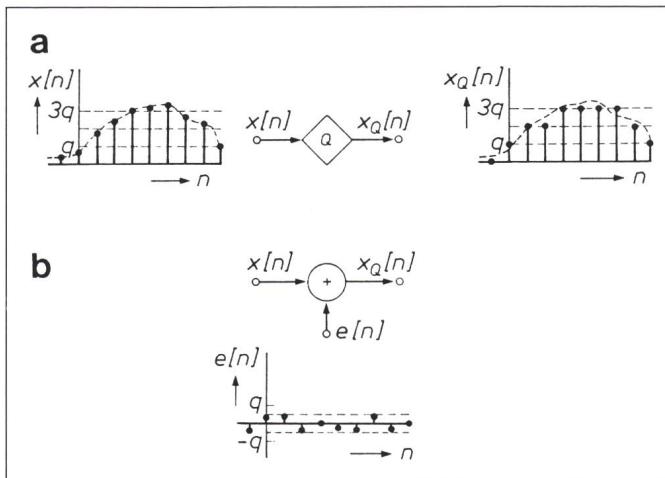
In einem digitalen System werden Grössen normalerweise durch eine Gruppe (Wort) von beispielsweise  $B$  Bits dargestellt. Die Quantisierung (inklusive Overflow-Behandlung) hat demnach  $2^B$  verschiedene Werte zur Verfügung. Jeder dieser Werte entspricht dann genau einer Bit-Kombination. Welche Kombination zu welchem Wert gehört, wird durch die verwendete Zahlendarstellung bestimmt. Auch hier sind verschiedene Möglichkeiten denkbar. Die vier gebräuchlichsten Methoden sind in der Tabelle II

Dezimalwert	Vorzeichen und Betrag	Einerkomplement	Zweierkomplement	Offset-Binär-code
+4	-	-	-	111
+3	011	011	011	110
+2	010	010	010	101
+1	001	001	001	100
+0	000	000	000	-
-0	100	111	-	011
-1	101	110	111	010
-2	110	101	110	001
-3	111	100	101	000
-4	-	-	100	-

**Tabelle II.** Beispiele für die binäre Darstellung von Zahlen

für den Fall  $B = 3$  zu sehen. Es zeigt sich, dass je nach verwendeter Quantisierung, bzw. Overflow-Behandlung die eine oder die andere Zahlendarstellung geeigneter ist.

Die Tatsache, dass die Wortlänge  $B$  in digitalen Systemen immer endlich



**Figur 53**  
Quantisierungsgeräusch

- a Die Umwandlung eines diskreten Signals  $x[n]$  mit kontinuierlicher Amplitude in ein wertediskretes Signal  $x_Q[n]$  kann als Addition eines Rauschsignals  $e[n] = x_Q[n] - x[n]$  aufgefasst werden.
- b Ersatzschaltung des Rauschquellenmodells

gross ist, hat einige wichtige Konsequenzen, welche im nächsten Abschnitt behandelt werden sollen. Vorher soll aber noch einmal darauf hingewiesen werden, dass der Prozess, welchen man normalerweise mit Analog/Digitalwandlung (A/D-Wandlung) bezeichnet, aus zwei Schritten besteht, nämlich der Umwandlung von zeitkontinuierlichen in zeitdiskrete Signale und der Quantisierung von wertekontinuierlichen zu wertediskreten Signalen.

#### 4.4 Der Einfluss endlicher Wortlängen

In diesem Abschnitt werden drei Situationen betrachtet, bei welchen endliche Wortlängen einen wesentlichen Einfluss ausüben: Die A/D-Wandlung, der Entwurf digitaler Filter und die Arithmetik digitaler Berechnungen.

##### A/D-Wandlung

Bei der Quantisierung wertediskreter Signale  $x[n]$  in  $x_Q[n]$  nimmt man normalerweise an, dass  $x_Q[n]$  durch Addition eines Rauschsignals  $e[n] = x_Q[n] - x[n]$  aus  $x[n]$  (Fig. 53) gewonnen wurde. Für den Fall, wo die Rundungsquantisierung verwendet wird, kann man die Leistung dieses sogenannten Quantisierungsgeräusches berechnen zu

$$P_e = \frac{q^2}{12} \quad (93)$$

wobei  $q$  die Schrittweite der Amplitudenquantisierung bezeichnet. Nimmt man weiter an, dass die Abtastwerte

von  $x_Q[n]$  durch Worte der Länge  $B$  dargestellt werden und dass das ursprüngliche Signal  $x[n]$  ein Sinussignal ist, dessen Amplitude gerade so gross ist, dass kein Overflow auftritt, dann kann das Signal/Quantisierungsgeräusch-Verhältnis in dB bestimmt werden zu

$$\frac{P_x}{P_e} = 6B + 1,76 \text{ (dB)} \quad (94)$$

Aus dieser Gleichung kann eine wichtige allgemeingültige Folgerung abgeleitet werden: Wird die Wortlänge  $B$  eines digitalen Systems um ein Bit erhöht, dann beträgt die Verbesserung des Signal/Quantisierungsgeräusch-Verhältnisses maximal 6 dB.

##### Entwurf digitaler Filter

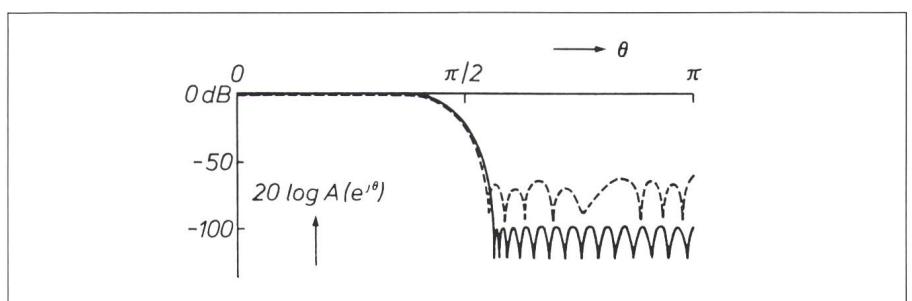
Im dritten Teil wurden Methoden für den Entwurf digitaler Filter angegeben. Diese liefern normalerweise beliebig exakte Werte für die Filterkoeffizienten. In einem praktischen Digi-

talfilter ist nun aber die Anzahl Bits für die Darstellung dieser Koeffizienten schon aus Preisgründen so klein wie möglich zu halten. Die gefundenen Koeffizientenwerte müssen demnach quantisiert werden, was eine Änderung der Filtercharakteristik zur Folge hat [21] z. B. weil die Lage der Pole und Nullstellen verändert wurde. Diese Änderung kann derart ausgeprägt sein, dass das Filter mit den quantisierten Koeffizienten die ursprünglichen Spezifikationen nicht mehr erfüllt (Fig. 54) oder unter Umständen sogar instabil wird. Das Filter bleibt aber trotz der Quantisierung der Koeffizienten linear, zeitinvariant und vom Eingangssignal unabhängig. Lediglich die Charakteristik ändert sich, und zwar in einer Weise, die berechnet werden kann.

Nun reagieren gewisse Filterstrukturen empfindlicher auf die Quantisierung der Koeffizienten als andere. So wurde bereits im Abschnitt über diskrete Filterstrukturen erwähnt, dass die Sensitivität auf solche Änderungen um so kleiner ist, je kleiner die Anzahl Koeffizienten ist, von denen die Pole und Nullstellen abhängen.

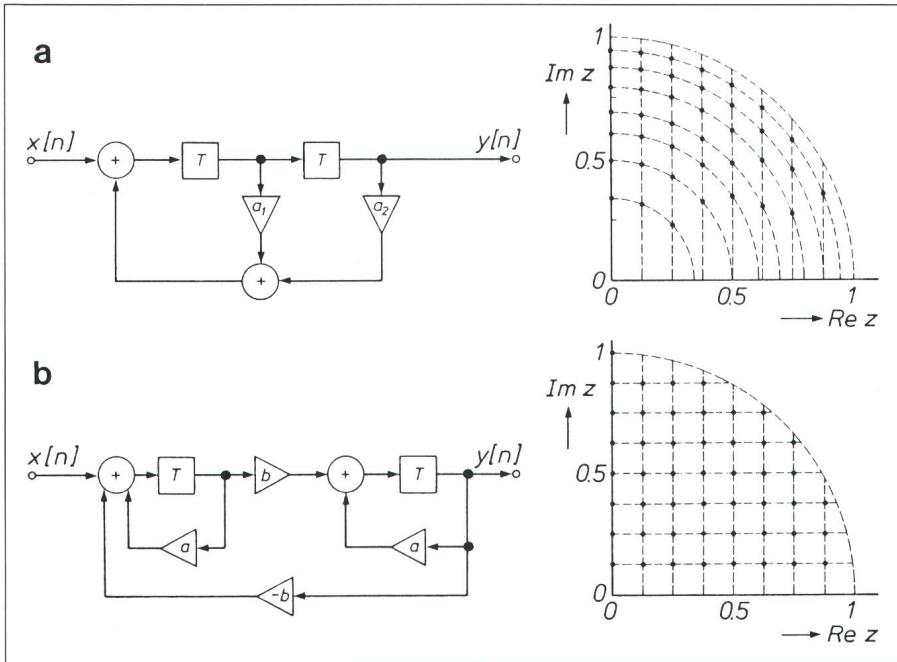
Ein anderer wichtiger Effekt ist, dass – wegen der Quantisierung der Koeffizienten – sich die möglichen Positionen für Pole und Nullstellen bei verschiedenen Filterstrukturen (mit an sich gleichen Übertragungsfunktionen) verschieden über die  $z$ -Ebene verteilen. Der Unterschied kann recht beträchtlich sein, vor allem dann, wenn die Dichte der möglichen Positionen klein ist.

Die Figur 55 zeigt diesen Effekt für zwei verschiedene, rein rekursive Filter zweiter Ordnung. Für jedes Filter sind die möglichen Positionen für die Pole eingezeichnet, falls die Koeffizienten auf vier Bit (eines davon das Vorzeichen) quantisiert sind. Wegen



**Figur 54.** Quantisierungsfehler bei einem Transversalfilter

Die Figur zeigt die Amplitudencharakteristik eines Transversalfilters mit 49 Stützstellen, einerseits mit unquantisierten Koeffizienten (ausgezogene Kurve), andererseits mit auf 12 Bit gerundeten Koeffizienten (gestrichelte Kurve).



**Figur 55. Pole eines Digitalfilters**

- a Rein rekursives Filter zweiter Ordnung von Direkt-Form-Struktur, rechts die Lage der möglichen Pole in der  $z$ -Ebene, falls die Koeffizienten  $a_1$  und  $a_2$  auf vier Bit (inklusive ein Vorzeichenbit) quantisiert werden.
- b Rekursives Filter zweiter Ordnung mit einer Kaskadenstruktur und einer Rückführung. Bei gleicher Quantisierung der Koeffizienten  $a$  und  $b$  wie in a ergeben sich wesentliche Unterschiede in der Lage der möglichen Pole.

der Symmetrie der Pole ist in der Figur lediglich ein Quadrant der  $z$ -Ebene abgebildet.

## Digitale Arithmetik

Den störendsten Einfluss hat eine Begrenzung der Wortlänge dort, wo Zwischenresultate in digitalen Systemen quantisiert werden müssen [22]. Addition und Multiplikation zweier Größen erhöhen hier die Anzahl Stellen (bzw. Bits) des Resultats. Insbesondere in rekursiven Schaltungen bringt dies jedoch Probleme mit sich, da dieses Resultat in der nachfolgenden Berechnung erneut verwendet wird. Dazu sei beispielsweise die Figur 55a betrachtet: Haben sowohl  $y[n]$  als auch  $a_2$  eine Wortlänge von vier Bits, so kann deren Produkt bereits sieben Bits besitzen. Durch die Addition mit dem nächsten Eingangswert kann das Signal vor dem ersten Verzögerungsglied bereits wieder zusätzliche Bits benötigen. Bei rekursiven Strukturen ist man also gezwungen, die Wortlänge von Zwischenresultaten zu begrenzen. Bei nichtrekursiven Strukturen kann deren Anzahl Stellen bei quantisierten Eingangssignalen und Koeffizienten zwar nicht unendlich wachsen, häufig

ist aber trotzdem eine Begrenzung auf eine relativ kleine Anzahl Bits notwendig. Auch bei den Zwischenresultaten kann man zwischen den verschiedenen Formen von Quantisierung und Overflow-Behandlung auswählen und erhält so Filter mit unterschiedlichem Verhalten.

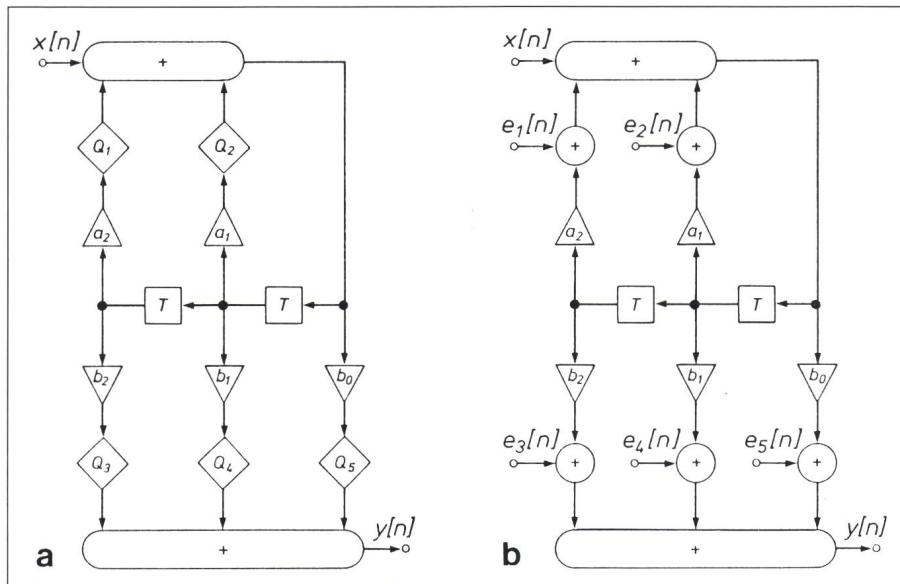
Die Analyse der Einflüsse einer derartigen Wortlängenbegrenzung ist deshalb schwierig, weil das Filter genommenen nichtlinear ist. So ergibt sich eine starke Verzerrung des Signals bei Overflow, es kann sogar geschehen, dass wegen der Begrenzung Schwingungen mit grosser Amplitude auftreten. Die Filter sind deshalb so zu entwerfen, dass dieser Fall nicht oder nur sehr selten auftritt. Dies geschieht durch sogenannte *Skalierung* bei Filtern, die aus einzelnen kaskadierten Stufen bestehen. Man führt dazu eine Multiplikation mit einem konstanten Faktor  $F < 1$  zwischen den Stufen ein, um einen Überlauf in der folgenden Stufe zu verhindern. Hat dieser Faktor die Form  $F = 2^{-n}$ , wobei  $n$  eine ganze Zahl ist, dann entspricht die Multiplikation einer Rechtsverschiebung der Zahl um eine oder mehrere binäre Stellen. Gelegentlich kann auch eine Multiplikation mit einem Faktor  $F > 1$  eingeführt werden, falls es sich während

dem Filterentwurf zeigt, dass sonst die höchstwertigen Bits unbenutzt bleiben würden. Nach diesen Massnahmen braucht der Overflow nicht mehr weiter berücksichtigt zu werden.

Als nächstes wird versucht, den Einfluss der Quantisierung der Zwischenresultate zu bestimmen. Es zeigt sich, dass hier ein unerwünschtes «Rauschsignal», ähnlich dem der A/D-Wandlung, erscheint. Dieses Rauschen entsteht überall dort, wo ein Signal quantisiert wird. Außerdem erfährt es auf dem Weg zum Ausgang eine Filterung, so dass sein Anteil in  $y[n]$  gefärbt ist. Um eine quantitative Aussage zu erhalten, wird ein Rauschmodell eingeführt, welches auch bei der A/D-Wandlung verwendet wurde: jeder Quantisierer wird durch Zusetzen eines Rauschsignals ersetzt (Fig. 56). Es wird angenommen, dass jede dieser Quellen ein Rauschen mit einem bestimmten spektralen Verlauf erzeugt. Im Fall von Rundungsquantisierung hat das Rauschen beispielsweise einen flachen Verlauf und die Leistung  $q^2/12$ . Nun kann der Rauschanteil jeder Quelle im Ausgangssignal bestimmt werden.

Eine derartige Analyse ergibt häufig sehr nützliche Resultate, obwohl sie auf einigen Annäherungen beruht, die in der Realität nicht zutreffen. So wird etwa angenommen, die Rauschquellen seien sowohl untereinander als auch von den Signalen im Filter unabhängig. Dies ist dann ungefähr richtig, wenn das Eingangssignal  $x[n]$  genügend unregelmässig ist. Ist das Signal hingegen über längere Zeit konstant<sup>2</sup> oder periodisch, dann können periodische Interferenzsignale, sogenannte *Grenzzyklen*, im Ausgangssignal auftreten. Handelt es sich bei  $x[n]$  beispielsweise um ein Sprachsignal, dann treten diese Grenzzyklen in Sprechpausen auf, also genau dort, wo sie am störendsten wirken. Man betrachte beispielsweise das einfache Filter der Figur 57, wo das Zwischenresultat durch Rundung auf die nächstgelegene ganze Zahl gerundet wird. Es sei beispielsweise  $x[n] = 0$  für  $n > 0$  und  $y[0] = 7q$ , dann ist sofort zu erkennen,

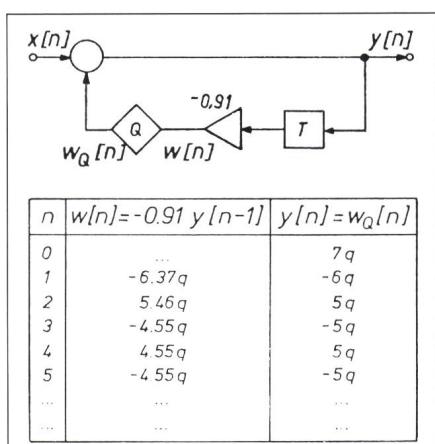
<sup>2</sup> Anm. des Übersetzers: Ein ähnlicher Fall liegt vor, wenn das Digitalsystem eine sehr kleine Anzahl Bits zur Quantisierung verwendet: Bei Deltamodulation beispielsweise findet eine 1-Bit-Quantisierung statt.



Figur 56. Wortlängenbegrenzung bei einem digitalen Filter

- a Beispiel eines digitalen Filters, bei welchem die «Zwischenresultate» nach jeder Multiplikation quantisiert werden.
- b Das Rauscherhalten kann anhand des Rauschquellenmodells veranschaulicht werden, indem jeder der Quantisierer  $Q_1, \dots, Q_5$  durch eine Rauschsequenz  $e_1[n], \dots, e_5[n]$  ersetzt wird. Bei Rundungsquantisierung besitzt jede dieser Rauschquellen eine Leistung von  $q^2/12$  und ein flaches («weisses») Spektrum. Die Rauschsignale werden nun entsprechend ihrer Lage innerhalb der Schaltung mehr oder weniger stark gefiltert. In diesem Beispiel erscheinen die Signale  $e_3[n], e_4[n]$  und  $e_5[n]$  ungefiltert im Ausgangssignal  $y[n]$ , während  $e_1[n]$  und  $e_2[n]$  exakt wie das Eingangssignal  $x[n]$  gefiltert werden.

dass eine Schwingung mit der Amplitude  $5q$  und der Periode  $N = 2$  auftritt. In rekursiven Filtergliedern höherer Ordnung sind derartige Grenzzyklen



Figur 57. Grenzzyklus

In diesem einfachen digitalen Filter erscheint offenbar ein Grenzzyklus mit Periode  $N = 2$  und Amplitude  $5q$ , falls  $x[n] = 0$  für  $n > 0$  und der Anfangsbedingung  $y[0] = 7q$ . Der Quantisierer  $Q$  runden auf das nächstgelegene Vielfache der Schwelle  $q$ .

ein bekanntes Problem und müssen im allgemeinen genau untersucht werden. Man findet beispielsweise, dass eine Quantisierung durch Begrenzung auf den nächstkleineren Wert des Betrags (Fig. 51c) weniger anfällig auf Grenzzyklen ist als etwa andere Quantisierungsverfahren. Man kann ausserdem durch Verkleinerung der Quantisierungsschwelle  $q$ , d.h. durch Vergrösserung der Anzahl Bits in einem Wort, die Amplitude der Grenzzyklen absolut gesehen – beispielsweise in Volt, nicht aber in Quantisierungsschritten – verringern. Durch erneute, etwas gröbere Quantisierung des Ausgangssignals  $y[n]$  kann man die Grenzzyklen scheinbar zum Verschwinden bringen.

## 5. Zusammenfassung

Die digitale Signalverarbeitung zeichnet sich durch zwei grundlegende Charakteristiken aus: Prozesse ändern sich nur zu gewissen *diskreten Zeitpunkten*, ausserdem können sie nur ge-

wisse *diskrete Werte* annehmen. Theoretische Analysen für zeitdiskrete Prozesse benötigen besondere Werkzeuge, wie die Fouriertransformation für diskrete Signale, die  $z$ -Transformation, die diskrete und die schnelle Fouriertransformation (DFT und FFT) sowie die Differenzengleichungen. Hier wird der wertdiskrete Aspekt ausser acht gelassen. Mit diesen Werkzeugen findet man viele Parallelen zu der analogen System- und Signaltheorie. Es zeigt sich deshalb, dass analoge Techniken (etwa der Filterentwurf) als Ausgangspunkt für den Entwurf digitaler Systeme dienen können. Der Übergang von zeitkontinuierlichen zu zeitdiskreten sowie von wertekontinuierlichen zu wertdiskreten Signalen und Systemen ergibt eine Vielzahl neuer Schaltungen, aber auch eine Vielzahl neuer Probleme; erwähnt wurden Aliasing, Instabilität, Quantisierungsrauschen. Diese Probleme bilden einen eigenen Bereich in der Theorie der digitalen Signalverarbeitung.

## Literatur

- [18] A.J. Jerri: The Shannon sampling theorem—its various extensions and applications: A tutorial review. Proc. IEEE 65(1977)11, p. 1565...1595.
- [19] J. Nijhof: An integrated approach to CD players. Electronic Components and Applications 6(1964)4, p. 209...222.
- [20] R.E. Crochiere and L.R. Rabiner: Multirate digital signal processing. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1983.
- [21] V.B. Lawrence and A.C. Salazar: Finite precision design of linear-phase FIR filters. Bell Syst. Techn. J. 59(1980)9, p. 1575...1598.
- [22] T.A.C.M. Claasen, W.F.G. Mecklenbräuker and J.B.H. Peek: Effect of quantization and overflow in recursive digital filters. IEEE Trans. ASSP 24(1976)6, p. 517...529.

## Korrigenda

Im Teil I, Heft 77(1986)11, haben sich bei der Übertragung ins Deutsche leider ein paar Druckfehler eingeschlichen. Bitte korrigieren Sie:

- Gl. 4 und 5: falls  $n \geq 0$
- Gl. 22c:  $x[n-i] = \mathcal{F}_D^{-1} [e^{-j\theta} X(e^{j\theta})]$
- Gl. 29a, 29b,  
29d:  $\mathcal{J}^{-1}$  statt  $\mathcal{Z}$
- Gl. 29c:  $x[n-i] = \mathcal{Z}^{-1} [z^{-i} X(z)]$
- Fussnote 2: Literaturhinweis [9] fällt weg!