

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen = Bulletin de l'Association suisse des électriciens, de l'Association des entreprises électriques suisses

**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen

**Band:** 76 (1985)

**Heft:** 11

**Artikel:** Hinweise zur Anwendung des diskreten Zustandsreglers

**Autor:** Ulrich, J.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-904626>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Hinweise zur Anwendung des diskreten Zustandsreglers

J. Ulrich

Es wird nach den Ursachen gefragt, weswegen der diskrete Abtast-Zustandsregler in der Praxis noch relativ selten eingesetzt wird, obwohl die Theorie bekannt und gefestigt und das Entwurfswerkzeug vorhanden ist. Es werden Probleme genannt, die bei der Realisierung eines geregelten Systems auftreten können, und Hinweise gegeben, wie man ihnen begegnen kann. Zu diesen Problemen gehören Entwurfsmethodik, Strukturfragen, Festlegen und Einhalten der Abtastzeit, resultierende Stellgrößen bei Vorgabe der Pole, Betrieb bei beschränkter Stellgröße und Störungsbekämpfung.

L'auteur analyse les raisons pour lesquelles le régulateur discret d'état, dont la théorie est pourtant connue et établie et dont les moyens d'élaboration sont disponibles, est encore peu utilisé. Certains problèmes pouvant se présenter lors de la réalisation d'un système réglé ainsi que la façon de les résoudre sont indiqués. Il s'agit de la méthodique de conception, de questions de structure, de la détermination et du maintien de la période d'échantillonnage, des grandeurs de réglage résultant de la position des pôles, du service avec des grandeurs de réglage limitées et de la lutte contre les perturbations.

## Adresse des Autors

Jürg Ulrich, dipl. El.-Ing. ETH, Contraves AG, 8052 Zürich.

## 1. Einleitung

Runde 25 Jahre sind vergangen, seit die Beschreibung kausaler dynamischer Systeme mittels Zustandsgrößen und deren Regelung durch lineare Zustandsrückführung Eingang in die Literatur fand [1], und zahllos sind mittlerweile die Veröffentlichungen rund um den Zustandsregler. Auch über Laborversuche wird recht häufig berichtet. Noch immer aber sind Anwendungen in der Praxis eher Ausnahme denn Regel. Vor nur 10 Jahren war dies noch durchaus verständlich, musste doch der Praktiker aus den verstreuten theoretischen Erkenntnissen zusammentragen, was für die Anwendung brauchbar und den Entwurf eines Zustandsreglers nötig war. Ausserdem stellt ein Zustandsregler hohe Anforderungen an die Signalverarbeitungskapazität und -genauigkeit. Aufwand und Entwicklungsrisiko waren daher gross und nur in besonderen Fällen gerechtfertigt. Mit den heutigen Mitteln der Mikroelektronik jedoch ist der Entwurf mit Hilfe des Rechners und die Realisierung mittels hochintegrierter Schaltungen ziemlich problemlos, und die grundlegenden Theorien werden zusammengefasst an den Hochschulen vermittelt. Anscheinend sind andere Ursachen für die langsame Entwicklung in der Praxis massgebend. Vermutlich ist es die Summe der gegenüber den klassischen Entwurfsverfahren neu oder in anderer Form zu

lösenden Aufgaben, welche dem Praktiker als zu hohes Hindernis erscheint.

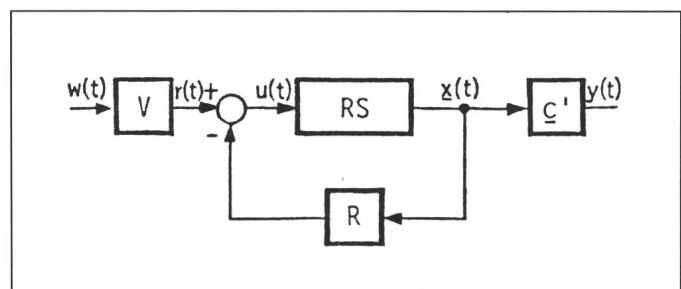
Der vorliegende Aufsatz kommentiert einige der spezifisch mit der Realisierung eines diskreten Zustandsreglers zusammenhängenden Aufgaben und skizziert Lösungswege. Er soll dazu beitragen, den Überblick über die zu behandelnden Probleme zu verbessern, und damit den Praktiker zur Anwendung der Zustandsregelung mit ihren unbestreitbaren Vorteilen ermuntern. Die ausgewählten Kapitel basieren auf den Erfahrungen des Autors und seines verstorbenen Kollegen *Albert Müller* beim Entwurf von elektromechanischen Antrieben. Deshalb beziehen sich die Kommentare und Beispiele meist auf Eingrössensysteme kleiner Ordnung; sie lassen sich sinngemäss auf Mehrgrössensysteme erweitern.

Es sei die Aufgabe gestellt, die Ausgangsgrösse  $y$  einer kontinuierlichen, linearen bzw. linearisierten Regelstrecke (Fig. 1) mit dem Eingang  $u$ , deren dynamisches Verhalten unzulänglich ist und auf die Störungen einwirken können, der Führungsgrösse  $u$  nachfolgen zu lassen. Die nachstehend kurz skizzierte, theoretische Lösung wird als bekannt vorausgesetzt [2]; die Herleitung mag gleichzeitig als Referenz für die Terminologie dienen, wobei die halbfetten grossen Buchstaben ( $A$ ,  $F$ , ...) Matrizen und die kleinen ( $c$ ,  $x$ , ...) Vektoren bezeichnen.

Die lineare Regelstrecke, beschrieben durch die Vektordifferentialgleichung

Fig. 1  
Zustandsregelung

$w(t)$  Führungsgrösse  
 $r(t)$  Sollwert  
 $u(t)$  Steuerwert  
 $\underline{x}(t)$  Zustandsvektor  
 $y(t)$  Ausgangsgrösse  
 $V$  Vorfilter  
 $RS$  Regelstrecke  
 $\dot{\underline{x}} = F\underline{x}(t) + g u(t)$   
 $R$  Regler  
 $C'$  Ausgangsvektor



chung 1. Ordnung (1a) und die Ausgangsgleichung ohne Berücksichtigung der Durchgangsmatrix  $d$  (1b)

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + gu(t) \quad (1a)$$

$$y(t) = c'x(t) \quad (1b)^1$$

wird im Intervall  $kT \leq t < kT + T, k = 0, 1, 2, \dots$  mit einem stückweise konstanten Steuerwert  $u(t) = u(kT) = u[k]$  angesteuert, wobei Ausdruck  $u[k]$  die abgekürzte Schreibweise definiert. Die Ausgangsgrösse  $y$  wird nur in den Zeitpunkten  $t = kT$  erfasst. Das derart zeitlich diskretisierte System gehorcht der Differenzengleichung

$$x[k+1] = Ax[k] + bu[k] \quad (2)$$

Man kann zeigen [2], dass sich die Koeffizienten von (2) aus den Koeffizienten des kontinuierlichen Systems folgendermassen berechnen lassen:

$$A = \exp(FT) \quad (3a)$$

$$b = \int_0^T \exp(F \cdot \tau) d\tau \cdot g \quad (3b)$$

Da der Zustandsvektor  $x$  die vollständige Information über den inneren Zustand des linearen Systems enthält, lässt sich die Steuergrösse aus einer Linearkombination der Zustandskomponenten und des Sollwertes gewinnen:

$$u[k] = r[k] - k'x[k] \quad (4)$$

Der Sollwert  $r[k]$  ist der Ausgang des Vorfilters mit der Führungsgrösse  $w[k]$  am Eingang; im einfachsten Fall ist  $r[k]$  proportional zu  $w[k]$ . Wird die Steuerbarkeit von  $A$  und  $b$  vorausgesetzt, so lassen sich durch Wahl von  $k'$  beliebige Eigenwerte des rückgekoppelten Systems

$$x[k+1] = (A - bk')x[k] + br[k] \quad (5)$$

erreichen. Mit  $c'$  und  $A$  beobachtbar kann der Zustand  $x$  mit gegen Null gehendem Fehler geschätzt werden. Der hierfür verwendete Beobachter hat keinen Einfluss auf das Führungsverhalten des Regelkreises. Die Struktur des Gesamtsystems ist in Figur 2 angegeben. Das Halteglied für den Steuerwert  $u[k]$  und das Stellglied sowie der Abta-

<sup>1)</sup> ' bezeichnet hier transponierte Grössen, in den andern Aufsätzen  $T$ .

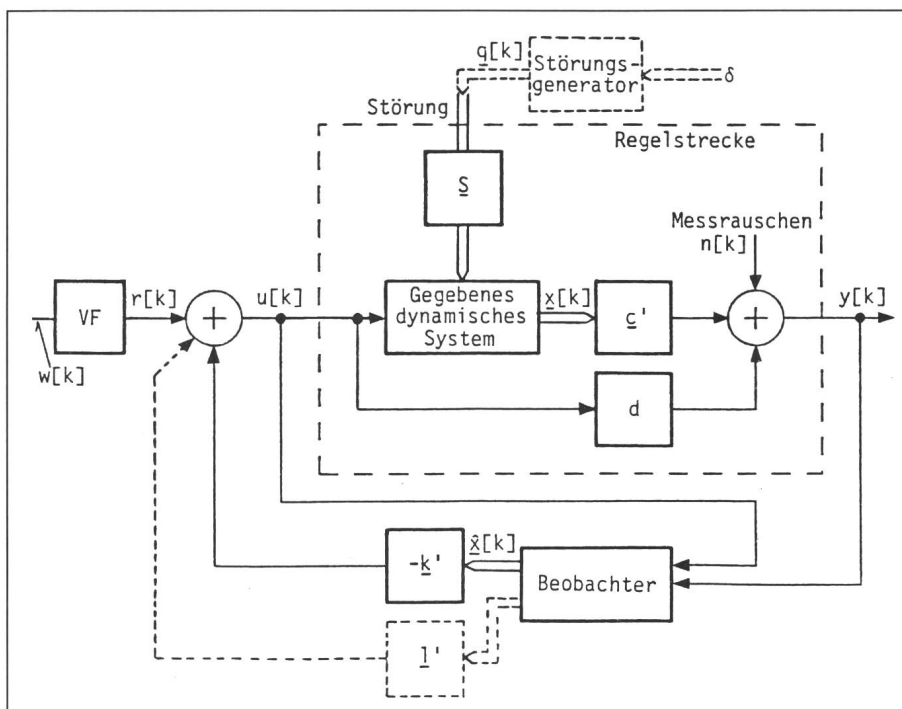


Fig. 2 Schema des diskreten zustandsgeregelten Eingrössensystems

$x[k]$ Zustandsvektor	$c'$ Ausgangsvektor
$\hat{x}[k]$ Schätzwert des Zustandsvektors	$d$ Durchgangsmatrix (hier skalar)
$\delta$ Störimpulsvektor	$k'$ Rückführvektor
$q[k]$ Störungsvektor	$l'$ Rückführvektor für Störung

ster der Ausgangsgrösse sind der Regelstrecke zugeschlagen.

Theoretisch wäre auch eine kontinuierliche Lösung möglich. Die Abtastregelung jedoch lässt, zusammen mit einer Amplitudenquantisierung, die Verarbeitung mittels digitaler Elektronik zu, was angesichts der angestrebten Komplexität und der erforderlichen Genauigkeit unumgänglich ist.

## 2. Entwurfsmethodik und Systemstruktur

Man findet in der Literatur kaum ein einheitliches, abgeschlossenes Entwurfsverfahren, das man rezeptartig anwenden könnte. Trotzdem dürften die Techniken und notwendigen Stationen für die Reglersynthese hinreichend bekannt sein. Als wegweisend in der Methodik ist Ackermann zu erwähnen [2]. Die grundlegende Idee der Zustandsregelung ist in der Einleitung skizziert. Will man den Reglerentwurf ganz kurz charakterisieren, so sind folgende Stichworte zu nennen: Modellierung, Wahl der Abtastzeit, gewünschtes dynamisches Verhalten und Eigenwerte des geregelten Systems, Berechnung der Rückführmatrix, Wahl des Beobachters (vollständige oder reduzierte Ordnung, Pollagen)

und Berechnung der Parameter, allfällige Störungsbekämpfung, Umformungen für die Realisierung aus Gründen der Rechengenauigkeit und -geschwindigkeit.

Es handelt sich um eine ganzheitliche, ziemlich formale Betrachtungsweise, die auf der mathematischen Beschreibung des Modells der Regelstrecke und auf deren Verhalten im Zeitbereich basiert. Zwar wird sich die ursprüngliche Wahl des Zustandsvektors normalerweise auf physikalische Gegebenheiten abstützen, im Laufe des Entwurfs jedoch werden Zustands Transformationen vorgenommen, so dass der Zusammenhang mit physikalisch greifbaren Grössen verlorengeht. Dies im Unterschied zu klassischen Entwurfsverfahren z.B. für einen PID-Regler, welche mehrheitlich im Frequenzbereich operieren und bei denen die eingebrachten Änderungen als Ergänzungen im Modell, das meist als Kaskade von Laplace-Übertragungsfunktionen vorliegt, quasi physisch sichtbar werden.

Es scheint daher weniger die Unsicherheit bezüglich des einzuschlagenden Weges als vielmehr der Verlust an Anschaulichkeit eine Hemmschwelle für die Anwendung des Zustandsreglers zu sein. Der Praktiker muss sich

damit abfinden, dass aus der «schwarzen Kiste», in die Messwert, Steuerwert und Sollwert eingehen, der neue Steuerwert  $u[k]$  herauskommt. Diese Kiste enthält, davon kann man heute ausgehen, Digitalelektronik, sei dies in Form irgendeines Rechners oder einer Einzweckschaltung. Dass sich die Berechnung nicht auf physikalisch anschauliche Grössen abstützt ist letztlich unwesentlich. Wesentlich hingegen ist, dass der Algorithmus in einer Form vorliegt, die numerische Schwierigkeiten vermeidet; deshalb sind die erwähnten Zustandstransformationen unerlässlich.

Für weitergehende Untersuchungen in der Entwurfsphase, wie z.B. die Ermittlung des Schätzwertes des Zustandes, bietet sich die Rechnersimulation an.

### 3. Abtastzeit

Die Diskretisierung der kontinuierlichen Regelstrecke darf das Übertragungsverhalten nicht nachteilig beeinflussen, was sich durch geeignete Wahl der Abtastzeit erreichen lässt. Es sind einerseits die Anforderungen, wie sie aus der Systemtheorie resultieren, andererseits die Möglichkeiten der Signalverarbeitung unter einen Hut zu bringen. Systemtheoretisch sind die erreichbare Bandbreite, die Erhaltung der Steuerbarkeit bei komplexen Eigenwerten der Regelstrecke und das Vermeiden der Überlappung von Teilspektren (Aliasing) von Belang, alles Auflagen, die um so besser erfüllt werden, je höher die Abtastfrequenz ist. Für eine tiefe Abtastfrequenz dagegen sprechen die geringere Sensitivität bezüglich Modellierungsgenauigkeit und Quantisierungsfehler und die resultierenden geringeren Stellamplituden. Verarbeitungstechnisch ist ebenfalls eine kleine Abtastfrequenz erwünscht, weil dadurch die Zahl der auszuführenden Operationen pro Zeiteinheit kleiner wird.

Die mannigfaltigen Überlegungen systemtheoretischer Art lassen sich auf ein Rezept zur Wahl der Abtastfrequenz konzentrieren [3]. Als wesentlicher Punkt sei in diesem Zusammenhang angemerkt, dass die erreichbare Bandbreite des geregelten Systems bestenfalls ein Achtel der Abtastkreisfrequenz beträgt. Meist bleiben dem Praktiker dann zwei Probleme zu lösen, die Filterung des Ausgangssignals und die Abstimmung der Taktzeit mit den verwendeten Rechengeräten.

Bei der Erfassung des Ausgangssignals darf das Abtasttheorem nicht verletzt werden. Mit zu hohen Frequenzanteilen ist zu rechnen, wenn das Frequenzspektrum der Übertragungsfunktion der Regelstrecke im Bereich oberhalb der halben Abtastfrequenz Anteile aufweist, die nicht vernachlässigbar sind. Dies ist in etwa gegeben, wenn einzelne komplexe Polpaare dieser Übertragungsfunktion einen Betrag aufweisen, der grösser als ein Achtel der Abtastkreisfrequenz ist. Derartige Pole können zwar für die Regelaufgabe unerheblich sein und treten nicht in Erscheinung, solange der Steuerwert bandbegrenzt ist, doch muss damit gerechnet werden, dass Störungen, wie z.B. Messrauschen, höhere Frequenzanteile einbringen. Die notwendige Filterung ist selten einfach zu realisieren und immer mit einem zusätzlichen Zeitbedarf verbunden. Liegt das Ausgangssignal als elektrische Grösse (Strom, Spannung) vor, kann ein Analogfilter helfen, wobei Genauigkeit und Zeitbedarf zu beachten sind. Wird aber z.B. die Position einer Welle mit einer periodisch abgelesenen Kodierscheibe erfasst, so kann die Lösung nur darin liegen, die Abtastfrequenz für die Scheibe genügend hoch zu machen und mit dieser erhöhten Frequenz eine diskrete Filterung vorzunehmen.

Die Realisierung des *Beobachters* und des *Reglers* geschieht natürlich am direktesten mit einer Einzweckelektronik nach Mass. Abtastfrequenz, Datenformat und Rechenablauf lassen sich frei vorgeben. Wirtschaftliche Überlegungen lassen diese Maximallösung selten zu. Oft ist mit zumindest teilweise gegebenen Rechenschaltungen auszukommen, die neben der Regelung noch andere Aufgaben wahrnehmen. Die Reglerimplementierung wird dann stark von der vorhandenen Hardware geprägt, und meist ist die Taktzeit und damit die erreichbare Bandbreite zum vornherein fixiert. An allgemeingültigen Aussagen zu derartigen Situationen lässt sich etwa folgendes festhalten:

- Die (äquidistanten) Abtastzeitpunkte müssen exakt eingehalten werden,
- wird die Ausgangsgrösse gefiltert, so ist die Laufzeit in Rechnung zu stellen,
- die Sollwertvorgabe muss auf den Abtastzeitpunkt bezogen sein, für den die Ausgangsgrösse ermittelt wurde,
- die Steuerwertausgabe soll raschmöglichst nach dem Auslesezeit-

punkt erfolgen, aber in zeitlich konstantem Abstand davon,

- falls die Rechenzeit nicht ausreicht, sind Schaltungsergänzungen vorzunehmen, z.B. in Form eines Hardware-Multiplikators.

Ein einfaches Beispiel möge den zweiten Punkt verdeutlichen. Als Messergebnis werde das arithmetische Mittel zweier aufeinanderfolgender Messwerte weiterverwendet:  $y_1[k] = (y[i] + y[i-1])/2$ .  $y_1$  ist dann gültig für die Zeit  $t_k = iT - T/2$ . Der Sollwert ist dann ebenfalls auf  $t_k$  zu beziehen. Die für die Filterung benötigte Zeit ergibt eine unvermeidliche Verzögerung, die nicht als schädliche Totzeit in den Regelkreis eingehen darf. Beim nächsten Punkt geht es ebenfalls darum, Totzeit zu vermeiden. Ist der Berechnungsablauf richtig organisiert, so sind nach dem Erfassen des Messwertes und des Sollwertes im Abtastzeitpunkt nur noch wenige Operationen auszuführen (beim Beobachter reduzierter Ordnung mehr als beim vollständigen Beobachter), für welche sich eine Worst-Case-Berechnungszeit ermitteln lässt, nach der dann die Ausgangsverzögerung festzulegen ist. Je nach Anwendung kann diese Totzeit unerheblich sein und vernachlässigt werden (dann stört auch eine variable Verzögerung nicht) oder aber in der Grössenordnung von Zehnteln der Taktzeit liegen, was die explizite Berücksichtigung im Entwurf notwendig macht. Es empfiehlt sich in diesem Fall, einen vollständigen Beobachter zu verwenden, weil damit erstens die Zahl der in Kenntnis der aktuellen Ausgangsgrösse auszuführenden Operationen kleiner (die Gesamtzahl von Rechenschritten allerdings grösser) wird, und zweitens die nun mögliche Extrapolation des Schätzwertes eine einfache Kompensation der Totzeit erlaubt. Nachteilig an diesem Vorgehen ist die um eine Abtastperiode verzögerte Erfassung von Störungen auf die Strecke. Bezüglich der letzten der obgenannten fünf Punkte bleibt zu erwähnen, dass es unter Umständen angebracht ist, für die Messwertaufnahme und den Beobachter, das heisst zur Ermittlung des Zustandes unter Berücksichtigung von Störungen, die Abtastfrequenz separat festzulegen. Für die Führungsübertragung, für die allein die Zustandsrückführung massgebend ist, genügt manchmal eine vergleichsweise kleine Abtastfrequenz. Durch die Aufteilung in zwei Aufgaben verschiedener Geschwindigkeit lässt sich dann einiges an Zeit gewinnen.



## 4. Pollagen und Steuerwerte

Einer der Hauptvorteile der Zustandsregelung ist die Möglichkeit, die Pole der Übertragungsfunktion beliebig vorgeben zu können [4]. Sie bestimmen weitgehend das dynamische Verhalten des Regelkreises. Der Ingenieur hat mit der freien Wahl der Pollagen ein sehr wirkungsvolles Mittel in der Hand, dem System die gewünschten Eigenschaften zu geben. Allerdings muss er sorgfältig damit umgehen und darf keine Extrem Lösungen erzwingen. Eine beliebige Polplatzierung wird unter Umständen teuer erkauft, indem grosse Rückkopplungsparameter und damit hohe Steuerwertausschläge resultieren. Für gewöhnlich aber genügt es durchaus vorzuschreiben, die Pole müssten in ein vorgegebenes Gebiet in der komplexen  $z$ -Ebene zu liegen kommen, um die gewünschten dynamischen Eigenschaften zu gewährleisten. Es geht nun darum, den gegebenen Spielraum auszunützen und die Rückführung so zu wählen, dass einerseits die Pole im verlangten Gebiet liegen, andererseits die Steuerwertausschläge klein bleiben.

Für Eingrössensysteme besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Polen und Rückführvektor  $k'$ . Dieser ist zwar nicht anschaulich, trotzdem kommt man unter Beachtung einiger Hinweise (Pole nur soweit als nötig verschieben, Imaginärteile möglichst nicht verändern, dominante Pole des offenen Kreises auf die Gebietsgrenze verschieben, Pole nicht zu nah aufeinanderlegen [3]) in wenigen Schritten durch Versuch und Irrtum zu annehmbaren Verhältnissen. Für Mehrgrössensysteme finden sich in der Literatur nur wenige Ideen für eine zweckmässige Auswahl der Polstellen [5; 6]. Die recht zahlreichen Aufsätze über die im Sinne eines quadratischen Gütekriteriums optimalen Regelverfahren schaffen da nur scheinbar einen Ausgleich, weil hier das Problem bei der Wahl zweckmässiger Bewertungsverfahren und Gewichtungsmatrizen liegt. Tatsächlich handeln denn auch viele Artikel vom Auffinden geeigneter Gewichtungsmatrizen für das Gütekriterium derart, dass der Entwurf auf vorgegebene Eigenwerte [7] bzw. Eigenwerte in einem vorgegebenen Gebiet führt [8]. Andere Verfahren erlauben die Bestimmung der Rückführmatrix mit minimaler Norm bei Vorgabe der Pole bzw. des Polgebiets [9; 10].

Für den Anwender dürften jene Methoden am ehesten zu gebrauchen sein,

welche die Norm des Rückführvektors bzw. der Rückführmatrix minimalisieren. Weil bei allen Realisierungen das angestrebte, charakteristische dynamische Verhalten resultieren muss, unterscheiden sich deren Normen  $\|x\|$  nicht stark voneinander und wegen  $|u_i| \leq \|k'\| \cdot \|x\|$  (Schwarzsche Ungleichung) führt eine kleine Norm von  $k'$  auf einen kleinen Betrag von  $u_i$ . Das Gewichtungproblem ist in entschärfter Form latent vorhanden; je nach Wahl und Normierung der Zustandsvariablen sind die  $k'_i$  von verschiedenen Grössenordnungen und es drängt sich eine gewichtete Norm auf. An Aufsätzen über dieses Gebiet sind für den Eingrössenfall [11; 12] zu erwähnen, für den Mehrgrössenfall [9; 10].

Wie man sieht, ist das Problem der Minimalisierung der Stellgrössen bei der Polgebietsvorgabe erst ansatzweise gelöst. Der Theoretiker hat eine reizvolle Aufgabe vor sich, der Praktiker behilft sich mittlerweile mit suboptimalen, aus Versuch und Irrtum gewonnenen Lösungen.

## 5. Massnahmen gegen Überforderung des Steuerwerts

Die linearen Gleichungen für ein physikalisch greifbares System haben immer einen beschränkten Gültigkeitsbereich. Dieser wird von natürlichen Ursachen oder durch technische Eingriffe bestimmt. Der Ingenieur hat einige Möglichkeiten der Abstimmung der Regelstrecke, namentlich aber der Anpassung des Stellgliedes an die nachfolgende Anlage. Im Normalfall wird deshalb die Stellgrössenbeschränkung die massgebende Einschränkung sein. Abhängig von der Dynamik des Stellgliedes, im einfachsten Fall eine Konstante, ist damit der Steuerwert entsprechend zu beschränken. Als Linearkombination aus Sollwert und tatsächlichen oder geschätzten Zustandskomponenten kann der berechnete Steuerwert theoretisch unendlich gross werden, praktisch jedoch, weil auch die Zustandsgrössen naturgemäss nicht über alle Grenzen wachsen können, nur endlich gross, was aber für das Stellglied noch immer viel zu gross sein kann. Man wird deshalb in der Praxis den Steuerwert begrenzen und für den Betrieb mit beschränkter Stellgrösse spezielle Massnahmen treffen müssen.

### 5.1 Steuerwertbegrenzung

Es ist angezeigt, den Steuerwert schon bei der Berechnung in Übereinstimmung mit der Stellgrössenbeschränkung zu begrenzen und damit eine Überforderung der Stellgrösse zu vermeiden. Es ist dafür zu sorgen, dass die Begrenzung von  $u[k]$  erst bei der Ausgabe erfolgt. Es wäre fatal anzunehmen, berechnungsinterne Begrenzungen spielten eine untergeordnete Rolle, weil das Resultat ja dann ohnehin begrenzt sei. Selbst Grössen, welche ausschliesslich zum Ausgangswert beitragen, dürfen nur dann begrenzt werden, wenn ihr Überlauf einen solchen von  $u[k]$  impliziert. Berechnungsinterne Überläufe beeinflussen den inneren Zustand des Beobachters, deren Vermeidung garantiert das korrekte Funktionieren desselben und damit die stets richtige Ermittlung des Systemzustandes. Die maximalen Veränderungen der Eingangssignale des Beobachters von Takt zu Takt lassen sich abschätzen (Sprung über den vollen Wertebereich beim Steuerwert, je nach Dynamik der Regelstrecke beim Messwert) und damit die zu verarbeitenden Grössen. Das Vermeiden von Begrenzungen ist daher letztlich wieder eine Frage der Struktur und der Rechengenauigkeit (vgl. Kap. 2).

### 5.2 Fahren mit beschränkter Stellgrösse

Ein guter Regler nützt zur Erfüllung seiner Aufgabe die zur Verfügung stehende Leistung bestmöglich aus. Auch bei geeigneter Wahl der Eigenwerte des geregelten Systems sind Steuerwertausschläge bis in die Begrenzung kaum zu umgehen, will man nicht zum vornherein installierte Leistung verschenken. Sie treten auf bei kurzzeitig hohen Anforderungen z.B. infolge einer plötzlich auftretenden Störung. Was in einem solchen Fall passiert, soll anhand einer Plausibilitätsbetrachtung verdeutlicht werden.

Solange der Steuerwert in der Begrenzung ist, wirkt der Regler nicht wie gewünscht. Zwar wird der Zustand richtig geschätzt und der notwendige Steuerwert lässt sich ausrechnen, er kann aber nicht angewendet werden, weil er zu gross ist; das System gerät in Rückstand. Ist letzterer nahezu aufgeholt, weil längerfristig die Leistung der Regelstrecke ausreicht, um die Störung auszugleichen, oder weil die Störung verschwindet, so will der Regler die Aufholjagd abbrechen. Leider kommt er zu spät, denn er liefert natür-

lich wieder die nach linearem Regelgesetz optimalen Werte, die zu gross sein werden. Mit begrenztem Steuerwert ist eben mehr Zeit nötig, um das System aus voller Fahrt abzubremsen, als der lineare Regler dafür aufwenden will. Die Regelgrösse wird mehrfach überschwingen; ein absolut unbefriedigendes Verhalten.

Eine geeignete Massnahme für den Betrieb mit begrenztem Steuerwert lehnt sich an das Prinzip der zeitoptimalen Steuerung an; dieses darf als bekannt gelten: Der Zustand  $x_0$  eines kontinuierlichen, linearen Systems der Ordnung  $n$  mit einem einzigen Steuerungseingang, das keine Eigenwerte in der rechten Hälfte der komplexen  $s$ -Ebene aufweist, kann mit maximal  $n$  Umschaltungen zwischen den beiden Steuergrössen  $u_{\min}$  und  $u_{\max}$  in jeden beliebigen Zustand  $x_1$  überführt werden. Die Verwendung einer derartigen Bang-Bang-Steuerung in einem Regelsystem ist darum schwierig, weil die Umschaltzustände (Schaltflächen) einerseits aufwendig zu ermitteln, andererseits aber zeitlich genau einzuhalten sind. Die Ermittlung ist insbesondere erschwert, wenn der Zielpunkt von einem sich ständig ändernden Sollwert abhängt. Hingegen kann eine nicht exakte Bang-Bang-Steuerung gute Dienste leisten, um zeitoptimal in unmittelbare Nähe des Zielpunktes zu fahren, wo dann die bewährte, lineare Regelung wieder übernehmen kann. Zu diesem Zweck verwendet man ein Modell reduzierter Ordnung der Regelstrecke, so dass die Berechnung der Schaltfläche mit vertretbarem Aufwand möglich ist.

Die grösste Unzulänglichkeit im Vergleich zur exakten zeitoptimalen Steuerung resultiert aus der Zeitquantisierung. Diese hat zur Folge, dass nicht genau auf der Schaltfläche umgeschaltet und daher nicht genau ins Ziel gefahren werden kann. Ferner spielt die Genauigkeit eine Rolle, mit der sich die beteiligten Variablen ermitteln lassen (Sollwertableitungen, Störgrössen, einige Zustandskomponenten). Muss man damit rechnen, dass im begrenzten Betrieb der Beobachter nicht mehr richtig funktionieren könnte (vgl. 5.1), so sind von den erwähnten Variablen jene, die nicht direkt erfasst werden, näherungsweise aus Differenzen aufeinanderfolgender Soll- bzw. Istwerte zu ermitteln, wobei die Amplitudenquantisierung dann stark ins Gewicht fällt.

Nach entsprechender Aufbereitung des Problems ist der zusätzliche Re-

chenaufwand tragbar; z.B. sind für Regelstrecken, die durch einen Doppelintegrator angenähert und für welche die benötigten zeitlichen Ableitungen separat berechnet werden, pro Abtasttakt ungefähr 4 Vergleiche, 10 Multiplikationen und 14 Additionen zusätzlich aufzuwenden.

## 6. Statische Genauigkeit und Störungsbekämpfung

Das Übertragungsverhalten eines Regelkreises mit einem gewöhnlichen Zustandsregler ähnelt jenem eines Kreises mit PD-Regelung. Insbesondere führt eine konstante Störung zu einer statischen Regelabweichung. Der zumeist erforderliche Integralanteil lässt sich systemkonform durch die Berücksichtigung der Störgrössen beim Entwurf einbauen. Die Bekämpfung nicht messbarer Störungen mittels Modellierung und Beobachtung, wie sie nachstehend erläutert wird, ist nicht auf statische Störungen beschränkt, sondern lässt sich für verschiedene Störungsarten anwenden und kombinieren. Sie basiert auf den folgenden Überlegungen [2].

Über die zu erwartenden, nicht messbaren Störungen, zusammengefasst im Störungsvektor  $q(t)$ , die einen Einfluss  $Mq(t)$  auf die zeitliche Ableitung des Systemzustandes und damit auf die Ausgangsgrösse haben, lassen sich gewisse Aussagen machen, denn es handelt sich ja nicht um Weisses Rauschen. Vielleicht kennt man Art und Dynamik der Störung, und lediglich der Zeitpunkt und die Heftigkeit des Auftretens sind unbekannt. In einem solchen Fall ist es möglich, die Störung zu beobachten. Aus dem geschätzten Störungszustand lässt sich dann eine Steuerwertkorrektur ableiten. Selbst wenn die Modellierung die tatsächlichen Verhältnisse nur grob annähert, kann die qualitativ richtige Korrektur eine wesentliche Verbesserung bringen.

Die Störung gehorche der Vektordifferentialgleichung

$$\dot{q} = Vq(t) + \delta \quad (6)$$

wo  $\delta$  ein stochastischer Störimpulsvektor mit Mittelwert 0 ist. Energie und Einsatzzeitpunkt des Einzelimpulses sind unbekannt. Das um den Störungszustand erweiterte System enthält ein nichtsteuerbares Teilsystem.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} FM \\ 0 \ V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$y(t) = [c' \ 0'] \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Das Störungsspektrum sei bandbegrenzt und die Häufigkeit der Anregung gering im Vergleich zur Abtastfrequenz. Bei richtiger Wahl der Abtastperiode entsteht ein vernachlässigbarer Fehler, wenn  $q(t)$  im Intervall  $kT \leq t < kT + T$  durch den Mittelwert angenähert wird. Die diskrete Form der Gleichung ist

$$x^*[k+1] = A^*x^*[k] + b^*u[k] + \varepsilon[k] \quad (9a)$$

$$y[k] = c^*x^*[k] \quad (9b)$$

mit den Abkürzungen:

$$x^* = \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix}$$

$$A^* = \exp \left( \begin{bmatrix} FM \\ 0 \ V \end{bmatrix} T \right) = \begin{bmatrix} A & S \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

$$b^* = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \int_0^T \exp(F(T-\tau)) \cdot M \cdot \exp(V\tau) d\tau$$

$$D = \exp(VT)$$

$$c^* = [c' \ 0']$$

$\varepsilon[k]$  enthält ein Faltungsintegral mit  $\delta(t)$ ; da über  $\delta$  nichts weiter bekannt ist als der Mittelwert 0, wird  $\varepsilon[k] = 0$  gesetzt; es interessiert nur der resultierende Zustand  $q$ .

Der Zustand dieses erweiterten Systems lässt sich in bewährter Manier mit Hilfe eines Beobachters ermitteln. Da es aber ein nicht steuerbares Teilsystem enthält, kann nicht einfach ein Rückführvektor  $k^*$  nach dem bewährten Polvorgabeverfahren berechnet werden. Vielmehr ist der Störungseinfluss separat zu berücksichtigen. Mit dem universellen Ansatz

$$u[k] = r[k] - k'x[k] - l'q[k] \quad (10)$$

gilt für das autonome, geregelte System

$$x[k+1] = (A - bk')x[k] + (S - bl')q[k] \quad (11)$$

Man ist bestrebt,  $S - bl'$  möglichst klein zu machen. Der Idealfall  $S = bl'$  ist i.a. nicht zu erreichen. In der Wahl von  $l'$  liegt eine Gewichtung. Beispielsweise kann das Ziel sein,  $u_q[k] = -l'q[k]$  so zu wählen, dass der Einfluss von  $q[k]$  auf  $x[k+1]$  minimal wird im Sinne des kleinsten Quadrats, dass also

$$V(u_q) = (q'S' + b'u_q)Q(Sq + bu_q) \quad (12)$$

minimal wird. Dabei ist  $Q$  eine quadratische, symmetrische Matrix, die je nach Gegebenheiten zu wählen ist (Ackermann sieht lediglich  $Q = I$  vor). Die Lösung ergibt

$$l' = (b'Qb)^{-1}b'QS \quad (13)$$

Weiter oben wurde als Ziel die langfristig vollständige Eliminierung des Einflusses der Störung auf die Regelgröße angegeben. Die Berechnung dieses Falles führt auf

$$l' = [c'(I - A + bk')^{-1}b]^{-1}c'(I - A + bk')^{-1}S \quad (14)$$

also die nämliche Formel wie (13), wenn

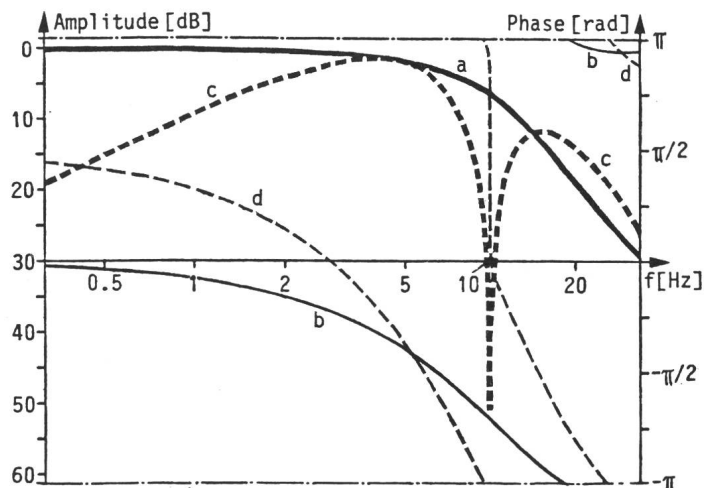
$$b'Q = c'(I - A + bk')^{-1} \quad (15)$$

gesetzt wird.

Zum Gesamtsystem mit Störgrößenbeobachter ist insbesondere anzumerken, dass das Prinzip der Separation nach wie vor gilt, d.h. die für die Zustandsrückführung festgelegten Eigenwerte werden durch den Störgrößenbeobachter nicht beeinflusst. Natürlich lassen sich nur die Eigenwerte von  $A$  verschieben, jene von  $D$  bleiben unverändert; nur  $k'$  trägt zur Eigenwertverschiebung bei,  $l'$  hingegen bewirkt, dass der Streckenzustand  $x$  von der modellierten Störung  $q$  nur noch in vermindertem Mass beeinflusst wird.

Fig. 3 Bodediagramm der Störungsübertragung eines geregelten Antriebs

- a Amplitudengang ohne Störgrößenmodellierung
- b Phasengang ohne Störgrößenmodellierung
- c Amplitudengang mit Störgrößenmodellierung
- d Phasengang mit Störgrößenmodellierung



Das Vorgehen ist sehr zu empfehlen für die Eliminierung statischer Fehler und zur generellen Verbesserung des Störungsfrequenzganges. Ein typisches Beispiel zeigt die Figur 3. Hier ist die skalare Störung  $f(t)$  als Konstante mit überlagerter, ungedämpfter 10-Hz-Schwingung modelliert ( $\omega = 2\pi f_1$ ;  $f_1 = 10$  Hz):

$$\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0 \quad (16)$$

oder

$$\dot{q}(t) = Vq(t) \quad (17)$$

mit

$$q(t) = [f \quad \dot{f} \quad \ddot{f}]' \quad \text{und}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Für die konstante Störung wird der Fehler auf 0 ausgeregelt, für eine solche von 10 Hz (theoretisch unendlich)

stark gedämpft. Störungen aller interessierenden Frequenzen werden mindestens gleich stark abgedämpft wie ohne Störgrößenmodellierung. Die Figur 4 zeigt den Unterschied in den Störungsschrittantworten.

Will man stationäre Fehler für bestimmte Verläufe der Führungsgröße vermeiden, das heisst im eingeschwungenen Zustand ein exaktes Übereinstimmen von Regelgröße und Führungsgröße für einen spezifischen Verlauf der letzteren erzwingen, ist ein Vorfilter das Gegebene, für dessen Synthese je nach Aufgabenstellung ein weites Experimentierfeld zur Verfügung steht. Bewährt hat sich der Entwurf über die Übertragungsfunktion. Die Ordnung des Filters wird gleich der Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen gewählt und das Nennerpolynom über eine sinnvolle Wahl der Pole willkürlich festgelegt, was Stabilität und geeignete Dynamik garantiert. Das Zählerpolynom ergibt sich dann eindeutig aus den Bedingungen.

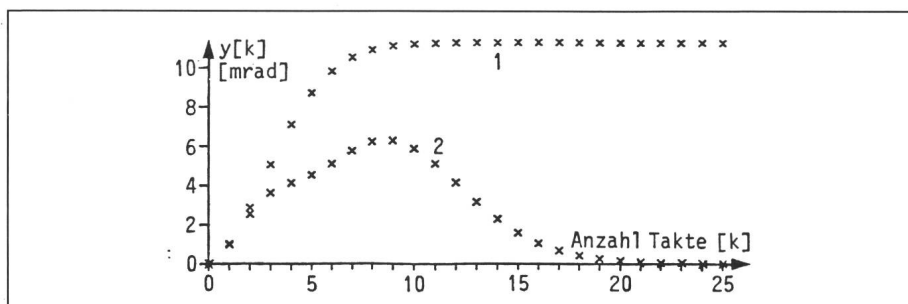


Fig. 4 Störungsschrittantwort eines geregelten Antriebs

Winkelabweichung  $y$  infolge der Drehmomentstörung

$$q(k) = \begin{cases} 0 \text{ Nm}, & k < 0 \\ 1 \text{ Nm}, & k \geq 0 \end{cases} \quad \text{in Funktion von } k, \text{ wobei die Taktzeit } 10 \text{ ms beträgt}$$

1 ohne Störgrößenmodellierung 2 mit Störgrößenmodellierung

## 7. Schlussbemerkungen

Es wurde auf diverse praktische Probleme hingewiesen, die bei der konkreten Realisierung eines direkten Abtast-Zustandsreglers auftreten können, und es wurde versucht aufzuzeigen, wie man ihnen begegnen kann. Ein wichtiges Kapitel wurde weggelassen, weil es den Rahmen gesprengt hätte: die Fragen der Amplitudenquantisierung und der Rechengenauigkeit. Wenn man bedenkt, dass selbst mit idealem Regelfilter die Quantisierung der Ausgangsgrösse allein Rauschamplituden derselben von mehr als einer Quantisierungseinheit und – bei etwas ungünstiger Dimensionierung – Rauschamplituden des Steuerwerts in der Grössenordnung des Linearitätsbereichs erzeugen kann, sieht man leicht ein, dass der Frage der Quantisierung und erst recht bei realen Filtern jener der Rechengenauigkeit besondere Sorgfalt zu widmen ist. Hier muss die Angabe zweier Standardwerke [13; 14], in denen derartige Fragen behandelt werden, genügen. Schliess-

lich dürfte klar geworden sein, dass der Reglerentwurf, ausgenommen vielleicht für Systeme bis maximal dritter Ordnung, weder algebraisch noch mit grafischen Methoden zu bewältigen ist. Er stützt sich auf die Matrizenrechnung ab. Eine Rechnerunterstützung ist daher fast unumgänglich, wobei diese je nach Umfeld und Aufgabe von verschiedenster Art sein kann, sei es, dass jemand seine eigene Subroutinensammlung für den Arbeitsplatzrechner aufbaut, sei es, dass er eine spezialisierte Programm-bibliothek eines Instituts mitbenützt, wie beispielsweise RASP (Regelungstechnische Analyse- und Syntheseprogramme) der Ruhr-Universität Bochum und der Deutschen Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt e.V., Institut für Dynamik der Flugsysteme, Oberpfaffenhofen. Jedenfalls aber sollte interaktiv gearbeitet werden.

### Literatur

- [1] R.E. Kalman: On the general theory of control systems. Proceedings of the first international congress of the IFAC on automatic and remote control, Moscow 1960; p. 481...492.
- [2] J. Ackermann: Abtastregelung, Berlin/Heidelberg, Springer-Verlag, 1972.
- [3] J. Ackermann: Abtastregelung. 2. Auflage. Band I: Analyse und Systeme. Berlin/Heidelberg/New York, Springer-Verlag, 1983.
- [4] W.M. Wonham: On pole assignment in multi-input controllable linear systems. IEEE Trans. AC12(1967)6, p. 660...665.
- [5] J. Ackermann: Abtastregelung. 2. Auflage. Band II: Entwurf robuster Systeme. Berlin/Heidelberg/New York, Springer-Verlag, 1983.
- [6] J. Ackermann: Entwurf durch Polvorgabe. Regelungstechnik 25(1977)6, S. 173...179, + Nr. 7, S. 209...215.
- [7] O.A. Solheim: Design of optimal discrete control systems with prescribed eigenvalues. International Journal of Control 19(1974)2, p. 417...427.
- [8] N. Kawasaki and E. Shimemura: Determining quadratic weighting matrices to locate poles in a specified region. Automatica 19(1983)5, p. 557...560.
- [9] H. Hanselmann: Polverschiebung und Ausnutzung der Freiheitsgrade bei Mehrgrössensystemen. Dissertation der Universität Karlsruhe, 1978.
- [10] H.P. Preuss: Zustandsregler-Entwurf durch näherungsweise Lösung der multilinearen Bestimmungs-gleichungen des Polvorgabeproblems. Regelungstechnik 27(1979)10, S. 326...332.
- [11] G. Kreisselmeier und R. Steinhäuser: Zur Berücksichtigung der Stellausschläge bei der Anwendung des Polvorgabe-Verfahrens. Regelungstechnik 27(1979)7, S. 209...212.
- [12] J. Schmidt: Verallgemeinerung eines Verfahrens zur Minimierung der Stellvariablen bei der Polvorgabe. Regelungstechnik 31(1983)11, S. 375...378, + Nr. 12, S. 409...413.
- [13] L.R. Rabiner and B. Gold: Theory and application of digital signal processing. Englewood Cliffs/N.J., Prentice-Hall, 1975.
- [14] A.V. Oppenheim and R.W. Schaffer: Digital signal processing. Englewood Cliffs/N.J., Prentice-Hall, 1975.