

<b>Zeitschrift:</b>	Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen = Bulletin de l'Association suisse des électriciens, de l'Association des entreprises électriques suisses
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen
<b>Band:</b>	77 (1986)
<b>Heft:</b>	11
<b>Artikel:</b>	Digitale Signalverarbeitung : Theoretische Grundlagen : Teil 1 : Diskrete Signale
<b>Autor:</b>	Enden, A. W. M. van den / Verhoeckx, N. A. M.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-904211">https://doi.org/10.5169/seals-904211</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Digitale Signalverarbeitung: Theoretische Grundlagen

## Teil 1: Diskrete Signale

A.W.M. van den Enden und N.A.M. Verhoeckx

**In dieser ersten von vier Folgen wird die Theorie der diskreten Signale behandelt. Die Schwerpunkte bilden dabei die Fouriertransformation für diskrete Signale, die z-Transformation, die diskrete Fouriertransformation und die schnelle Fouriertransformation.**

**Die späteren drei Folgen sind den diskreten Systemen, den diskreten Filtern und den praktischen Aspekten der digitalen Systeme gewidmet.**

**Ce premier chapitre de l'article, qui en comporte quatre, traite de la théorie des signaux discrets, notamment de leur transformation de Fourier, transformation z, transformation de Fourier discrète et transformation de Fourier rapide.**

**Les trois autres chapitres sont consacrés aux systèmes discrets, aux filtres discrets et aux aspects pratiques des systèmes numériques.**

Diese Aufsatzerie ist eine Übersetzung des gleichnamigen englischen Beitrags in Philips Techn. Review 42(1985)4. Die Übersetzung besorgte H. Ochsner, dipl. Ing. ETH, Institut für Kommunikationstechnik, ETH Zürich.

### Adresse der Autoren

A.M.W. van den Enden und  
N.A.M. Verhoeckx,  
Philips Research Laboratories,  
NL-5600 JA Eindhoven.

Signale gibt es in den unterschiedlichsten und vielfältigsten Formen, angefangen bei den Rhythmen der Buschtrommeln über das Stopzeichen des Verkehrspolizisten bis zum komplexen Empfangssignal aus einer Gemeinschaftsantennenanlage, welches gleichzeitig mehrere Radio- und Fernsehkanäle enthält. Allen diesen Signalen ist eines gemeinsam: Sie tragen eine Nachricht oder *Information*. Dabei hängt aber die Nachricht nur unweentlich von der Natur des Signals ab. So könnte man etwa den Klang der Buschtrommeln in ein elektrisches Signal umwandeln und an einen beliebigen Ort der Welt übertragen. Dort könnte man dieses z.B. auf einer Compact Disc speichern. Auf dem umgekehrten Weg gelangt man über optische und elektrische Signale wieder auf die ursprüngliche akustische Trommelnachricht, ohne dass dabei ihr Sinn verändert worden wäre.

Elektrische Signale bieten immer noch die vielfältigsten Möglichkeiten der Übertragung, Speicherung und Verarbeitung von Nachrichten. Mit dem Auftauchen der Glasfaser aber haben die optischen Signale wesentlich an Bedeutung für die Nachrich-

tenübertragung gewonnen. Für theoretische Untersuchungen ist allerdings die physikalische Natur der Signale meist uninteressant. Man betrachtet das Signal lediglich als eine beliebige Funktion einer oder mehrerer Variablen, beispielsweise von Zeit oder Ort. In dieser Aufsatzerie werden lediglich Signale betrachtet, welche Funktionen einer einzigen Variablen, der *Zeit*, sind. Die Funktion selbst wird als (momentane) *Amplitude* bezeichnet.

Signale können in verschiedene Klassen eingeteilt werden. So stellt man die Zeit entweder als kontinuierliche Variable, welche einen beliebigen Wert  $t$  annehmen kann, oder aber durch eine diskrete ganzzahlige Zahl  $n$  dar. Außerdem unterscheidet man zwischen Signalen mit kontinuierlicher Amplitude, deren Wert innerhalb eines beliebigen Bereichs liegt, und amplitudenquantisierten Signalen, deren momentane Amplitude lediglich einen aus einer begrenzten Anzahl diskreter Werte annehmen kann. Mit dieser Unterteilung erhält man vier Klassen von Signalen. In der Figur 1 werden diese mit  $x(t)$ ,  $x_Q(t)$ ,  $x[n]$  und  $x_Q[n]$  bezeichnet.

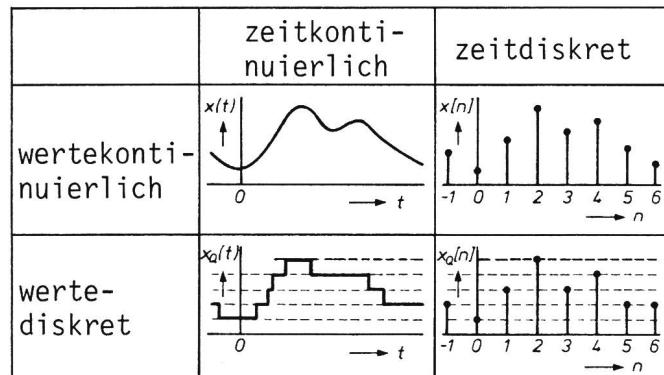


Fig. 1 Klassierung von Signalfunktionen

Signale können entweder kontinuierlich oder diskret sein, und dies sowohl in der Amplitude als auch in der Zeit. Somit werden sie in vier Klassen unterteilt: Das Signal  $x(t)$  ist analog,  $x_Q[n]$  digital; sowohl  $x[n]$  als auch  $x_Q[n]$  bezeichnet man häufig als diskrete Signale, wobei  $x[n]$  auch abgetastetes Signal heißt. Für das zeitkontinuierliche amplitudenquantisierte Signal  $x_Q(t)$  ist keine weitere Bezeichnung gebräuchlich.

Die bekannteste Klasse ist wahrscheinlich immer noch diejenige der *analogen* Signale  $x(t)$ . Seit etwa zwanzig Jahren aber gelangen, bedingt durch den technischen Wandel, immer mehr die zeitdiskreten Signale – und zwar sowohl die *digitalen*  $x_Q[n]$  als auch die *abgetasteten* Signale  $x[n]$  – in den Mittelpunkt des Interesses. Digitale Signale lassen sich durch eine Reihe von ganzen Zahlen darstellen. Deshalb können Schaltungen und Konzepte, wie sie bei Digitalrechnern üblich sind, verwendet werden [1]. Für die abgetasteten Signale stehen heute Bauteile zur Verfügung, in welchen Signale durch elektrische Ladungen dargestellt werden. Diese werden auf verschiedene Art und Weise in regelmässigen Zeitabständen durch die Schaltung gesoben und so verarbeitet. Typische Beispiele dafür sind etwa die ladungsgekoppelten Elemente (charge-coupled devices CCD) [2], aber auch die sogenannten SC-Filter (switched-capacitor filter) [3]. Am seltensten sind Signale vom Typ  $x_Q(t)$ , bei welchen der Übergang zwischen den diskreten Amplitudenwerten zu beliebigen Zeitpunkten erfolgen kann. Falls sie überhaupt verwendet werden, dann erfolgen die Übergänge meistens nur zwischen zwei Werten. Solche Signale sind gelegentlich in gewissen Anwendungen der Pulsmodulation anzutreffen, so etwa im Laser Vision Video System [4].

Im allgemeinen bezeichnet man ein Signalverarbeitungssystem gleich wie die beteiligten Signale: Ein analoges System verarbeitet analoge, ein zeitdiskretes System zeitdiskrete Signale. In dieser Artikelreihe werden die theoretischen Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung erläutert. Dabei muss man sich aber im klaren sein, dass der Problemkreis der diskreten Amplituden an und für sich für eine Grundlagenbeschreibung wenig geeignet ist. Der Grund liegt teilweise darin, dass sich «Effekte der Wortlängenbegrenzung» meistens als nichtlineare Phänomene äussern und ein unerwünschtes Systemverhalten, wie etwa Oszillation, verursachen können. Zudem macht sich die wertdiskrete Natur der Signale und Operationen häufig als sogenanntes Quantisierungsgeräusch bemerkbar, dessen Wirkungen am besten mit statistischen Mitteln beschrieben wird. Beim Entwurf oder bei der Analyse digitaler Signalverarbeitungssysteme verursachen deshalb die diskreten Amplituden meist zusätzliche Schwierigkeiten. In der Praxis wer-

den diese Probleme deshalb üblicherweise zuerst einmal vernachlässigt und nur die zeitdiskreten Aspekte berücksichtigt. Die Folgen der diskreten Amplituden werden, wo notwendig, getrennt untersucht. Dies ist der Grund, weshalb der grösste Teil der Literatur über digitale Signalverarbeitung [5; 6] eigentlich zur umfassenderen Kategorie der allgemeinen *zeitdiskreten* Signalverarbeitung [7; 8] gehören. In diesem Artikel wird von nun an der Begriff *digital* soweit wie möglich nur dann verwendet, wenn die *wertdiskrete* Natur der beteiligten Signale berücksichtigt wird. Sonst werden die Begriffe *diskret* und *kontinuierlich* stillschweigend immer bezüglich der Zeit und nicht der Amplitude verwendet.

Die nun folgenden Abschnitte zeigen zuerst einige Beispiele diskreter Signale mit ihren wichtigsten Eigenschaften. Verschiedene Möglichkeiten ihrer Darstellung mittels der Fouriertransformation und der damit verknüpften *z*-Transformation werden anschliessend vorgestellt. Mit den Methoden der Analyse und des Entwurfs diskreter Systeme und Filter befassen sich die Fortsetzungen dieses Artikels, wobei wo immer möglich Parallelen und Unterschiede zu den kontinuierlichen Systemen aufgezeigt werden sollen. Weiter werden Aspekte des Übergangs von kontinuierlichen zu diskreten Signalen – und umgekehrt – sowie die Möglichkeit veränderlicher Abtastraten behandelt. Ein Blick auf Signale mit diskreten Amplituden und die damit verbundenen Auswirkungen schliessen diese Einführung in digitale Signalverarbeitung ab.

## 1. Diskrete Signale

### 1.1 Beschreibung im Zeitbereich

Wie bereits erwähnt, besteht ein diskretes Signal aus einer Reihe sogenannter *Abtastwerte* (engl. samples). Die Figur 2 zeigt einige typische Beispiele von diskreten Signalen. Das Signal  $x_1[n]$  in Figur 2a ist definiert zu

$$x_1[n] = \begin{cases} n & \text{falls } 1 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1)$$

Dieses Signal besitzt nur eine endliche Anzahl Abtastwerte, die von Null verschieden sind, obwohl es für alle  $n$  zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$  definiert ist; man nennt es deshalb ein Signal *endlicher Dauer*.

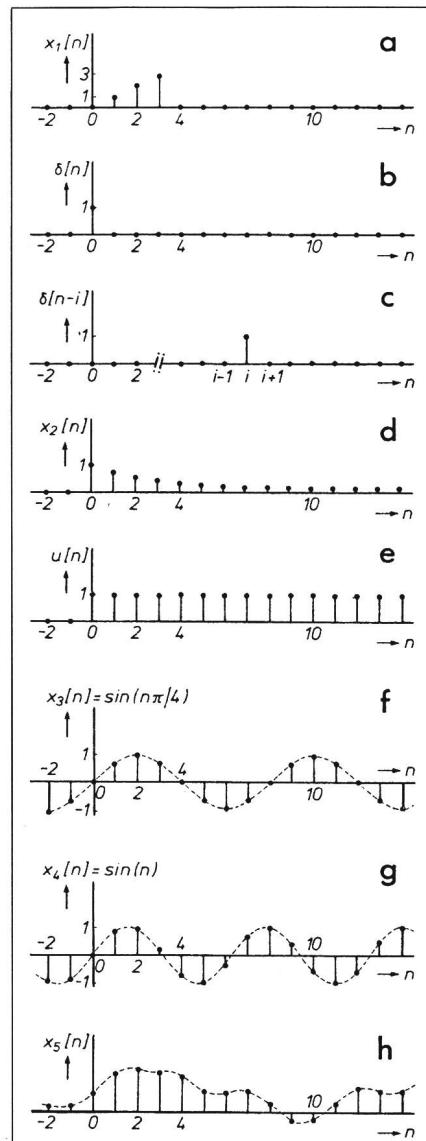


Fig. 2 Beispiele diskreter Signale

a, b, c Signale endlicher Dauer:  $x_1[n]$  ist ein beliebig ausgewähltes Signal,  $\delta[n]$  und  $\delta[n-i]$  sind der häufig gebrauchte Einheitsimpuls und seine um  $i$  Stellen verschobene Version.

d, e, f, g, h Signale unendlicher Dauer:  $x_2[n]$  ist ein exponentiell abklingendes Signal,  $u[n]$  der Einheitsschritt. Sowohl  $x_3[n]$  als auch  $x_4[n]$  sind diskrete Sinusfunktionen, wobei nur  $x_3[n]$  echt periodisch ist. Für das zufällige Signal  $x_5[n]$  kann kein mathematischer Ausdruck angegeben werden; es könnte sich beispielsweise um ein diskretes Rausch- oder ein abgetastetes Sprachsignal handeln.

Ein weiteres Beispiel eines diskreten Signals endlicher Dauer ist der Einheitsimpuls<sup>1</sup>  $\delta[n]$  und seine um  $i$  Stellen verschobene Version  $\delta[n-i]$ ; diese sind in Figur 2b und 2c zu sehen. Ihre Definition ist

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2)$$

<sup>1</sup> Nicht zu verwechseln mit der  $\delta$ -Distribution (Diracstoss).

und

$$\delta[n - i] = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3)$$

Die Figur 2d zeigt ein Signal  $x_2[n]$ , für welches gilt

$$x_2[n] = \begin{cases} 0.8^n & \text{falls } n \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4)$$

Dieses hat unendliche Dauer, ebenso der diskrete Einheitsschritt  $u[n]$

$$u[n] = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5)$$

oder die diskrete Sinusfunktion

$$x[n] = A \sin(n\theta + \phi) \quad (6)$$

Hier ist  $A$  die (maximale) Amplitude des Signals,  $\theta$  die (relative) Frequenz und  $\phi$  die Phase. Die beiden in den Figuren 2f und 2g dargestellten diskreten Sinusfunktionen

$$x_3[n] = \sin(n\pi/4) \quad (7)$$

und

$$x_4[n] = \sin(n) \quad (8)$$

zeigen erstmals einen wesentlichen Unterschied zwischen diskreten und kontinuierlichen Signalen. Das (diskrete) Signal  $x_3[n]$  ist nämlich periodisch mit der Periode 8, da

$$x_3[n] = \sin(n\pi/4) = \sin\{(n+8)\pi/4\} = x_3[n+8] \quad (9)$$

Dies war zwar zu erwarten, da ja die kontinuierliche Sinusfunktion  $x(t) = \sin\omega t$  ebenfalls periodisch ist. Nun kann aber für  $x_4[n]$  keine ganze Zahl  $N_0$  gefunden werden, für welche

$$x_4[n] = x_4[n+N_0] \quad (10)$$

gelten würde. Eine diskrete Sinusfunktion braucht also *nicht* periodisch zu sein!

Interessanterweise stellt man weiter fest, dass bei zwei diskreten Sinusfunktionen mit relativen Frequenzen  $\theta_1$  und  $\theta_2$ , wobei

$$\theta_2 = \theta_1 + 2\pi i, \quad i \text{ ganzzahlig} \quad (11)$$

genau die gleiche Folge von Abtastwerten resultiert. Diese beiden Funktionen sind offenbar gleich, denn es gilt

$$\begin{aligned} \sin(\theta_2 n) &= \sin\{(\theta_1 + 2\pi i)n\} \\ &= \sin(\theta_1 n + 2\pi i n) \\ &= \sin(\theta_1 n) \end{aligned} \quad (12)$$

Das Signal  $x_5[n]$  ist ein zufälliges oder *stochastisches* Signal, es kann nicht durch einen mathematischen Ausdruck, sondern lediglich mit statistischen Mitteln beschrieben werden. Ein derartiges Signal kann beispielsweise ein Ausschnitt aus einem diskreten Rauschsignal oder aber eine Reihe Abtastwerte eines Sprachsignals (gestrichelte Kurve) sein.

An allen bisherigen Beispielen wurden entsprechend ihrer physikalischen Erscheinung Signale mit *reellwertigen* Abtastwerten betrachtet. Für theoretische Untersuchungen erweisen sich aber oft auch komplexe Signale als sehr nützlich. Ein solches ist beispielsweise die komplexe Exponentialfunktion

$$x[n] = z^n \quad (13)$$

wobei  $z = A \cdot e^{j\phi} = \operatorname{Re} z + j \operatorname{Im} z$  eine beliebige komplexe Zahl sein darf. Eine wichtige Untermenge der komplexen diskreten Signale erhält man, wenn man  $z$  in der Gleichung (13) auf die komplexen Zahlen mit dem Betrag  $A = 1$  beschränkt, also  $z = e^{j\phi}$ . Mittels der Beziehung von Euler erhält man dann

$$x[n] = e^{j\phi n} = \cos(n\phi) + j \sin(n\phi) \quad (14)$$

Der bereits in den Gleichungen (2) und (3) definierte Einheitsimpuls erlaubt, diskrete Signale explizit als Folge von Abtastwerten  $x[i]$  darzustellen:

$$x[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \delta[n-i] \quad (15)$$

Der Sinn dieser Darstellungsweise mag im Moment vielleicht noch nicht ganz klar sein; sie wird sich später aber als sehr nützlich erweisen.

Abschließend zu diesem Abschnitt eine Bemerkung zur Notation: Bis anhin wurden die diskreten Signale mit  $x[n]$  bezeichnet, wobei  $n$  eine beliebige

ganze Zahl ist. Ein direkter Zusammenhang zur absoluten Zeit (etwa in Sekunden) besteht hier aber nicht. Dies ist beispielsweise dann ein Nachteil, wenn ein diskretes Signal durch Abtastung eines kontinuierlichen Signals mit einem Abtastintervall  $T$  gewonnen wurde und man eine Beschreibung im Frequenzbereich in absoluten Zahlen, d.h. in Hz oder rad/s wünscht. Auch im Fall, wo Signale mit unterschiedlichen Abtastintervallen (oder Abtastraten) gleichzeitig behandelt werden müssen, ist diese einfache Notation ungünstig<sup>2</sup>. Deshalb wird im folgenden in all diesen Fällen die gleichwertige Bezeichnung  $x[nT]$ ,  $x[nT_1]$ ,  $x[nT_2]$  usw. für  $x[n]$  verwendet.

## 1.2 Beschreibung im Frequenzbereich

### Die Fouriertransformation für diskrete Signale (FTD)

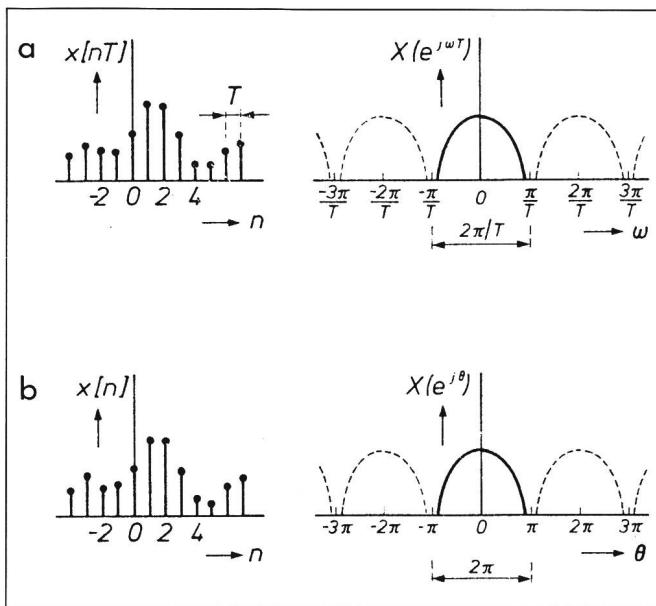
Analog zur Fouriertheorie der kontinuierlichen kann die Fouriertransformation für diskrete Signale  $\mathcal{F}_D$  für die Bestimmung des Frequenzspektrums eines diskreten Signals herangezogen werden. Diese Transformation ist folgendermassen definiert:

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT] e^{-jn\omega T} \quad (16a)$$

Ein Beispiel einer solchen Transformation ist in der Figur 3a zu sehen<sup>3</sup>. Als wichtigste Eigenschaft des Spektrums  $X(e^{j\omega T})$  stellt man offenbar eine Periodizität von  $2\pi/T$  fest. Es genügt also eine einzige Periode von  $X(e^{j\omega T})$ , um das ganze Spektrum und damit auch das Signal  $x[nT]$  vollständig zu bestimmen. Normalerweise bezeichnet man das Intervall  $-\pi/T \leq \omega < \pi/T$  als Grundintervall und bestimmt daraus mittels der inversen Fouriertransformation für diskrete Signale  $\mathcal{F}_D^{-1}$  das Signal im Zeitbereich zu

<sup>2</sup> Manchmal ist auch das Gegenteil der Fall: Es kann vollkommen unwichtig sein, dass  $n$  eine Zeitvariable darstellt, man wünscht sich lediglich eine Unterscheidung zu kontinuierlichen Signalen. Dann wird die kompaktere Notation  $x_n$  verwendet. Siehe dazu auch [9].

<sup>3</sup> Man beachte, dass die Fouriertransformation für diskrete Signale (FTD) – im Gegensatz zur noch zu besprechenden diskreten Fouriertransformation (DFT) – ein kontinuierliches Spektrum liefert.



**Fig. 3**  
Spektrum eines  
diskreten Signals  $x[n]$

- a Berechnung mittels  
16a: Das Spektrum ist  
durch das Grund-  
intervall  $-\pi/T < \omega < \pi/T$  vollständig  
bestimmt.
- b Normalisierte Form  
(19): Das Grund-  
intervall hat die  
Breite  $2\pi$   
 $\omega$  absolute  
Kreisfrequenz  
 $\theta$  relative  
Kreisfrequenz

man eigentlich  $R(e^{j\theta})$ ,  $I(e^{j\theta})$ ,  $A(e^{j\theta})$  und  $\phi(e^{j\theta})$  schreiben müsste. In der Figur 3 wurde der Einfachheit halber ein reelles Spektrum angenommen. Ein realistischeres Beispiel hingegen zeigt die Figur 4, wo das Signal  $x[n] = 0,8^n u[n]$  auf die eben erläuterte Art und Weise dargestellt wird.

Die Fouriertransformation für diskrete Signale hat eine Reihe Eigenschaften, die denjenigen der Transformation für kontinuierliche Signale entsprechen. Die wichtigsten davon seien hier erwähnt, da sie im folgenden gebraucht werden.

#### 1. Linearität: Für zwei Fourierpaare

$$x[n] = \mathcal{F}_D^{-1}[X(e^{j\theta})] \text{ und } y[n] = \mathcal{F}_D^{-1}[Y(e^{j\theta})] \quad (22a)$$

gilt

$$ax[n] + by[n] = \mathcal{F}_D^{-1}[aX(e^{j\theta}) + bY(e^{j\theta})] \quad (22b)$$

#### 2. Verschiebung: Für eine beliebige ganze Zahl $i$ gilt

$$x[n-i] = e^{-ji\theta} \mathcal{F}_D^{-1}[X(e^{j\theta})] \quad (22c)$$

$$x[nT] = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(e^{j\omega T}) e^{jn\omega T} d\omega \quad (16b)$$

Das Paar  $x[nT]$  und  $X(e^{j\omega T})$  wird als Fourierpaar bezeichnet, und die gegenseitige Verknüpfung in Operatorenform angegeben:

$$X(e^{j\omega T}) = \mathcal{F}_D[x[nT]] \quad (17a)$$

$$x[nT] = \mathcal{F}_D^{-1}[X(e^{j\omega T})] \quad (17b)$$

Die Analogie zwischen der Fouriertransformation für diskrete und denjenigen für kontinuierliche Signale folgt am besten durch einen Vergleich ihrer Definitionen. Die Fouriertransformation für kontinuierliche Signale  $\mathcal{F}$  und ihre Inverse  $\mathcal{F}^{-1}$  sind definiert zu

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (18a)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (18b)$$

Der Unterschied besteht im Ersetzen der Integration durch eine Summe in der Vorwärstransformation sowie in den geänderten Integrationsgrenzen in der Rückwärtstransformation.

Der Gebrauch der Notation  $X(e^{j\omega T})$  anstelle von  $X(j\omega)$  bei der Fouriertransformation für diskrete Signale veranschaulicht einerseits die Periodizität in  $\omega$ , andererseits wird sie sich im Zusammenhang mit der sehr wichtigen

$z$ -Transformation als nützlich erweisen.

Ausser den Definitionen den Gleichungen (16a und b) hat die Fouriertransformation eine gebräuchlichere normalisierte Form, indem  $n$  wieder anstelle  $nT$  und  $\theta$  anstelle von  $\omega T$  steht. Somit wird

$$X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\theta} \quad (19a)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) e^{jn\theta} d\theta \quad (19b)$$

Die Grösse  $\theta$  heisst relative Kreisfrequenz. Das Grundintervall von  $X(e^{j\theta})$  hat offenbar die Breite  $2\pi$ . Da  $x[n]$  und  $X(e^{j\theta})$  ein Fourierpaar bilden, kann man schreiben:

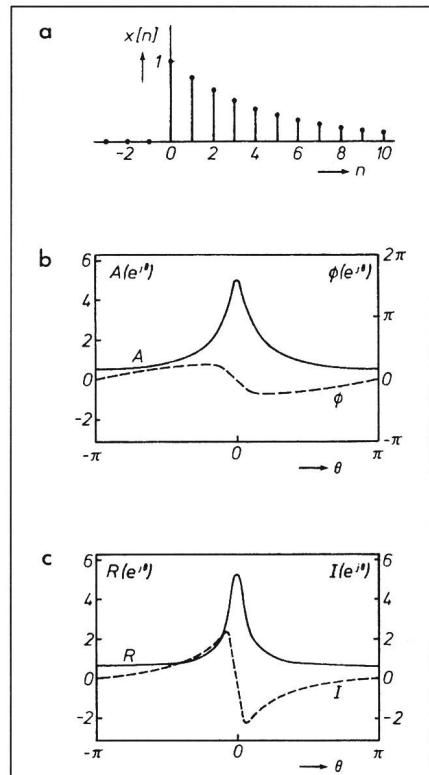
$$X(e^{j\theta}) = \mathcal{F}_D[x[n]] \quad (20a)$$

$$x[n] = \mathcal{F}_D^{-1}[X(e^{j\theta})] \quad (20b)$$

Man beachte, dass  $X(e^{j\theta})$  eine komplexwertige Funktion ist; um sie grafisch aufzuzeichnen, muss sie entweder in ihre Real- und Imaginärteile  $R = \operatorname{Re} X(e^{j\theta})$  und  $I = \operatorname{Im} X(e^{j\theta})$  oder in Betrag  $A = |X(e^{j\theta})|$  und Argument  $\phi = \arg X(e^{j\theta})$  aufgespalten werden. So erhält man

$$X(e^{j\theta}) = R + jI = A e^{j\phi} \quad (21)$$

wobei natürlich  $R$ ,  $I$  und  $\phi$  frequenzabhängige Funktionen sind, so dass



**Fig. 4** Komplexes Spektrum

Das durch die Fouriertransformation erhaltenen Spektrum eines diskreten Signals (a) ist normalerweise komplex, so dass zwei Funktionen der Frequenz dargestellt werden müssen. Dies sind entweder der Betrag  $A(e^{j\theta})$  und das Argument  $\phi(e^{j\theta})$  (b) oder der Realteil  $R(e^{j\theta})$  und der Imaginärteil  $I(e^{j\theta})$  (c). Die Abbildung zeigt beide Darstellungsmöglichkeiten für das Beispiel:  $x[n] = 0,8^n u[n]$ .

**3. Faltung:** Bis auf weiteres wird zwar die Faltungsoperation (bezeichnet mit dem Symbol \*) weder gebraucht noch definiert, mit ihr ist aber die wichtigste Eigenschaft der Fouriertransformation verknüpft: Die Faltung zweier Signale im Zeitbereich entspricht der Multiplikation ihrer Spektren. Also

$$x[n] * y[n] = \mathcal{F}_D^{-1} [X(e^{j\theta}) \cdot Y(e^{j\theta})] \quad (22d)$$

**4. Für reelle Signale  $x[n]$**  ist der Realteil des Spektrums eine gerade und der Imaginärteil eine ungerade Funktion, also

$$R(e^{j\theta}) = R(e^{-j\theta}) \text{ und } I(e^{j\theta}) = -I(e^{-j\theta}) \quad (22e)$$

bzw. für Betrag und Argument

$$A(e^{j\theta}) = A(e^{-j\theta}) \text{ und } \phi(e^{j\theta}) = -\phi(e^{-j\theta}) \quad (22f)$$

Reelle Signale lassen sich deshalb ausreichend durch das halbe Grundintervall ihrer Spektren beschreiben.

#### Die z-Transformation (ZT)

Neben der eben beschriebenen Fouriertransformation existieren weitere Transformationen für diskrete Signale, so beispielsweise die wichtige (zweiseitige) z-Transformation. Die z-Transformation  $X(z)$  eines diskreten Signals  $x[n]$  wird mittels der komplexen Exponentialfunktion (13) definiert zu

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad (23)$$

wobei  $z$  jede beliebige komplexe Zahl sein darf. Dies bedeutet natürlich, dass auch hier keine einfache graphische Darstellung von  $X(z)$  möglich ist. Vielmehr sind zwei dreidimensionale Darstellungen nötig, die je  $\operatorname{Re} X(z)$  und  $\operatorname{Im} X(z)$  als Funktion von  $\operatorname{Re} z$  und  $\operatorname{Im} z$  darstellen (Fig. 5). Eine alternative

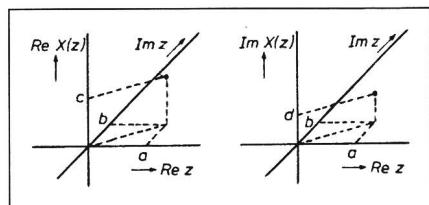


Fig. 5 z-Transformierte

Die z-Transformierte eines diskreten Signals  $x[n]$  ist im allgemeinen eine komplexe Funktion  $X(z) = \operatorname{Re} X(z) + j \operatorname{Im} X(z)$  einer komplexen Variablen  $z = \operatorname{Re} z + j \operatorname{Im} z$ . Ihre Darstellung benötigt deshalb zwei dreidimensionale Darstellungen. In der Abbildung ist dies durch die Darstellung eines einzigen Punktes  $X(a+jb) = c+jd$  angedeutet.

graphische Darstellung, das sogenannte **Pol-Nullstellen-Diagramm**, wird später vorgestellt.

Die z-Transformation hat für diskrete Signale die gleiche Bedeutung wie die Laplace-Transformation für kontinuierliche. Die (zweiseitige) Laplace-Transformation ist definiert als

$$X(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-pt} dt \quad (24a)$$

Der offensichtlich wichtigste Unterschied besteht in der Summation in der z-Transformation anstelle des Integrals. Hingegen fehlt die Exponentialfunktion in der z-Transformation nur scheinbar, da natürlich jede beliebige komplexe Zahl  $z$  geschrieben werden kann als

$$z = a + jb = Ae^{j\phi} = e^{\ln(A)+j\phi} = e^q \quad (24b)$$

Wie bei der Laplace- stellt sich auch bei der z-Transformation die Frage der Konvergenz. Es zeigt sich nämlich, dass die unendliche Summe der Gleichung (23) – bei einem gegebenen Signal  $x[n]$  – nicht für beliebige  $z$  gegen einen endlichen Wert konvergiert. Genaugenommen sollte also zu jedem  $X(z)$  auch noch die Konvergenzregion angegeben werden, da nämlich unterschiedliche Konvergenzgebiete für ein und dasselbe  $X(z)$  zu unterschiedlichen Zeitfunktionen  $x[n]$  gehören. In praktischen Systemen gibt es aber nie einen Zweifel darüber, um welches Signal es sich handelt, weshalb in diesem Artikel keine Konvergenzfragen besprochen werden.

Es sei nun die z-Transformation des Signals

$$x_1[n] = A \delta[n - i] \quad (25a)$$

betrachtet. Bekanntlich stellt diese Gleichung einen Impuls der Amplitude  $A$  zum Zeitpunkt  $n = i$  dar. Es findet sich mittels (23)

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \delta[n - i] z^{-n} = A z^{-i} \quad (25b)$$

Analog findet sich für

$$x_2[n] = 2 \delta[n - 1] + 3 \delta[n - 2] \quad (26a)$$

die Transformierte

$$X_2(z) = 2 z^{-1} + 3 z^{-2} \quad (26b)$$

Aus diesen beiden Beispielen ergibt sich eine sehr nützliche Interpretation der z-Transformierten: Hat  $X(z)$  die Form eines Polynoms in  $z^{-1}$ , dann entspricht der zur Potenz  $z^{-i}$  gehörende Koeffizient genau dem Wert von  $x[n]$  zum Zeitpunkt  $n = i$ .

Die inverse z-Transformation ist gegeben durch das geschlossene Linienintegral

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz \quad (27)$$

In der Praxis wird dieser Ausdruck allerdings nur selten angewendet. Vielmehr versucht man  $x[n]$  mittels allgemeiner Eigenschaften der z-Transformation oder durch Aufteilen von  $X(z)$  in Funktionen mit bekannten Rücktransformierten zu bestimmen. Einige wichtige z-Transformationspaare sind in der Tabelle I angegeben.

Die Tatsache, dass  $x[n]$  und  $X(z)$  ein z-Transformationspaar bilden, sei formal angegeben durch

$$X(z) = \mathcal{J}[x[n]] \quad (28a)$$

$$x[n] = \mathcal{J}^{-1}[X(z)] \quad (28b)$$

Die wichtigsten Eigenschaften der z-Transformation betreffen die Linearität, die Zeitverschiebung und die Faltung. Für die beiden Paare

$$x[n] = \mathcal{J}[X(z)] \text{ und } y[n] = \mathcal{J}[Y(z)] \quad (29a)$$

gelten folgende Eigenschaften:

**1. Linearität:** Für beliebigen Wert der Konstanten  $a$  und  $b$  gilt

$$ax[n] + by[n] = \mathcal{J}[aX(z) + bY(z)] \quad (29b)$$

**2. Verschiebung:** Für eine beliebige ganze Zahl  $i$  gilt

$$x[n-i] = z^{-i} \mathcal{J}[X(z)] \quad (29c)$$

**3. Faltung:** Bis auf weiteres wird zwar die Faltungsoperation (bezeichnet mit dem Symbol \*) weder gebraucht noch definiert, mit ihr ist aber eine wichtige Eigenschaft der z-Transformation verknüpft:

$$x[n] * y[n] = \mathcal{J}[X(z) \cdot Y(z)] \quad (29d)$$

Um die Rücktransformation einer Funktion  $X_0(z)$ , welche als Verhältnis

zweier Polynome von  $z$  gegeben ist, zu bestimmen, wird im allgemeinen das Verfahren der *Partialbruchzerlegung* angewendet. Dieses Verfahren sei an einem Beispiel erläutert. Die Transformierte  $X_0(z)$  ist gegeben durch

$$X_0(z) = \frac{z}{(z - \alpha)(z - \beta)} \quad (30)$$

wobei  $\alpha$  und  $\beta$  Konstanten sind. Offenbar ist in der Tabelle I kein unmittelbar anwendbares Transformationspaar zu finden. Deshalb wird  $X_0(z)$  umgeschrieben, wobei allerdings die Konstanten  $A$  und  $B$  erst noch zu bestimmen sind:

$$X_0(z) = \frac{Az}{z - \alpha} + \frac{Bz}{z - \beta} \quad (31)$$

Dieser Ausdruck wird nun auf einen gemeinsamen Nenner umgeformt, und man erhält schliesslich

$$\begin{aligned} X_0(z) &= \frac{Az(z - \beta) + Bz(z - \alpha)}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\ &= \frac{(A + B)z^2 - (\beta A + \alpha B)z}{(z - \alpha)(z - \beta)} \end{aligned} \quad (32)$$

Man sieht, dass die beiden Gleichungen genau dann identisch sind, falls gilt

$$A + B = 0 \quad \text{und} \quad \beta A + \alpha B = -1 \quad (33)$$

oder

$$A = \frac{1}{\alpha - \beta} \quad \text{und} \quad B = \frac{-1}{\alpha - \beta} \quad (34)$$

Somit kann (31) neu geschrieben werden zu

$$X_0(z) = \frac{1}{\alpha - \beta} \left( \frac{z}{z - \alpha} - \frac{z}{z - \beta} \right) \quad (35)$$

In der Tabelle I findet sich nun tatsächlich eine  $z$ -Transformierte der Form  $z/(z-a)$ , so dass man unter Ausnutzung der Linearität der  $z$ -Transformation findet:

#### Einige einfache Transformationspaare der zweiseitigen $z$ -Transformation

Tabelle I

$x[n]$	$X(z)$
$\delta[n]$	1
$\delta[n - i]$	$z^{-i}$
$u[n]$	$\frac{z}{z - 1}$
$a^n u[n]$	$\frac{z}{z - a}$
$a^{n-1} u[n - 1]$	$\frac{1}{z - a}$
$n u[n]$	$\frac{z}{(z - 1)^2}$
$n^2 u[n]$	$\frac{z(z + 1)}{(z - 1)^3}$
$\cos(n\xi) u[n]$	$\frac{z^2 - z \cos\xi}{z^2 - 2z \cos\xi + 1}$
$\sin(n\xi) u[n]$	$\frac{z \sin\xi}{z^2 - 2z \cos\xi + 1}$
$a^n \sin(n\xi + \psi) u[n]$	$\frac{z^2 \sin(\psi) + az \sin(\xi - \psi)}{z^2 - 2az \cos\xi + a^2}$

$$x_0[n] = \frac{1}{\alpha - \beta} (\alpha^n - \beta^n) u[n] \quad (36)$$

#### Zusammenhang zwischen $\mathcal{F}_D$ und $\mathcal{Z}$

Zwischen der Fouriertransformation für diskrete Signale und der  $z$ -Transformation besteht ein unmittelbarer Zusammenhang. Setzt man nämlich  $z = e^{j\theta}$  in Gleichung (23) ein, so ergibt sich die Fouriertransformation entsprechend (19a). Weil die Punkte  $z = e^{j\theta}$  für  $-\pi \leq \theta < \pi$  den Einheitskreis  $|z| = 1$  in der  $z$ -Ebene beschreiben, kommt man zum Schluss, dass die Fouriertransformation für diskrete Signale der  $z$ -Transformation entlang des Einheitskreises entspricht. Dies ist in der Figur 6 dargestellt, wobei der Einfachheit halber angenommen wurde, dass die  $z$ -Transformierte auf dem Einheitskreis reell sei.

Der besprochene Zusammenhang gilt allerdings nur dann, wenn die  $z$ -Transformierte auf dem Einheitskreis existiert oder, anders gesagt, wenn  $X(z)$  auf dem Einheitskreis konvergiert. In der Praxis ist dies auch meistens der Fall. Eine wichtige Ausnahme bildet, wie wir später sehen werden, die Stossantwort eines instabilen diskreten Systems.

Die bis jetzt diskutierten Zusammenhänge zwischen dem Signal  $x[n]$  und seiner Transformierten  $X(e^{j\theta})$  bzw.  $X(z)$  zeigt die Figur 7.

#### Die diskrete Fouriertransformation (DFT)

Die Fouriertransformation für diskrete Signale, wie sie eben beschrieben wurde, ist ein leistungsfähiges Hilfsmittel, um das Frequenzspektrum eines diskreten Signals zu bestimmen.

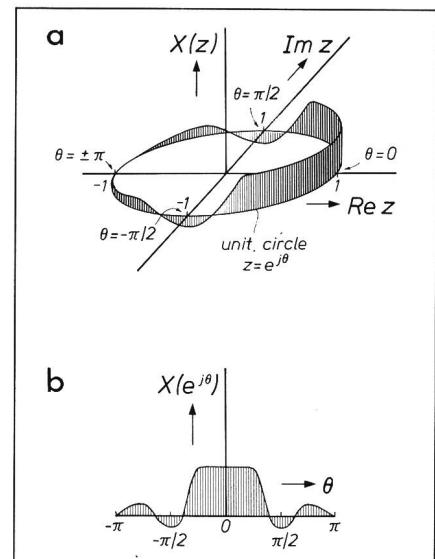


Fig. 6 Zusammenhang zwischen  $z$ -Transformation und Fouriertransformation

Annahme:  $X(e^{j\theta})$  sei reell.

a  $z$ -Transformation  $X(z)$  entlang des Einheitskreises, d.h.  $z = e^{j\theta}$

b Fouriertransformation  $X(e^{j\theta})$  für diskrete Signale

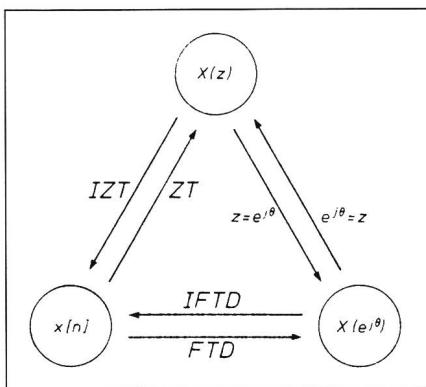


Fig. 7 Zusammenhang zwischen einem diskreten Signal  $x[n]$ , seiner Fouriertransformierten  $X(e^{j\theta})$  und der  $z$ -Transformierten  $X(z)$

FTD Fouriertransformation für diskrete Signale  
 IFTD inverse Fouriertransformation für diskrete Signale  
 ZT  $z$ -Transformation  
 IZT inverse  $z$ -Transformation  
 Es wird angenommen, dass alle Transformationen existieren

Sie hat allerdings auch ihre Grenzen, wie nun anhand der normalisierten Form, wie sie durch die Gleichung (19) gegeben ist, gezeigt werden soll. Zunächst zeigt sich, dass die Gleichung (19) nicht unmittelbar auf periodische Signale  $x[n]$  anwendbar ist, da die Summation über unendlich viele Terme Schwierigkeiten bietet. Zudem ist die Darstellung durch eine unendliche Summe auch nicht sinnvoll, wenn ein Signal  $x[n]$  endlicher Dauer, d.h. ein Signal, das nur für eine endliche Anzahl  $n$  einen von Null verschiedenen Wert hat, beschrieben werden soll. Schliesslich ist die numerische Bestimmung der Rücktransformation nur mittels Approximation des Integrals möglich. Deshalb hat sich die Definition der sogenannten  $N$ -Punkt-diskreten Fouriertransformation ( $N$ -Punkt-DFT) als sehr nützlich erwiesen. Sie lautet:

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_N[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \quad (37a)$$

und

$$x_N[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_N[k] e^{j(2\pi/N)kn} \quad (37b)$$

Mittels der DFT werden also  $N$  Werte der diskreten Frequenzfunktion  $X_N[k]$  aus dem Signal  $x_N[n]$  bestimmt.

Durch Anwendung der Rücktransformation lassen sich daraus die  $N$  ursprünglichen Werte von  $x_N[n]$  exakt wiederfinden. Die Sequenzen  $x_N[n]$  und  $X_N[k]$  bilden also ein Transformationspaar, das durch die Operatoren-Gleichungen

$$X_N[k] = \mathcal{D}_N[x_N[n]] \quad (38a)$$

$$x_N[n] = \mathcal{D}_N^{-1}[X_N[k]] \quad (38b)$$

dargestellt wird.

Die Anwendung der DFT sei zuerst an einer einfachen periodischen Funktion  $x[n] = \cos(2\pi n/6)$  für die Fälle  $N = 6, 12$  und  $16$  illustriert (Fig. 8). Daraus ist ersichtlich, dass es bei Anwendung der DFT auf Signale mit der Periode  $N_0$  offenbar wichtig ist, dass die Länge  $N$  der DFT-Bildfunktion gleich  $N_0$  oder einem ganzzahligen Vielfachen von  $N_0$  gewählt wird (Fig. 8a und 8b). Andernfalls enthält das diskrete Spektrum  $X_N[k]$  nicht die «richtigen» Frequenzstützstellen, um das ursprüngliche periodische Signal  $x[n]$  exakt darzustellen. Es tritt ein Effekt auf, welcher mit dem englischen Begriff *Leakage* bezeichnet wird.

Ein Vergleich der Figuren 8a und 8b zeigt aber auch, dass ein grösseres  $N$  eine grössere spektrale Auflösung bewirkt. Zudem zeigt das Spektrum

$X_N[k]$  einen nahen Symmetriegrad, bedingt dadurch, dass  $x[n]$  eine reelle Funktion ist. Eine ähnliche Symmetrie wurde bereits bei der FTD besprochen.

Die  $N$ -Punkt-DFT kann auch zur Berechnung des Spektrums von Signalen endlicher Dauer ( $\leq N$ ) verwendet werden. In diesem Fall zeigt sich ein Zusammenhang mit der Fouriertransformation für diskrete Signale (19a), nämlich

$$X_N[k] = X(e^{j(2\pi/N)k}) \quad (39)$$

Für ein Signal endlicher  $N_1$  ist die DFT gleich der abgetasteten Fouriertransformation, falls  $N_1 \leq N$ . Dies ist in der Figur 9 anhand der 8-Punkt-DFT eines Signals mit  $N_1 = 4$  gezeigt.

Bis anhin wurde stillschweigend angenommen, dass sowohl bei  $x_N[n]$  als auch bei  $X_N[k]$  nur Werte von  $n$  und  $k$  zwischen 0 und  $N-1$  vorhanden seien. Nun sind aber die komplexen Exponentialfunktionen  $e^{-j(2\pi/N)kn}$  bzw.  $e^{j(2\pi/N)kn}$  periodisch sowohl in  $n$  als auch in  $k$  mit der Periode  $N$ . Wird also  $X_N[k]$  in (37a) für  $k < 0$  oder für  $k > N-1$  bestimmt, so findet man dieselben Werte wie für  $0 \leq k < N-1$ . Analoges gilt für  $x_N[n]$  in Gleichung (37b). Man kann deshalb sagen,  $x_N[n]$  und

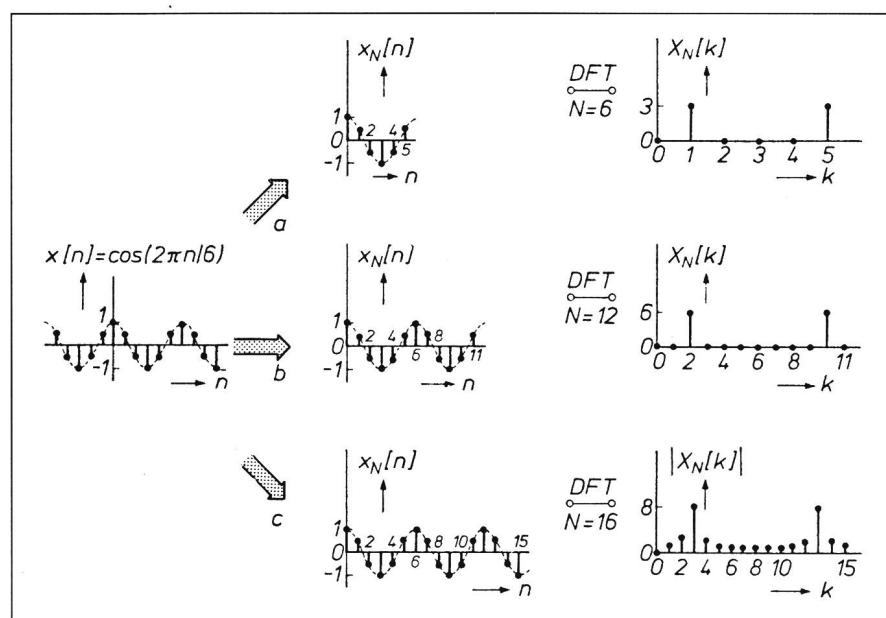
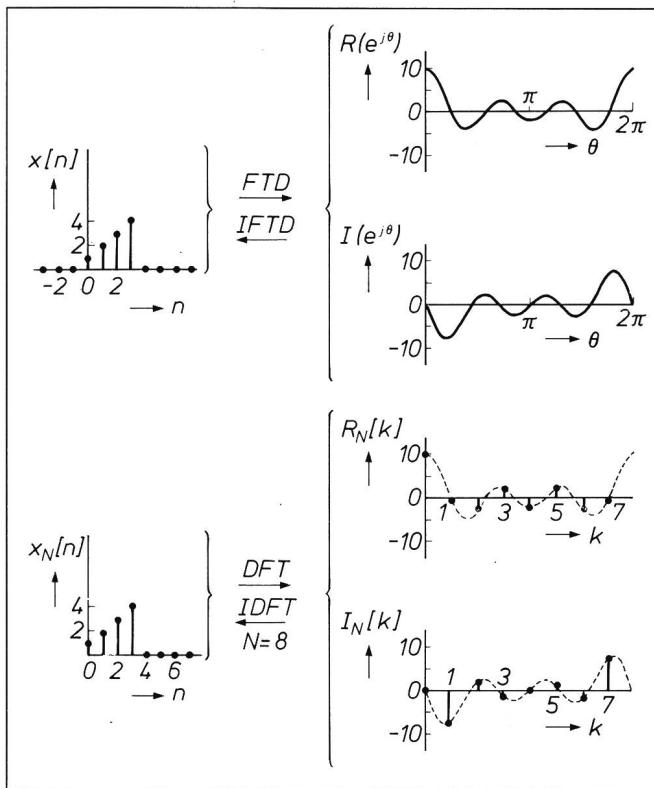


Fig. 8 Beispiel für die  $N$ -Punkte-DFT

Anwendung der  $N$ -Punkt-DFT für verschiedene Werte von  $N$  auf das periodische Signal  $x[n] = \cos(2\pi n/6)$ .  $N$  ist gleich einem ganzzahligen Vielfachen der Periode des Signals  $x[n]$  zu wählen, also etwa  $N = 6$  (a) oder  $N = 12$  (b). Andernfalls tritt eine «Leakage» zwischen den spektralen Komponenten auf (c). Bei  $N = 6$  und  $N = 12$  ist das Spektrum reell, bei  $N = 16$  komplex. Für den letzten Fall ist lediglich der Betrag aufgezeichnet.



$X_N[k]$  seien periodische Funktionen der Periode  $N$ , wobei aber bloss die Grundintervalle zwischen 0 und  $N-1$  für die Transformation von Bedeutung sind.

#### Die schnelle diskrete Fouriertransformation – Fast Fourier Transform (FFT)

Zusätzlich zu den bereits beschriebenen Transformationen findet man häufig den Begriff FFT (Fast Fourier Transform) in der Literatur über diskrete Signalverarbeitung. Dies ist nun aber keine neue Transformation, sondern eine sehr effiziente Methode zur Bestimmung der DFT. Dabei bezeichnet man mit FFT eine ganze Reihe von miteinander verknüpften Methoden und Strategien.

Ein Blick auf die Gleichung (37a und b) zeigt, dass man zur Bestimmung eines einzigen Punktes der Transformierten  $N$  komplexe Multiplikationen und  $N-1$  weniger rechenaufwendige komplexe Additionen

durchführen muss, für die ganze  $N$ -Punkt-Transformation ergeben sich also  $N^2$  komplexe Multiplikationen. Bei einer einfachen 4-Punkt-Transformation sind das zwar nur deren 16, für  $N = 2048$  aber immerhin  $N_2 = 4\ 194\ 304$ , und eine solche Grösse von  $N$  ist in der Praxis durchaus üblich. Da diese Rechenzeit und benötigte Rechenanlagen bestimmt, wird seit bereits 200 Jahren und speziell seit den letzten dreissig Jahren [9] nach Methoden gesucht, welche die Berechnung einer  $N$ -Punkt-Transformation mit weniger Operationen erlauben. Das Vorgehen ist bei allen Methoden ähnlich: Es wird versucht, eine gewisse Anzahl von DFT mit kürzerer Länge zu bestimmen und diese dann geeignet zu kombinieren. Ist beispielsweise  $N$  eine gerade Zahl, dann kann man je eine  $N/2$ -Punkt-DFT der geradzahligen und der ungeradzahligen Abtastwerte von  $x_N[n]$  bestimmen. Die  $N$ -Punkt-DFT erhält man dann aus diesen beiden Resultaten. Insgesamt ergibt das weniger Operationen als das

Fig. 9  
Vergleich zwischen der Fouriertransformation für diskrete Signale und der 8-Punkt-diskreten Fouriertransformation eines Signals  $x[n]$  endlicher Dauer  $N_1$   
Es ist offensichtlich, dass das DFT-Spektrum  $X_N[k] = R_N[k] + jI_N[k]$  gleich dem abgetasteten Fourierspektrum  $X(e^{j\theta}) = R(e^{j\theta}) + jI(e^{j\theta})$  ist.

direkte Vorgehen. Ist  $N/2$  seinerseits eine gerade Zahl, so kann die Prozedur wiederholt werden. Am bekanntesten ist deshalb die FFT für  $N = 2^M$ . Der selbe Algorithmus wird dann  $M$  mal angewendet, und man bekommt daher eine Anzahl Operationen in der Grössenordnung von  $N \times M$ , was einer Reduktion um den Faktor  $N/M$  entspricht, verglichen mit der direkten Berechnung der DFT. Der mittels der FFT vor allem für grosse  $N$  zu erzielende Gewinn zeigt die Figur 10.

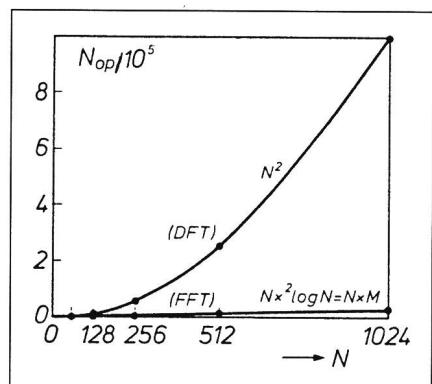


Fig. 10 Anzahl benötigter Operationen  $N_{op}$  bei direkter Bestimmung der  $N$ -Punkt-DFT und bei FFT  
Ist  $N = 2^M$  eine Zweierpotenz, dann reduziert sich die Anzahl Operationen um den Faktor  $N/M$ .

(Fortsetzung in Heft 15/86)

#### Literatur

- [1] J.B.H. Peek: Digital signal processing. Philips Technical Review 42(1985)4, p. 103...109.
- [2] H. Dollecamp, L.J.M. Esser and H. de Jong: P<sup>2</sup>CCD in 60 MHz oscilloscope with digital image storage. Philips Technical Review 40(1982)2/3, p. 55...68.
- [3] A.H.M. van Roermund and P.M.C. Coppelmans: An integrated switched-capacitor filter for viewdata. Philips Technical Review 41(1983/84)4, p. 105...123.
- [4] F.W. de Vrijer: Modulation. Philips Technische Rundschau 36(1976/77)11/12, S. 325...384.
- [5] L.R. Rabiner and B. Gold: Theory and application of digital signal processing. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1975.
- [6] A.V. Oppenheim and R.W. Schafer: Digital signal processing. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1975.
- [7] A. Papoulis: Circuits and systems. New York, Rinehardt and Winston, 1980.
- [8] A.V. Oppenheim, A.S. Willsky and I.T. Young: Signals and systems. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1983.
- [9] M.T. Heideman, D.H. Johnson and C.S. Burrus: Gauss and the history of the fast Fourier transform. IEEE ASSP Magazine 1(1984)4, p. 14...21.