Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen = Bulletin de l'Association suisse des électriciens, de l'Association des entreprises électriques suisses

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen

Band: 77 (1986)

Heft: 17

Artikel: Digitale Signalverarbeitung : Theoretische Grundlagen : Teil 3 : diskrete Filter

Autor: Enden, A. W. M. van den / Verhoeckx, N. A. M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-904263

Digitale Signalverarbeitung: Theoretische Grundlagen

Teil 3: Diskrete Filter

A. W. M. van den Enden und N. A. M. Verhoeckx

In den ersten zwei Teilen dieser vierteiligen Aufsatzfolge[1] wurden die Grundlagen der diskreten Signale und Systeme behandelt. Der dritte Teil befasst sich mit den wichtigsten Vertretern der diskreten Systeme, den linearen diskreten Filtern. Insbesondere werden deren grundsätzliche Eigenschaften und die Methoden des diskreten Filterentwurfs behandelt.

La première et la deuxième des quatre parties de cet exposé[1] traitaient des bases des signaux et systèmes discrets. Cette troisième partie concerne les composantes les plus importantes des systèmes discrets: les filtres linéaires discrets, notamment leurs particularités fondamentales et les méthodes de leur élaboration.

Diese Aufsatzserie ist eine Übersetzung des gleichnamigen englischen Beitrags in Philips Techn. Review 42(1985)4. Die Übersetzung besorgte H. Ochsner, dipl. Ing. ETH, Institut für Kommunikationstechnik, ETH Zürich.

[1] Bull. SEV/VSE 77(1986)11 und 15

Adresse der Autoren
A. W. M. van den Enden
und *N. A. M. Verhoeckx*,
Philips Research Laboratories,
NL-5600 JA Eindhoven.

3.1. Definitionen

Ein diskretes Filter ist eine Schaltung (oder ein Algorithmus), welche ein Eingangssignal derart in ein Ausgangssignal umwandelt, dass dessen Spektrum in einer vordefinierten Art mit dem Spektrum des ersteren verknüpft ist. So werden beispielsweise gewisse Frequenzkomponenten gedämpft oder ganz unterdrückt.

Genauso wie im analogen Fall werden die diskreten Filter aufgrund ihrer Übertragungsfunktion (d.h. Amplituden- und Phasencharakteristik) klassifiziert. Diejenigen Filter, die sich durch einen ausgeprägten Amplitudengang auszeichnen, können unterteilt werden in

- Tiefpassfilter,
- Hochpassfilter,
- Bandpassfilter und
- Bandsperren.

Typische Beispiele derartiger Filter zeigt die Figur 21. Wie bei den analogen Filtern existieren Regeln, mit deren Hilfe man ein diskretes Filter des einen Typs in ein Filter eines andern Typs umwandeln kann. Im weiteren gibt es Filter, die sowohl spezifizierte Amplituden- als auch Phasencharakteristiken aufweisen. Zwei derartige Filter wurden bereits im zweiten Teil erwähnt: das Allpassfilter und das linearphasige Filter. Das erste weist eine konstante Amplitudendämpfung und einen vorgegebenen Phasengang auf.

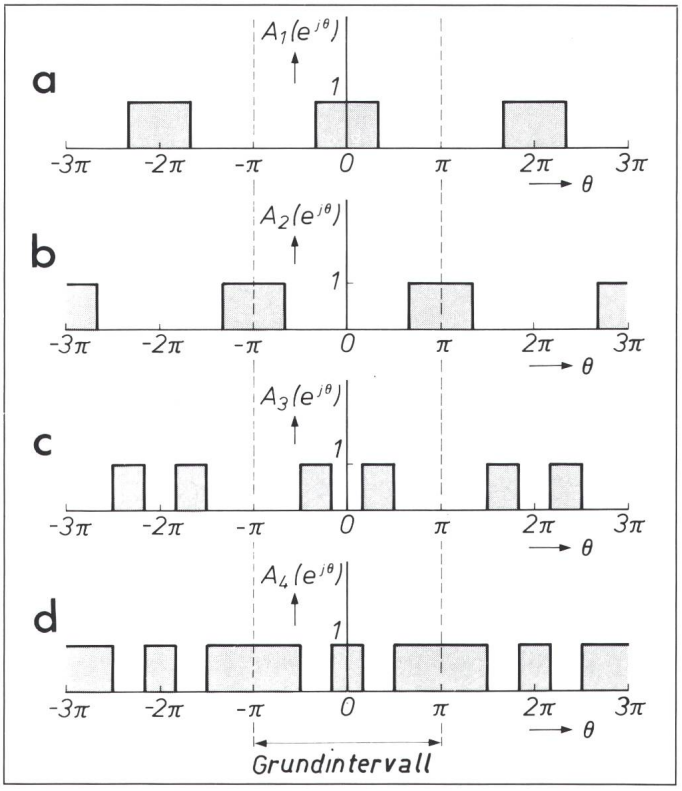

Fig. 21
Beispiel des Amplitudenganges einiger idealer Filter
a Tiefpass
b Hochpass
c Bandpass
d Bandsperre
Die Übertragungsfunktionen sind periodisch, Grundintervall $-\pi \leq \theta < \pi$.

Kombiniert man ein derartiges Filter mit einem Filter aus der Figur 21, so lassen sich Schaltungen realisieren, die nicht nur einen vorgegebenen Amplituden-, sondern auch einen vorgegebenen Phasengang besitzen. Die linearphasigen Filter werden sehr häufig in Fernsehempfängern und Datenübertragungssystemen eingesetzt. Es wird sich später zeigen, dass die Impulsantwort derartiger linearphasiger Filter ausgeprägte Symmetrien aufweist.

Weitere Beispiele spezieller Filter sind

- der Differentiator

$$H_D(e^{j\theta}) = j\theta, \qquad -\pi \leq \theta < \pi \quad (72)$$

- der Integrator

$$H_I(e^{j\theta}) = 1/j\theta, \qquad -\pi \leq \theta < \pi \quad (73)$$

- und der Hilbert-Transformator

$$H_H(e^{j\theta}) = \begin{cases} -j, & -\pi \leq \theta < 0 \\ +j, & 0 \leq \theta < \pi \end{cases} \quad (74)$$

Oft werden die Filter auch aufgrund ihrer Impulsantwort klassifiziert:

- Ist die Impulsantwort von endlicher Dauer, spricht man von einem FIR-Filter *(Finite Impulse Response)*.
- Dauert sie hingegen unendlich lange, so handelt es sich um ein IIR-Filter *(Infinite Impulse Response)*.

Diese beiden Filterklassen unterscheiden sich in vielfacher Hinsicht; einige Unterschiede seien hier erwähnt:

- Die Systemfunktion eines FIR-Filters enthält mit Ausnahme des Ursprungs nur Nullstellen und keine Pole, während ein IIR-Filter überall Pole besitzen kann.
- Der Phasengang eines FIR-Filters kann exakt linear sein.
- Ein FIR-Filter ist immer stabil, während ein IIR-Filter dann instabil ist, wenn sich Pole auf oder ausserhalb des Einheitskreises befinden.

Einige weitere Unterschiede werden später im Abschnitt über den Filterentwurf erwähnt.

3.2 Diskrete Filterstrukturen

Neben den eher grundlegenden Klassifikationen des vorangegangenen Abschnittes lassen sich Filter auch aufgrund ihrer durch das Blockschaltbild gegebenen Struktur einteilen. Einerseits zeigt sich, dass die Struktur

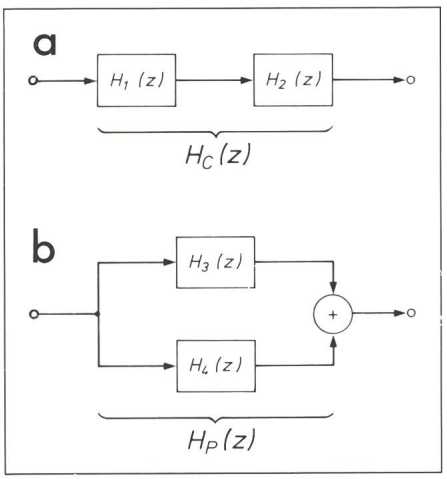

Fig. 22 Zusammengesetzte Filter
a Kaskadierung: $H_C(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$
b Parallelschaltung: $H_P(z) = H_3(z) + H_4(z)$

des Filters bereits gewisse Aussagen über die Filtereigenschaften erlaubt, anderseits kann ein Filter mit vorgegebenen Eigenschaften meistens durch verschiedene Strukturen realisiert werden.

Es lassen sich zudem wesentliche Unterschiede zwischen den verschiedenen Filterstrukturen beobachten, wenn man Quantisierungserscheinungen durch begrenzte Wortlängen in Betracht zieht. Davon wird in späteren Abschnitten die Rede sein.

Zuerst soll gezeigt werden, wie einzelne Filter oder Filterbausteine zu komplexeren Filtern zusammengefasst werden können. Dies geschieht meistens durch Kaskadierung oder Parallelschaltung (Fig. 22). Bei einer Kaskadierung von Blöcken erhält man die gesamte Systemfunktion durch Multiplikation der einzelnen Systemfunktionen, d.h.

$$H_C(z) = H_1(z)H_2(z) \quad (75)$$

Offenbar sind die Nullstellen von $H_c(z)$ gleich den Nullstellen von $H_1(z)$ und $H_2(z)$ zusammen, ebenso sind die Pole von $H_c(z)$ gleich den Polen von $H_1(z)$ und $H_2(z)$, es sei denn, ein Pol von $H_1(z)$ falle mit einer Nullstelle von $H_2(z)$ (oder umgekehrt) zusammen. In diesem Fall heben sie sich gerade auf und sind in $H_c(z)$ nicht mehr zu finden. Bei einer Parallelschaltung von Blöcken addieren sich die Teilsystemfunktionen:

$$H_P(z) = H_3(z) + H_4(z) \quad (76)$$

Auch hier sind die Pole des Gesamtfilters durch die Pole der Teilsysteme bestimmt, hingegen ist über die Nullstellen des Gesamtsystems keine allgemeine Aussage möglich.

Diskrete Filter werden ihrer Struktur nach unterschieden in

- rekursive diskrete Filter (RDF), welche mindestens einen Rückkopplungspfad aufweisen (z. B. die Schaltungen der Figuren 15*b* und *c* in der letzten Folge), und
- nichtrekursive diskrete Filter (NRDF), welche keine Rückkopplung aufweisen (Fig. 15*a*).

Es wird häufig fälschlicherweise angenommen, dass eine RDF-Struktur immer zu einem IIR-Filter führe und ein FIR-Filter immer eine NRDF-Struktur besitze. Diese Annahme stimmt zwar häufig, braucht aber nicht notwendigerweise zuzutreffen. Vielmehr ist die umgekehrte Formulierung richtig: ein IIR-Filter hat immer eine RDF-Struktur und eine NRDF-Struktur führt immer zu einem FIR-Filter (Fig. 23).

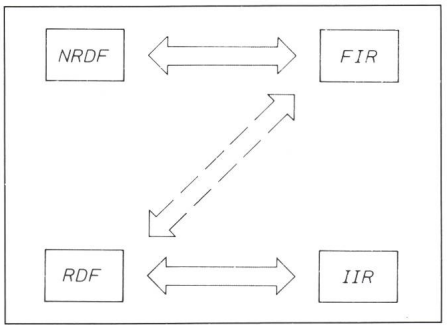

Fig. 23 Filterstrukturen
Üblicherweise haben FIR-Filter eine nichtrekursive (NRDF) und IIR-Filter eine rekursive (RDF) Struktur. In seltenen Ausnahmefällen, wo alle Pole mit Nullstellen zusammenfallen, findet sich ein FIR-Filter mit RDF-Struktur.

Ein diskretes Filter wird als *kanonisches* Filter bezeichnet, wenn es die minimale, theoretisch notwendige Anzahl Verzögerungselemente besitzt, um seine Systemfunktion zu erfüllen.

Die Rückkopplungspfade einer RDF-Struktur bewirken geschlossene Schleifen. Damit das Filter realisierbar ist, müssen alle diese Schleifen mindestens ein Verzögerungsglied enthalten, ansonsten die paradoxe Forderung erfüllt sein müsste, dass ein Signalwert bekannt sein muss, bevor sein Wert berechnet werden kann.

Nichtrekursive diskrete Filter

Ein Filter mit einer NRDF-Struktur ist in der Figur 24*a* zu sehen. Seine Systemfunktion und Impulsantwort sind

$$H(z) = (a + bz^{-1})(1 + cz^{-1}) = a + (b + ac)z^{-1} + bcz^{-2} \quad (77)$$

$$h[n] = a\delta[n] + (b + ac)\delta[n-1] + bc\delta[n-2] \quad (78)$$

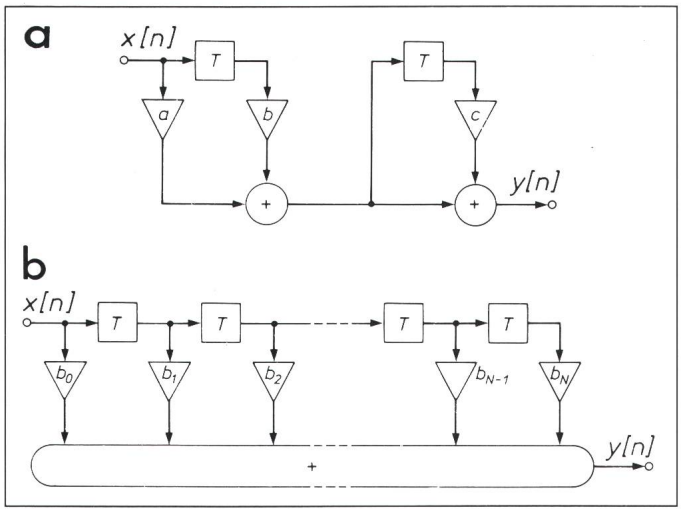

Fig. 24
Beispiele nichtrekursiver Filter

a Beispiel eines beliebigen nichtrekursiven diskreten Filters.

b Transversalfilter: Darunter versteht man ein nichtrekursives Filter, bei welchem die Verzögerungselemente nur das verschobene Eingangssignal enthalten.
Beim Transversalfilter sind die Abtastwerte der Impulsantwort gerade gleich den Koeffizienten des Filters.

Es ist offensichtlich, dass die Impulsantwort eines derartigen Filters nie länger sein kann als die Anzahl seiner Verzögerungselemente plus eins. Der wichtigste Vertreter der Filter mit NRDF-Struktur ist das sogenannte *Transversalfilter* (Fig. 24*b*). In seinen Verzögerungselementen ist immer nur ein Abtastwert des Originaleingangssignals $x[n]$ vorhanden. Systemfunktion $H(z)$ und Impulsantwort $h[n]$ lassen sich bestimmen zu

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_N z^{-N} \tag{79}$$

$$h[n] = b_0\,\delta[n] + b_1\,\delta[n-1] + \ldots + b_N\,\delta[n-N] \tag{80}$$

Da die Filterkoeffizienten unmittelbar in die Impulsantwort eingehen, lässt sich beispielsweise sofort bestimmen, ob ein Transversalfilter einen linearen Phasengang besitzt; es kann nämlich gezeigt werden, dass die Bedingung für einen linearen Phasengang der Forderung nach einer symmetrischen oder antisymmetrischen Impulsantwort $h[i] = h[N-i]$ oder $h[i] = -h[N-i]$ für $i = 0,\ldots, N$ gleichkommt.

Es ist ebenfalls sofort ersichtlich, dass ein NRDF-Filter mit Ausnahme des Ursprungs keine Pole besitzen kann. Trotzdem kann eine praktisch beliebige Übertragungsfunktion durch ein Transversalfilter approximiert werden; seine Länge muss nur gross genug gewählt werden. In der Praxis können NRDF-Filter realisiert werden, deren Impulsantwort aus Hunderten oder Tausenden von Abtastwerten bestehen [10]. In diesen Fällen enthält die Systemfunktion natürlich ebenso viele Nullstellen.

Rekursive diskrete Filter

Eine der möglichen RDF-Strukturen folgt unmittelbar aus der allgemeinen Beschreibung in Gleichung (43) aus Teil 2, die hier nochmals angeschrieben wird

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N} b_i x[n-i] + \sum_{i=1}^{M} a_i y[n-i] \tag{43}$$

Sie ist in Figur 25*a* zu sehen und wird als «direkte Form I» bezeichnet. Sie besteht aus einem rein transversalen Anteil mit den Koeffizienten b_0, $b_1, \ldots, b_N$ und einem rein rekursiven Anteil mit $a_1, a_2, \ldots, a_M$. Diese Struktur benötigt offensichtlich $M+N$ Verzögerungsglieder. Wird aber die Reihenfolge der Teilfilter (die ja ihrerseits lineare Filter sind) vertauscht, so erhält man die «direkte Form II» (Fig. 25*b*). Diese enthält nunmehr lediglich M Verzögerungselemente falls $M > N$, beziehungsweise N, falls $N > M$. In beiden Fällen ist die Systemfunktion dieselbe; die Nullstellen werden durch die Koeffizienten b_i, die Pole durch die a_i bestimmt. Beide direkten Formen besitzen aber einen grossen Nachteil, nämlich den, dass jedes einzelne b_i sämtliche Nullstellen und jedes einzelne a_i sämtliche Pole beeinflusst. Demnach haben auch geringe Änderungen eines einzelnen Koeffizienten bereits einen wesentlichen Einfluss auf das Frequenzverhalten des gesamten Filters. Dies ist insbesondere darum unerwünscht, weil beispielsweise in digitalen Filtern quantisierte, d.h. leicht modifizierte Koeffizienten verwendet werden müssen. Dieses Problem wird gelöst, indem man das Gesamtfilter durch mehrere Teilfilter, deren Pole und Nullstellen durch wenige Koeffizienten bestimmt werden, aufbaut. Sehr vorteilhaft er-

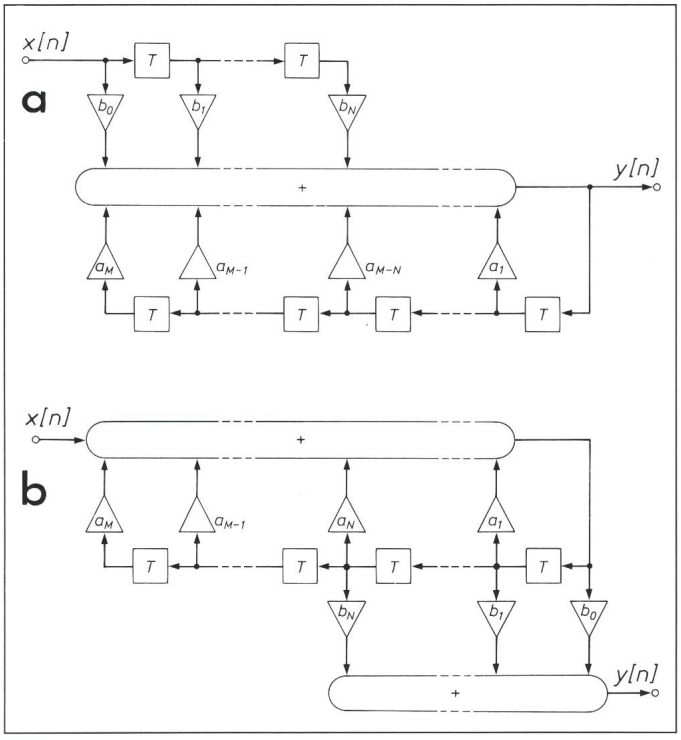

Fig. 25
Zwei Beispiele für allgemeine Strukturen rekursiver Filter

a Direkte Form I: Sie benötigt $M+N$ Verzögerungselemente.

b Direkte Form II: In diesem Beispiel ist $M > N$, weshalb M Verzögerungselemente benötigt werden.

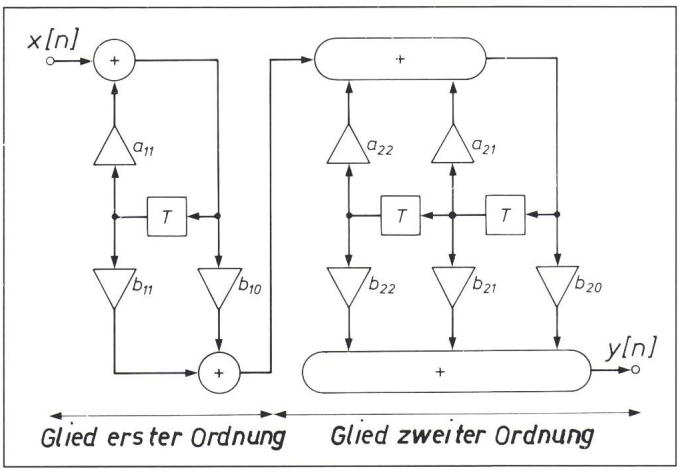

Fig. 26
Filter dritter Ordnung, realisiert durch Kaskadierung zweier Glieder erster und zweiter Ordnung
Auf diese Art können Filter beliebiger Ordnung geschaffen werden, welche wesentlich kleinere Sensitivitäten als die direkten Formen aufweisen.

weisen sich dabei Glieder erster und zweiter Ordnung. Mit einem Glied erster Ordnung kann ein reeller Pol und eine reelle Nullstelle realisiert werden, mit einem Glied zweiter Ordnung bestimmt man je zwei Pole und zwei Nullstellen, welche entweder reell sind oder je ein konjugiert komplexes Paar bilden (Fig. 26).

3.3 Spezielle Filterstrukturen

Kammfilter

Eine interessante Filterstruktur erhält man aus einem beliebigen diskreten Filter, indem man in seiner Systemfunktion $H(z)$ jede Einheitsverzögerung durch eine N-fache Einheitsverzögerung ersetzt. Dieses *Kammfilter* besitzt nun die Systemfunktion

$$G(z) = H(z^N) \tag{81}$$

Dies bedeutet nun, dass die ursprüngliche Übertragungsfunktion *im Grundintervall* $-\pi \leqslant \theta < \pi$ Nmal wiederholt wird, wie dies in der Figur 27 für die Fälle $N = 3$ und $N = 4$ gezeigt ist[1]. Ein oft verwendetes Kammfilter zeigt die Figur 28. In der Praxis kann N eine Grössenordnung von mehreren 100 annehmen.

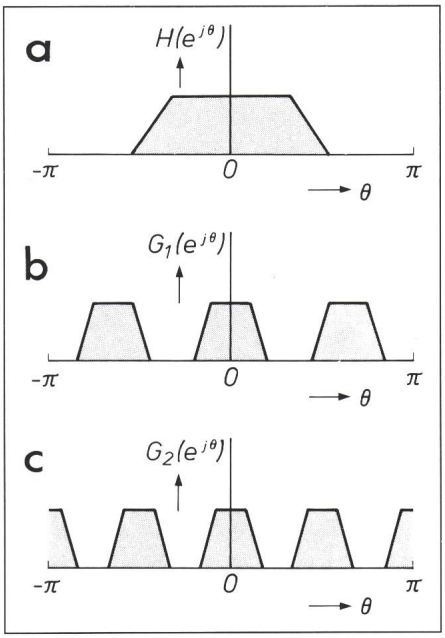

Fig. 27 Schematische Darstellung der Übertragungsfunktionen $H(e^{j\theta})$, $G_1(e^{j\theta})$ und $G_2(e^{j\theta})$
a Ursprüngliches Filter
b Kammfilter aus a für $N = 3$
c Kammfilter aus a für $N = 4$

Ladder- und Lattice-Filter

In jüngerer Zeit haben Filterstrukturen, die als Ladder- und Lattice-Filter[2] bekannt sind, an Bedeutung gewonnen. Einige typische Beispiele sind in den Figuren 29 und 30 zu sehen; es gibt allerdings eine Vielzahl möglicher Formen. Die gemeinsame Eigenschaft dieser Filter ist, dass sie aus Grundbausteinen gebildet werden (schattierte Bereiche in den Figuren), welche je über zwei Eingänge und Ausgänge verfügen. Der Grundbaustein eines Lattice-Filters ist durch eine Überkreuzung der Signale gekennzeichnet. Beide Filterstrukturen zeichnen sich dadurch aus, dass ihre Übertragungsfunktion bezüglich kleiner Variationen einzelner Teilfilter ziemlich insensitiv ist. Sie werden häufig bei der digitalen Sprachverarbeitung eingesetzt [11].

Digitale Wellenfilter

Eine besondere Art von Filtern bilden die digitalen Wellenfilter. Man erhält sie durch direkte Übersetzung eines gegebenen analogen Filters auf der Basis der Wellengleichungen. So wird eine Kapazität zu einem einfachen Verzögerungsglied, eine Induktivität zu einer Kaskadenschaltung eines Verzögerungsgliedes und eines Inverters. Diese Komponenten werden durch Serie- und Paralleladapter, welche Kombinationen von Addierern und Multiplizierern enthalten, zusam-

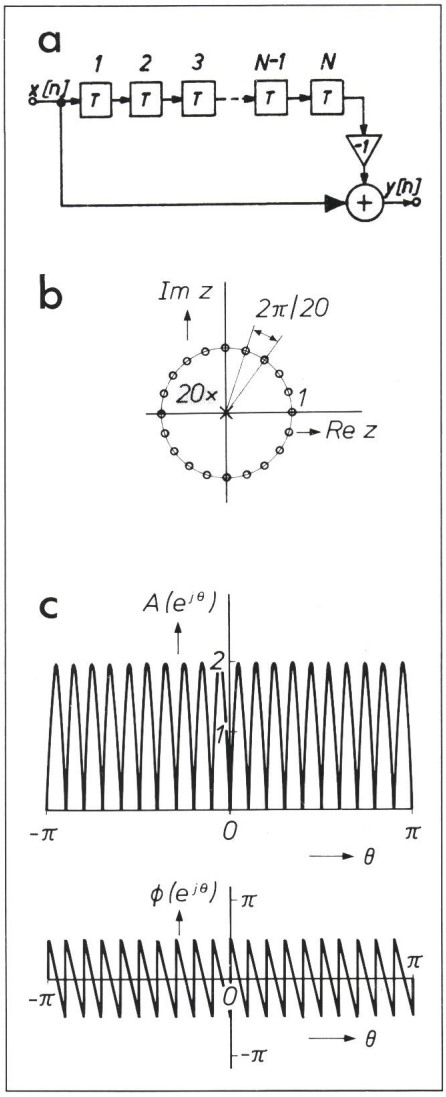

Fig. 28 Die einfachste (und älteste) Form des Kammfilters, wie es beispielsweise in Farbfernsehgeräten verwendet wird
a Schaltung
b Zugehöriges Pol-Nullstellendiagramm für $N = 20$
c Amplituden- und Phasengang für $N = 20$

Anm. des Übersetzers:

[1] Man erinnere sich, dass bereits die ursprüngliche Übertragungsfunktion periodisch ist.

[2] Gelegentlich sind auch die deutschen Begriffe «Brückenfilter» für das Ladder-, bzw. «Kettenfilter» für das Lattice-Filter anzutreffen. Insbesondere in der Schweiz sind aber die englischen Begriffe üblich, weshalb sie auch in dieser Arbeit verwendet werden.

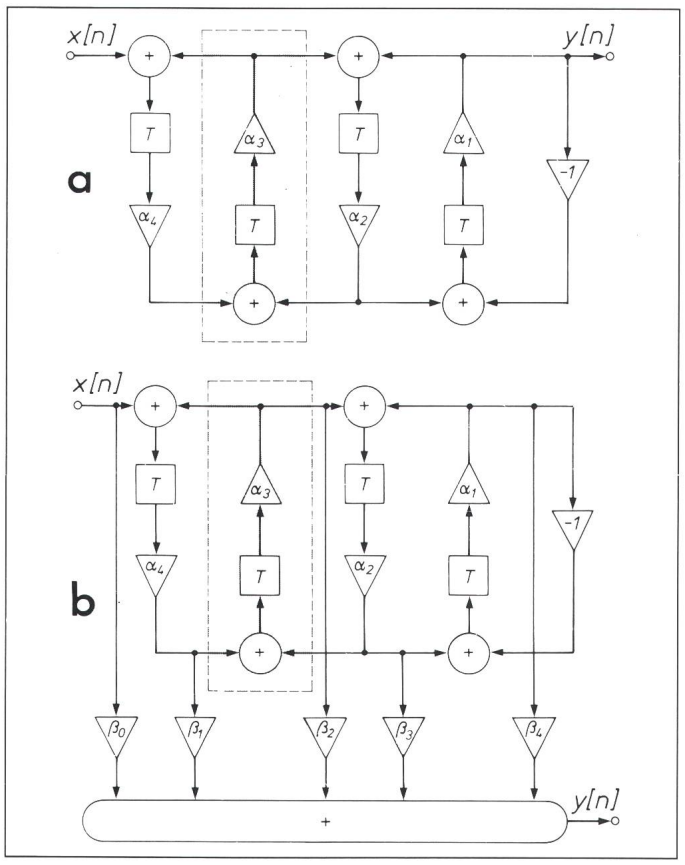

Fig. 29
Beispiele für Ladder-Filter

a Ein Ladder-Filter, dessen Systemfunktion $H(z)$ nur Pole besitzt.

b Die Pole dieses Ladder-Filters werden durch die Koeffizienten α_m, die Nullstellen durch die β_n bestimmt.

Schattiert dargestellt ist der regelmässig wiederkehrende Teil des Filters.

mengeschaltet (Fig. 31). Diese Filter zeigen ebenfalls eine sehr geringe Sensitivität gegenüber Variationen der Koeffizienten, zudem besitzen sie eine ausgezeichnete Stabilität [12].

Transponierte Filter

Eine allgemeine Methode, ein Filter einer bestimmten Struktur in ein anderes Filter mit derselben Systemfunktion umzuwandeln, fusst auf dem Transpositionssatz, wonach die Systemfunktion eines linearen diskreten Systems unverändert bleibt, falls

- die Signale in Gegenrichtung fliessen (was heisst, dass Eingang und Ausgang des Filters zu vertauschen sind) und
- Addierer durch Knoten und Knoten durch Addierer ersetzt werden.

Das Vorgehen illustriert die Figur 32, welche ein Glied zweiter Ordnung vor und nach der Transposition zeigt. Die Transposition kann auf alle linearen Filter und Systeme, die bis anhin behandelt wurden, angewandt werden; das Verfahren lässt sich aber noch auf eine viel weiter gefasste Klasse von diskreten Systemen anwenden [13].

Adaptive Filter

Eine weitere nützliche Klasse von Filtern für die Signalverarbeitung bilden die adaptiven Filter [14], deren Koeffizienten keinen vordefinierten festen Wert haben, sondern während des Betriebs berechnet werden. Ein adaptives Filter besteht deshalb aus zwei Teilen (Fig. 33), aus dem eigentlichen Filter, welches grundsätzlich jede bis anhin besprochene Struktur haben kann, wobei die Filterkoeffizienten $c_0[n]$, $c_1[n]$,..., $c_N[n]$ nun zeitvariant sind, und aus der Steuereinheit. Die Koeffizienten werden in der Steuereinheit aufgrund eines Kriteriums automatisch berechnet. Dieses Kriterium fordert normalerweise die Minimalisierung der Differenz $\varepsilon[n]$ zwischen dem Filterausgangssignal $y[n]$ und einem Referenzsignal $g[n]$. Adaptive Filter besitzen fast ausschliesslich eine transversale oder eine Lattice- bzw. Ladder-Struktur [15].

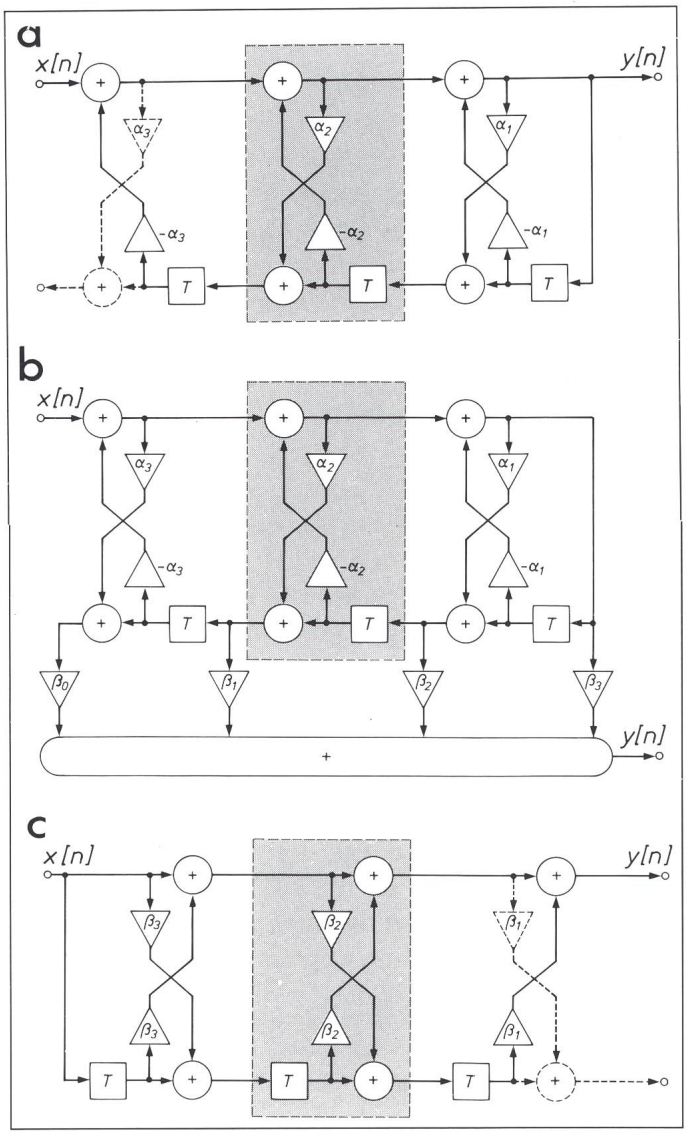

Fig. 30
Beispiele für Lattice-Filter

a Lattice-Filter, dessen Systemfunktion $H(z)$ nur Pole besitzt.

b Lattice-Filter, dessen Pole durch die Koeffizienten α_m und dessen Nullstellen durch die β_n bestimmt sind.

c Lattice-Filter, dessen Systemfunktion nur Nullstellen enthält.

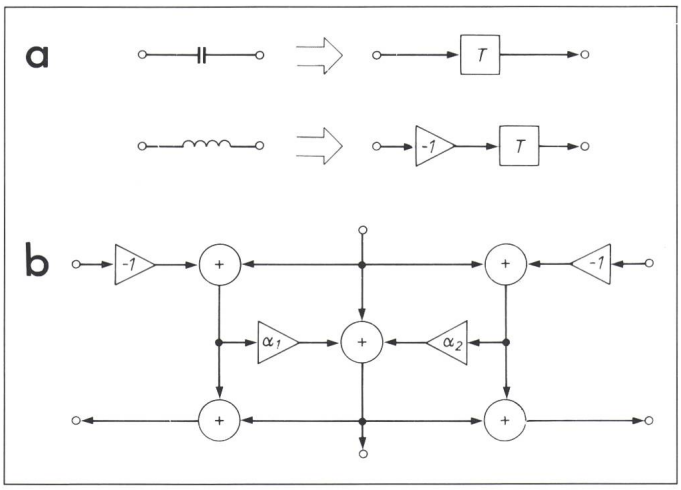

Fig. 31
Digitales Wellenfilter

a Dieses wird durch Anwendung der Wellengleichungen und durch «Umsetzen» von analogen Komponenten in diskrete gewonnen, wie das Beispiel für eine Kapazität und eine Induktivität zeigt.

b Die so bestimmten diskreten Bausteine werden durch Verbindungsglieder, welche nur Addierer und Multiplizierer enthalten, zum Wellenfilter geformt.

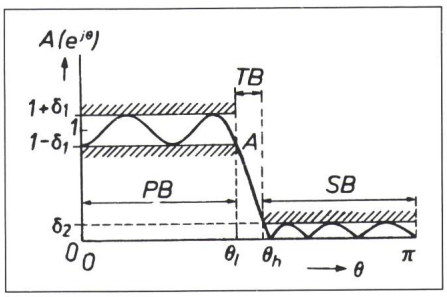

Fig. 34 Spezifikation eines Filters durch sogenannte Stempel oder Toleranzbänder

Der Amplitudengang $A(e^{j\theta})$ des Filters darf nirgends in den schattierten Bereich reichen. Die gezeichnete Charakteristik erfüllt diese Bedingung.

A Amplitude
PB Durchlassbereich (passband)
TB Übergangsbereich (transition band)
SB Sperrbereich (stopband)

3.4 Entwurfsmethoden für diskrete Filter

Ausgangspunkt für den Filterentwurf ist normalerweise eine Spezifikation des benötigten Frequenzverhaltens des Filters. Diese Spezifikation enthält dann Grenzbedingungen für den Amplituden- und Phasengang, wobei der Phasengang häufig unspezifiziert bleibt. In andern Fällen wird ein linearer Phasengang gefordert. Man beachte übrigens, dass bei Filtern mit reeller Impulsantwort eine Spezifikation innerhalb des halben Grundintervalles, d.h. für $0 \leqslant \theta < \pi$ genügt. Die Randbedingungen lassen sich als sogenannte Toleranz- oder Stempelspezifikation, wie sie beispielsweise in der Figur 34 für ein Tiefpassfilter gezeigt ist, darstellen. Der tatsächliche Amplitudengang des Filters muss immer ausserhalb der schraffierten Bereiche verlaufen. Entlang der Frequenzachse sind drei Bereiche zu sehen: der Durchlassbereich (PB, passband), der Übergangsbereich (TP, transition band) und der Sperrbereich (SB, stopband). In diesem Beispiel ist gefordert, dass die maximale Abweichung im Durchlassbereich ($0 \leqslant \theta < \theta_l$) nie mehr als δ_1 betragen solle. Im Sperrbereich ($\theta_h \leqslant \theta < \pi$) beträgt die maximale Abweichung δ_2. Im Übergangsbereich ($\theta_l \leqslant \theta < \theta_h$) bleibt der Amplitudenverlauf unspezifiziert. Die Kurve A in der Figur 34 genügt den Anforderungen genau.

Im allgemeinen wird beim Entwurf eines diskreten Filters folgendermassen vorgegangen:

- Man entscheidet sich, ob der geforderte Frequenzgang mit einem FIR- oder einem IIR-Filter erreicht werden soll und schätzt die benötigte Ordnung des Filters.
- Man berechnet Filterkoeffizienten, welche die entsprechende Systemfunktion möglichst gut approximieren.
- Man entscheidet sich für eine Filterstruktur, wobei auch die Quantisierungseffekte bei Digitalfiltern berücksichtigt werden müssen.
- Man prüft, ob das entstandene Filter die ursprünglichen Anforderungen erfüllt. Ist dies nicht der Fall, so muss der ganze Vorgang wiederholt werden, wobei unter Umständen Filtertyp, -ordnung, -struktur oder auch die Quantisierungsmethode teilweise geändert werden müssen.

Gewöhnlich müssen im Verlauf des Filterentwurfs gewisse Schritte mehrmals wiederholt werden, der Filterentwurf ist also ein iterativer Prozess.

Der zweite der oben aufgeführten Schritte, die Bestimmung der Filterkoeffizienten, ist der kritischste von allen; mit ihm befasst sich der folgende Abschnitt, wobei nur einige wenige der vielen Möglichkeiten vorgestellt werden sollen. Das eben beschriebene Vorgehen wird nicht immer genau befolgt, weil beispielsweise in gewissen Fällen die Impulsantwort wichtiger ist als die Systemfunktion. Häufig ist auch nicht die Frequenzcharakteristik vorgegeben, sondern ein analoges Filter, welches möglichst genau durch ein diskretes ersetzt werden soll.

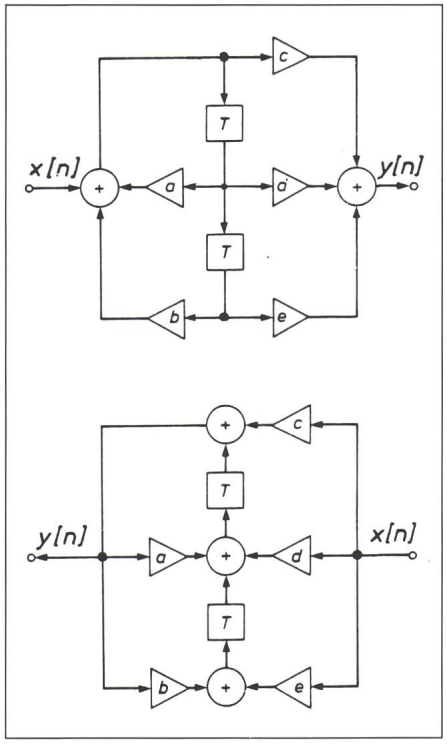

Fig. 32 Transponiertes Filter

Ein lineares System kann transponiert werden und ergibt so ein Filter mit derselben Systemfunktion, aber von unterschiedlicher Struktur.

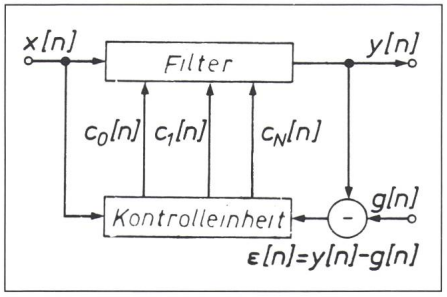

Fig. 33 Adaptives Filter

In einem adaptiven Filter sind die Koeffizienten $c_0[n], \ldots, c_N[n]$ nicht konstant, sondern werden dauernd durch eine Steuereinheit berechnet, normalerweise mit dem Ziel, die Differenz $\varepsilon[n]$ zwischen dem tatsächlichen Filterausgang $y[n]$ und einem Referenzsignal $g[n]$ zu minimalisieren.

3.5 Entwurf von FIR-Filtern

Inverse Fouriertransformation und Zeitfenster

Bei dieser Methode wird von einem vorgegebenen Frequenzgang $H_d(e^{j\theta})$ ausgegangen. Durch Anwendung der inversen Fouriertransformation[3] findet man eine «ideale» Impulsantwort $h_d[n]$. Diese kann im allgemeinen nicht unmittelbar verwendet werden, da sie meistens sehr viele oder gar eine unendliche Anzahl Stützstellen enthält. Zudem ist sie häufig nicht kausal, das heisst sie enthält Stützstellen $h_d[n] \neq 0$ für gewisse $n < 0$. Man muss daher $h_d[n]$ auf eine feste Anzahl N Stützstellen begrenzen und so weit nach rechts verschieben, bis die Kausalität gewährleistet ist. Die Figur 35 erläutert das Vorgehen anhand einer idealen Tiefpasscharakteristik $H_d(e^{j\theta})$. Die mittels der inversen Fouriertransformation gewonnene Impulsantwort $h_d[n]$ wird auf N Stellen beschränkt ($h_1[n]$) und nach rechts verschoben. Die so erzeugte Impulsantwort $h[n]$ kann nun unmittelbar mit einem Transversalfilter realisiert werden.

[3] Man beachte, dass in dieser Arbeit der Begriff «Fouriertransformation» immer als «Fouriertransformation für diskrete Signale» (s. Teil 1) zu verstehen ist.

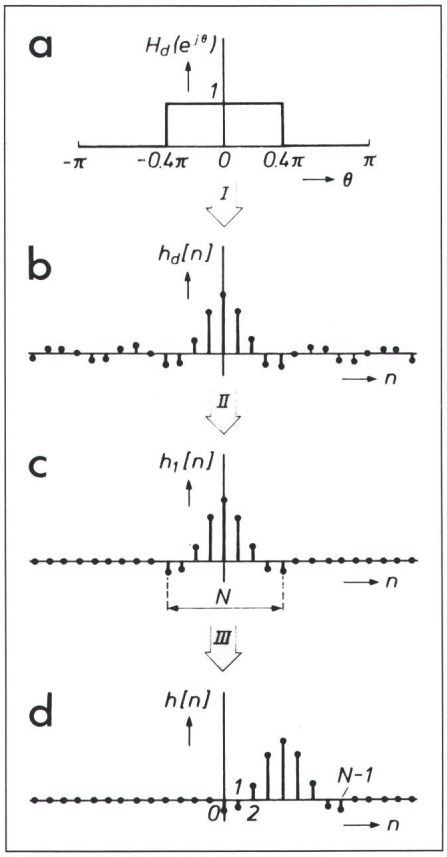

Fig. 35 FIR-Filterentwurf mit Hilfe der inversen Fouriertransformation und eines Zeitfensters

I Inverse Fouriertransformation
II Begrenzung der Anzahl Stützstellen durch Zeitfenster
III Verschiebung

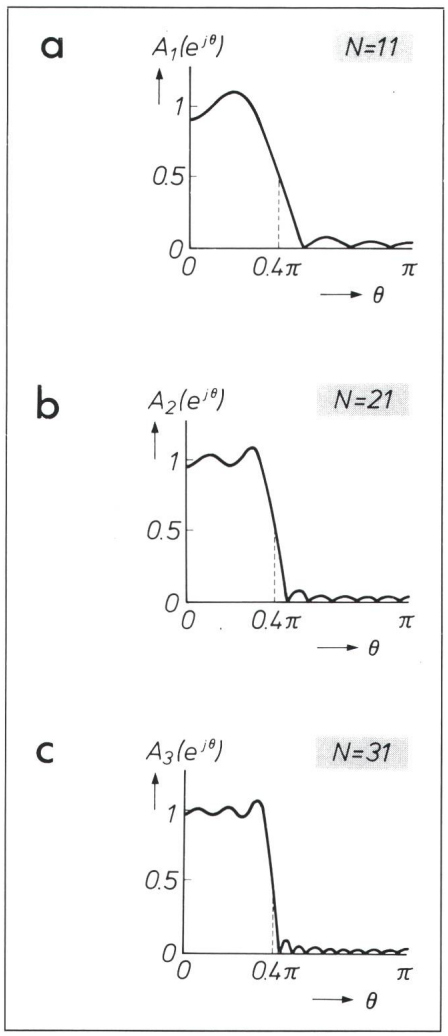

Fig. 36 Resultate eines FIR-Filterentwurfs

Die Güte eines nach der Methode der Figur 35 entworfenen Filters hängt stark von der gewählten Anzahl Stützstellen N ab. Die Abbildung zeigt den resultierenden Amplitudengang $A(e^{j\theta})$ für drei verschiedene Werte von N.

Die Begrenzung der Anzahl Stützstellen hat eine veränderte Amplitudencharakteristik zur Folge. Beispiele dafür sind in der Figur 36 für $N = 11$, 21 und 31 zu sehen. Die starke Verzerrung wird durch den unmittelbaren Übergang von Werten in $h_d[n]$, welche unverändert in $h_1[n]$ übernommen werden, zu solchen, welche überhaupt nicht in $h_1[n]$ übernommen werden, verursacht. Viel besser wäre ein sanfter Übergang, der mit Hilfe sogenannter Fensterfunktionen $w[n]$ erreicht werden kann,

$$h_1[n] = h_d[n]\, w[n] \qquad (82)$$

wobei $w[n]$ die benötigte Länge N hat. Einige der üblichen Fensterfunktionen sind in [5;...;7] (erster Teil) zu finden und in der Figur 37*a* dargestellt, während die durch Anwendung dieser Funktionen resultierenden Tiefpasscharakteristiken in Figur 37*b* zu sehen sind. Es ist offensichtlich, dass die richtige Wahl der Fensterfunktion einen entscheidenden Einfluss auf das resultierende Frequenzverhalten hat. Man beachte zudem, dass eine einfache Beschränkung der Anzahl Koeffizienten der Verwendung eines rechteckförmigen Filters gleichkommt.

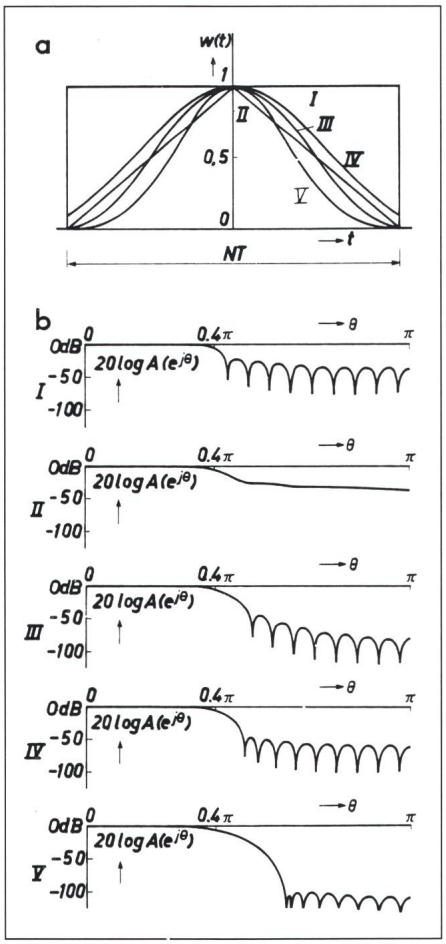

Fig. 37 Fensterfunktionen

a Fensterfunktionen, welche für den Übergang von $h_d[n]$ nach $h_1[n]$ verwendet werden können (Fig. 35). Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die Funktionen $w[n]$ kontinuierlich dargestellt, obwohl es sich dabei natürlich um diskrete Funktionen der Länge N handelt. I Rechteck-Fenster, II Bartlett-Fenster, III Hanning-Fenster, IV Kaiser-Fenster mit $\beta = 4$, V Kaiser-Fenster mit $\beta = 10$. Die Kaiser-Fenster bilden eine ganze Familie mit β als Parameter.

b Jedes dieser Fenster ergibt ein Filter mit unterschiedlicher Amplitudencharakteristik. Die Abbildung zeigt das Ergebnis nach Anwendung der Fensterfunktionen I...V auf das Filter der Figur 35, wobei eine gleichbleibende Fensterlänge von $N = 31$ verwendet wurde. Man beachte den logarithmischen Massstab der vertikalen Achse.

Das Konzept der Fensterfunktionen wird übrigens auch verwendet, wenn zu lange oder unendlich lange Sequenzen mittels einer N-Punkt-DFT transformiert werden sollen. Durch Wahl der richtigen Fensterfunktion kann beispielsweise das im ersten Teil dieser Reihe mit *Leakage* bezeichnete Übersprechen zwischen den Stützstellen der Transformierten entscheidend beeinflusst werden.

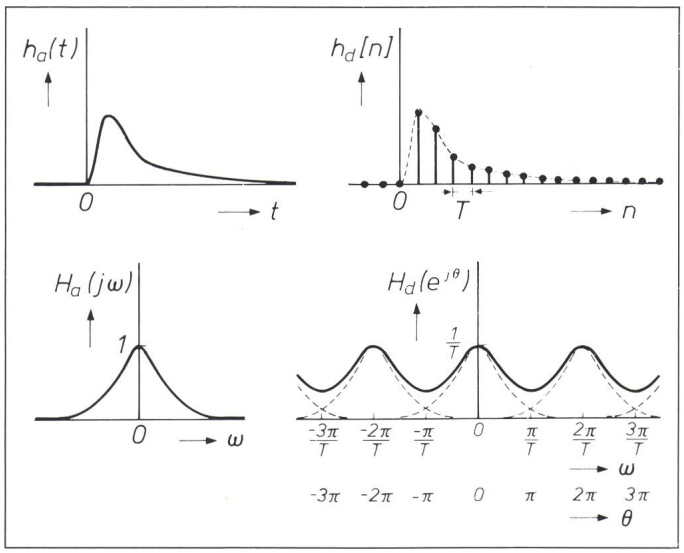

Fig. 39
Filterentwurf nach der Methode der invarianten Impulsantwort
Gezeigt wird der Zusammenhang zwischen den Impulsantworten $h_a(t)$ und $h_d[n]$ und den dazugehörigen Übertragungsfunktionen $H_a(j\omega)$ und $H_d(e^{j\theta})$.

Filter mit gleichmässiger Welligkeit

Offenbar hat die eben beschriebene Entwurfsmethode eine Welligkeit im Amplitudengang zur Folge. Häufig wünscht man sich, dass die einzelnen Wellen in den Durchlassbereichen bzw. den Sperrbereichen gleiche Höhe haben. Bei einem Entwurf, der ein Filter mit gleichmässiger Welligkeit (engl. *equiripple filter*) liefert, spricht man von einer «gleichmässigen Approximation». Die Kurve A in der Figur 34 besitzt offenbar eine gleichmässige Welligkeit.

Die Bestimmung der Koeffizienten für ein derartiges Filter ist sehr aufwendig. Sie müssen meistens auf iterative Weise mit Hilfe eines Computers berechnet werden. Es gibt eine Vielzahl von Computerprogrammen für derartige Filter, die unter Umständen zusätzlich noch linearphasig sein müssen [16]. Mit ihrer Hilfe kann man nicht nur Tiefpassfilter, sondern auch Hochpass-, Bandpass- und Bandsperrfilter, zum Teil auch mit mehreren Durchlass- bzw. Sperrbereichen entwerfen. Zudem kann die Methode auch auf Filter mit allgemeineren Dämpfungsverläufen erweitert werden.

Der Entwurf eines Filters von gleichmässiger Welligkeit, wie es in der Figur 34 gegeben ist, benötigt insgesamt fünf Parameter: die Länge N der Impulsantwort, die maximalen Abweichungen im Durchlass- und Sperrbereich δ_1 und δ_2, sowie die Grenzfrequenzen θ_l und θ_h des Übergangsbereichs. Es zeigt sich, dass durch die Wahl von vier dieser Parameter der fünfte bestimmt ist. Das verwendete Computerprogramm entscheidet dann, welche dieser vier Parameter frei gewählt werden können.

In der Literatur sind eine ganze Reihe von Faustregeln angegeben, welche dem Entwerfer eine Idee über die benötigten Grössenordnungen der Parameter geben sollen. So findet man eine grobe Schätzung für die Länge der Impulsantwort eines FIR-Filters mit gleichmässiger Welligkeit, welches den Anforderungen (Fig. 34) genügen soll, zu

$$N \approx -\frac{10\log_{10}(\delta_1\delta_2) + 15}{14(\theta_h - \theta_l)/2\pi} + 1 \qquad (83)$$

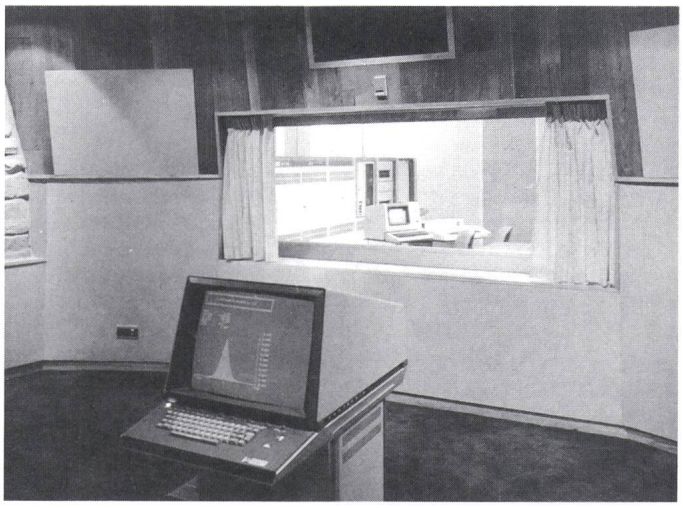

Fig. 38
Der Entwurf digitaler Filter geschieht heute vorwiegend mit Hilfe des Digitalrechners (im Hintergrund)
Zusätzlich zu den Berechnungen zum Entwurf und der grafischen Darstellung der resultierenden Charakteristik können Simulationen das Verhalten eines entworfenen Filters in der Praxis aufzeigen. Die Fotografie zeigt einen akustisch von der Umgebung abgeschirmten Raum, in welchem der Einfluss der digitalen Signalverarbeitung auf tonfrequente Signale studiert wird.

Ein Beispiel für den Einsatz des Digitalrechners in der digitalen Signalverarbeitung [17] ist in der Figur 38 zu sehen.

3.6 Entwurf von IIR-Filtern

Unveränderte Impulsantwort

Ausgangspunkt dieses Entwurfsverfahrens ist ein analoges Filter mit der Stossantwort $h_a(t)$. Zu entwerfen sei ein IIR-Filter mit einer Impulsantwort $h_d[n]$ derart, dass

$$h_d[n] = h_a(nT) \qquad (84)$$

das heisst, dass $h_d[n]$ die abgetastete Version von $h_a(t)$ ist. Man kann nun zeigen, dass man die Übertragungsfunktion $H_d(e^{j\theta})$ des diskreten Filters durch periodische Fortsetzung des Frequenzganges des ursprünglichen analogen Filters gewinnen kann, wobei die «Periode» der Fortsetzung $\theta = \omega T = 2\pi$ beträgt. Wählt man das Abtastintervall T genügend klein, so wird $H_d(e^{j\theta})$ im Grundintervall ungefähr gleich $H_a(j\omega)$ (Fig. 39).

Die Berechnungen sind bei diesem Entwurfsverfahren nicht sehr schwierig. Nimmt man der Einfachheit halber an, die Systemfunktion $H_a(p)$ des ursprünglichen analogen Filters besitze bloss einfache Pole, dann kann diese geschrieben werden als

$$H_a(p) = \sum_{k=1}^{M} \frac{A_k}{p - q_k} \qquad (85)$$

Daraus lässt sich als Funktion der A_k, q_k und T die diskrete Impulsant-

wort (Rücktransformation und Diskretisierung)

$$h_d[n] = \sum_{k=1}^{M} A_k e^{q_k nT} \tag{86a}$$

und die Systemfunktion[4]

$$H_d(z) = \sum_{k=1}^{M} \frac{A_k}{1 - e^{q_k T} z^{-1}} \tag{86b}$$

bestimmen und das Filter auf unterschiedlichste Arten realisieren.

Bilineare Transformation

Ersetzt man in der Systemfunktion $H_a(p)$ eines analogen Filters die Variable p durch

$$p = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \tag{87}$$

so erhält man die Systemfunktion $H_d(z)$ eines diskreten Filters, dessen Übertragungsfunktion $H_d(e^{j\theta})$ in direktem Zusammenhang mit dem Frequenzgang $H_a(j\omega)$ des ursprünglichen analogen Filters steht. Offenbar wird nämlich der Bereich $-\infty < \omega < \infty$ von $H_a(j\omega)$ in das Grundintervall $-\pi < \theta < \pi$ von $H_d(e^{j\theta})$ abgebildet, und zwar sowohl in der Amplitude als auch in der Phase. Liegt beispielsweise

$$H_a(p) = \frac{a}{p + a} \tag{88}$$

vor, so erhält man nach der Figur

$$H_d(z) = \frac{aT(1 + z^{-1})}{aT + 2 + (aT - 2)z^{-1}} \tag{89}$$

[4] Anm. des Übersetzers: Dabei wurde die Beziehung

$$\mathcal{Z}\,|a^n u[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - a z^{-1}} \quad \text{für } |a| < |z|$$

benutzt.

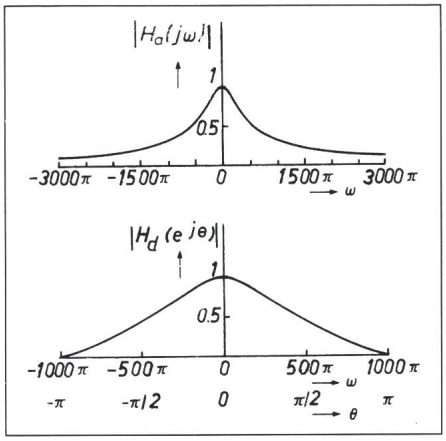

Fig. 40 Filterentwurf mittels bilinearer Transformation

Im Beispiel wird die bilineare Transformation mit $T = 1/1000$ auf ein analoges Filter mit $H_a(j\omega) = 1000/(j\omega + 1000)$ angewendet. Der Amplitudengang $|H_d(e^{j\theta})|$ des dabei entstandenen diskreten Filters ist gleich dem entlang der Frequenzachse komprimierten Amplitudengang $|H_a(j\omega)|$, wobei der Wert, welchen $H_a(j\omega)$ bei $\omega \to \infty$ erreicht, von $H_d(e^{j\theta})$ bereits bei $\omega = \pi/T = 1000\,\pi$ angenommen wird.

In der Figur 40 sind die beiden Amplitudencharakteristiken $|H_a(j\omega)|$ und $|H_d(e^{j\theta})|$ für $a = 1000$ und $T = 1/1000$ zu sehen. Die «Kompression» auf der Frequenzachse ist offenbar nicht linear, sie gehorcht einer Tangens-Funktion: Die Kompression ist am ausgeprägtesten bei den höchsten Frequenzen. Dies ist am Beispiel des *Equiripple-Filters* der Figur 41 deutlich zu sehen. Trotz der offensichtlichen Kompression des Frequenzganges ist aber auch zu sehen, dass die gleichmässige Welligkeit des Filters nach der Transformation erhalten bleibt. Ein grosser Vorteil dieser Filter ist deshalb, dass sie durch Vorgabe von Durchlass- bzw. Sperrbereichen und entsprechenden Toleranzbändern entworfen werden können. Will man beispielsweise ein Filter entwerfen, dessen Übergangsbereiche in der Umgebung von ω_4 und ω_5 (Fig. 41) liegen, so entwirft man zuerst ein analoges Filter, dessen Übergangsbereiche zwar bei ganz verschiedenen Frequenzen ω_1 und ω_2 liegen, welches aber viel einfacher zu bestimmen ist.

Elementweise Transformation

Auch bei diesem Verfahren geht man von einem analogen Filter aus. Dieses liegt häufig als *LC*-Filter vor. Bei der elementweisen Transformation wird jede Komponente dieser Schaltung in einen zeitdiskreten Block umgewandelt. Die einzelnen Blöcke werden dann grundsätzlich wie die analogen Komponenten zu einer Schaltung zusammengefügt. Mit dieser Methode bleiben einige der besonderen Eigenschaften der *LC*-Filter, wie beispielsweise die niedrige Sensitivität auf Änderungen der Werte der Komponenten, erhalten. Es wurde bereits erwähnt, dass diese Methode beim Entwurf von digitalen Wellenfiltern, aber auch bei gewissen Ladder-Filtern sowie den Filtern mit geschalteten Kapazitäten Anwendung findet (Fig. 42, [3]).

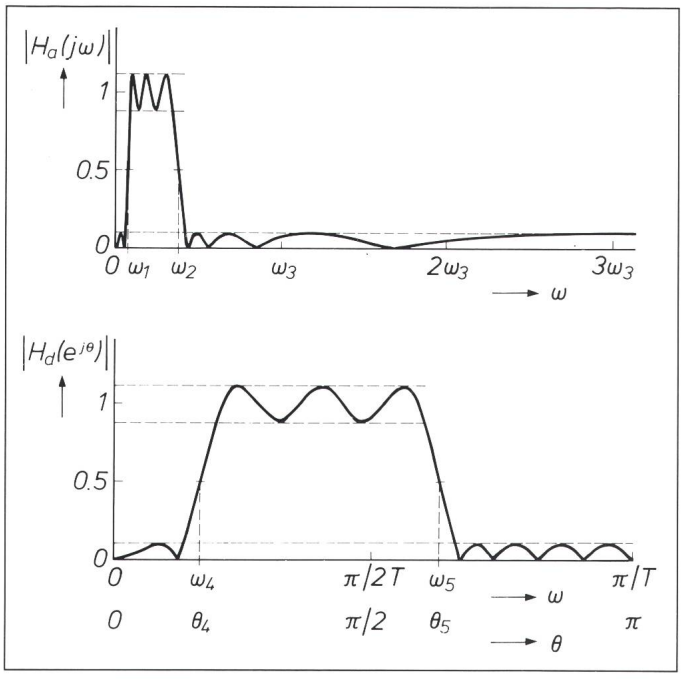

Fig. 41 Anwendung der bilinearen Transformation auf ein analoges Bandpassfilter

Wie aus den Schwankungen der Amplitudengänge ersichtlich ist, geschieht die Frequenzkompression nicht gleichmässig. Sie wird vielmehr für höhere Frequenzen ausgeprägter. Es ist aber ebenfalls ersichtlich, dass die Eigenschaft gleichmässiger Welligkeit erhalten bleibt.

Optimierung mit Computer

Als letzte Methode des IIR-Filterentwurfs sei die Computeroptimierung erwähnt. Dabei geht man von den Spezifikationen im Frequenzbereich sowie einer ersten Schätzung der Filterkoeffizienten aus, wie sie beispielsweise mit einer der bereits beschriebenen Methoden gewonnen werden kann. In mehreren iterativen Schritten versucht das Computerprogramm, die Differenz zwischen dem Frequenzgang des Filters und dem vorgegebenen Frequenzgang zu minimalisieren [16]. Die einen Programme berücksichtigen nur die Amplitudencharakteristik, die andern zusätzlich auch den Phasengang und damit den Verlauf der Gruppenlaufzeit, welche der Ableitung des Phasenganges entspricht.

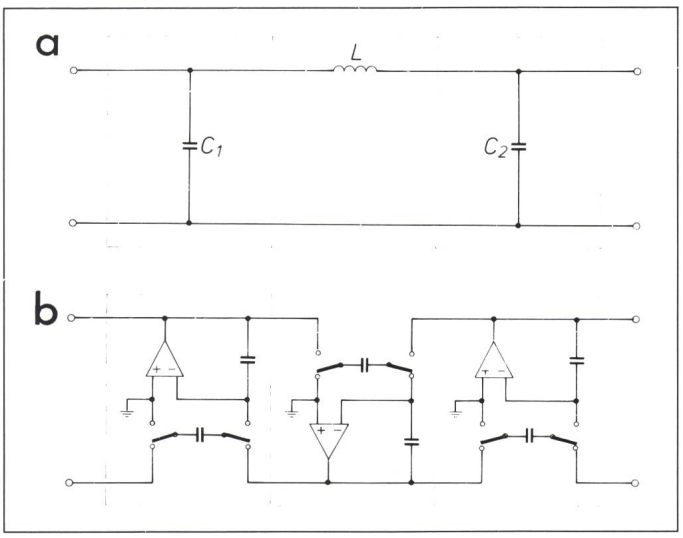

Fig. 42
Switched-Capacitor-Filter
Ein kontinuierliches LC-Filter dritter Ordnung wird durch elementweise Transformation in ein SC-Filter umgewandelt.
a LC-Filter
b SC-Filter

(Letzte Folge in Heft 1/87)

Literatur

[10] *J.J. van der Kam:* A digital "decimating" filter for analog-to-digital conversion of hi-fi audio signals. Philips Techn. Rev. 42(1986)6/7, p. 230...238.

[11] *L.R. Rabiner* and *R.W. Schafer:* Digital processing of speech signals. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1978.

[12] *A. Fettweis:* Digital circuits and systems. IEEE Trans. CAS 31(1984)1, p. 31...48.

[13] *T.A.C.M. Claasen* and *W.F.G. Mecklenbräucker:* On the transposition of linear time-varying discrete-time networks and its application to multirate digital systems. Philips J. of Res. 33(1978)–, p. 78...102.

[14] *T.A.C.M. Claasen* and *W.F.G. Mecklenbräucker:* Overview of adaptive techniques in signal processing. In: H.W. Schüssler: Signal Processing II: theories and applications. Proceedings of the EUSIPCO-83; second European signal processing conference; Erlangen, September 12...16, 1983. Amsterdam a.o., North-Holland, 1983; p. 747...754.

[15] *M.L. Honig* and *D.G. Messerschmidt:* Adaptive filters; structures, algorithms, and applications. Boston, Kluwer, 1984.

[16] Programs for digital signal processing. New York, IEEE Press, 1979.

[17] *L.D.J. Eggermont* and *P.J. Berkhout:* Digital audio circuits: computer simulations and listening tests. Philips Techn. Rev. 41(1983/84)3, p. 99...103.