

<b>Zeitschrift:</b>	Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen = Bulletin de l'Association suisse des électriciens, de l'Association des entreprises électriques suisses
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen
<b>Band:</b>	76 (1985)
<b>Heft:</b>	2
<b>Artikel:</b>	Erweiterte Standardmodelle der Linearen Optimierung zur Planung elektrischer Energieverteilssysteme
<b>Autor:</b>	Sillaber, A.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-904548">https://doi.org/10.5169/seals-904548</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **Erweiterte Standardmodelle der Linearen Optimierung zur Planung elektrischer Energieverteilssysteme**

A. Sillaber

Für bestimmte Aufgaben der Ausbauplanung elektrischer Energieverteilssysteme in städtischen Versorgungsgebieten lassen sich vorteilhaft erweiterte Standardmodelle der Linearen Optimierung heranziehen. In der vorliegenden Arbeit werden Modelle zur Umspannwerkplanung, zur Planung von Ringnetzen sowie zur Ermittlung optimaler Strukturen von Niederspannungs-Strahlennetzen vorgestellt. Unter Beachtung sinnvoller Obergrenzen für den jeweiligen Modellumfang sind diese Modelle durchaus für kleinere Aufgabenstellungen aus der Praxis einsetzbar.

Zwei Anwendungsbeispiele dienen zur Veranschaulichung der praktischen Einsatzmöglichkeiten. Die Arbeit gibt darüber hinaus Hinweise und Anregungen für die Modellierung des Ausbauprozesses elektrischer Energieverteilssysteme und die Anwendung der Linearen Optimierung auf diesem Gebiet.

Dans le cadre de la planification du développement de systèmes de distribution d'énergie électrique dans les zones d'approvisionnement citadines, il est avantageux, pour certains travaux, de faire appel à des modèles standards élargis d'optimisation linéaire. Cet article présente des modèles pour la planification de stations de transformation et de réseaux bouclés ainsi que pour la détermination de structures optimums pour les réseaux radiaux basse tension. En tenant compte, pour l'ampleur de chaque modèle, de limites supérieures raisonnables, ces modèles peuvent très bien être utilisés dans le cadre de petits problèmes pratiques de planification. Deux exemples d'application servent à illustrer les possibilités pratiques d'utilisation. Par ailleurs, l'article donne des informations et des idées pour la réalisation de modèles pour le processus de développement de systèmes de distribution d'énergie et pour l'utilisation de l'optimisation linéaire dans ce domaine.

## **Adresse des Autors**

Alfons Sillaber, Dipl.-Ing., Dr. techn., Mitarbeiter der Planungsabteilung des Elektrizitätswerkes Innsbruck, Gumpstrasse 7, A-6020 Innsbruck

## **1. Allgemeines**

In den letzten Jahren wurde eine Vielzahl linearer Optimierungsmodelle für die Planung der zukünftigen Struktur elektrischer Energieverteilssysteme angegeben [1, 2, 3]. Es sollen hier Modelle vorgestellt und deren praktische Anwendbarkeit diskutiert werden, die durch Erweiterung und Anpassung linearer Standardmodelle entstanden sind. Auf allgemeine Investitionsmodelle zur Ausbauplanung elektrischer Versorgungssysteme wird in diesem Zusammenhang nicht eingegangen [4].

Für spezielle Planungsaufgaben auf diesem Gebiet lassen sich vorteilhaft Standardmodelle der Linearen Optimierung heranziehen:

- Hinweise zur kostengünstigen Aufteilung eines Versorgungsgebietes in mehrere Umspannwerkbereiche erhält man durch Anwendung von *Transportmodellen*.
- Die Aufgabe, mehrere Transformatorenstationen mit einem Umspannwerk durch einen Kabelring minimaler Länge zu verbinden, stellt ein Traveling-salesman-Problem dar, welches sich als äquivalentes *Zuordnungsmodell* formulieren lässt.
- Wenn die Spannungshaltung kein Problem darstellt, kann zur Ausbauplanung von Strahlennetzen ein *Transshipmentmodell* [5] herangezogen werden, das die näherungsweise Berücksichtigung von Investitions- und Verlustkosten gestattet.

Die genannten Planungsaufgaben stellen selbstverständlich nur eine charakteristische Auswahl dar, die keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt. Bei der Anwendung dieser Modelle samt eventuellen Erweiterungen treten wie bei anderen Aufgaben der Unternehmensforschung die Fragen der Genauigkeit der Modellbildung und des vertretbaren Rechenaufwandes auf. Deshalb wird im folgenden nicht nur auf die Modelle selbst eingegangen,

sondern auch deren praktische Anwendbarkeit diskutiert und anhand von zwei Beispielen dargestellt.

## **2. Ein erweitertes Transportmodell**

Wie bereits erwähnt, kann ein Transportmodell zum Aufteilen eines Versorgungsgebietes in mehrere Umspannwerkbereiche herangezogen werden. Wegen der wesentlichen Vereinfachungen bei der Modellbildung ist das Ergebnis jedoch nur als Richtlinie bei der langfristigen Ausbauplanung heranzuziehen.

Das gesamte Versorgungsgebiet ist in elementare Teilflächen zu zerlegen, welche jeweils durch einen Ersatzknoten mit entsprechender Wirklast repräsentiert werden. Neben den Energietransportkosten werden nunmehr noch die Investitions- und Betriebskosten der Umspannwerke in der Zielfunktion berücksichtigt. Es wird angenommen, dass entsprechend einem bereits vorliegenden Ausführungskonzept für Umspannwerke eine bestimmte Anzahl von Standardtypen bereits festgelegt ist. Als für die Ausbauplanung relevante Betriebskosten werden die Kosten für die Kupferverluste der Transformatoren explizit im Optimierungsmodell formuliert. Sie hängen quadratisch von der Umspannwerksbelastung ab. Alle übrigen Betriebskosten, wie jene für Instandhaltung und Überwachung oder für die Eisenverluste der Transformatoren können nach entsprechender Kapitalisierung den Investitionskosten zugeschlagen werden. Die spezifischen Energietransportkosten werden zweckmässigerweise anhand eines charakteristischen Verteilnetzes mit durchschnittlicher Auslastung ermittelt [6].

Zur Nachbildung der Investitionsentscheidungen dienen ganzzahlige Variablen, die nur die Werte 0 oder 1

annehmen können. Da gleichzeitig eine Auswahlentscheidung unter mehreren möglichen Umspannwerktypen zu treffen ist, werden diese binären Variablen zu speziell angeordneten Variablenmengen [7] zusammengefasst. Dies gestattet den Einsatz einer effizienten Strategie zur Lösung des gemischt-ganzzahligen linearen Optimierungsproblems.

Die quadratische Abhängigkeit der Verlustkosten von der Umspannwerkbelastung und der gewählten Umspannwerktype wird näherungsweise durch eine Schar von Polygonzügen nachgebildet. Diese Polygonzüge werden den jeweils entsprechenden Umspannwerktypen mit Hilfe der binären Entscheidungsvariablen und eigener Restriktionen zugeordnet. Das eigentliche kontinuierliche Transportmodell besteht aus den Leistungsbilanzen in den Umspannwerk- und Lastknoten. Die genaue Modellformulierung findet man in [2].

Dieses Modell stellt selbstverständlich nur eine von vielen anderen zweckmässigen Nachbildungen des realen Systems dar. So ist insbesondere auch die genauere Modellierung des Verteilnetzes z.B. mittels eines Transshipmentmodells möglich. Modelle bis zu etwa zehn möglichen Umspannwerken mit jeweils fünf verschiedenen Typen und einigen hundert Umspannstationen lassen sich mit Hilfe leistungsfähiger Standardsoftware ohne allzu grossen Aufwand lösen [7]. Vorteilhaft erscheint der Einsatz des beschriebenen oder eines ähnlichen Optimierungsmodells, wenn eine grundsätzliche Umgestaltung eines städtischen Mittel- oder Hochspannungsnetzes bevorsteht. Dies kann beispielsweise durch den Übergang auf andere Spannungsebenen bedingt sein [8]. Ähnliche Ausbaumodelle findet man in [6, 9].

### 3. Ein erweitertes Zuordnungsmodell

Die Eigenschaft von Transportmodellen, dass unter gewissen Voraussetzungen [10] die optimale Lösung ganzzahlig ist, lässt sich vorteilhaft zur Planung elementarer Netzstrukturen wie beispielsweise von Kabelringen ausnutzen. Dabei tritt folgende Problemstellung auf: Eine Anzahl von Netzknoten ist mit einem oder mehreren Umspannwerken durch einige Kabelringe möglichst geringer Gesamtlänge

unter Beachtung der maximalen Kabelbelastbarkeit zu verbinden. Dieses Routenplanungsproblem lässt sich als gemischt-ganzzahliges lineares Modell formulieren, dessen ganzzahliger Teil die Netzknoten auf die verschiedenen Kabelringe aufteilt. Der kontinuierliche Teil stellt ein Zuordnungsmodell, den Sonderfall eines Transportmodells, mit zusätzlichen Nebenbedingungen dar.

In das Modell gehen die Investitionskosten zur Errichtung der Kabelstrecken sowie deren thermische Belastbarkeit unter der Berücksichtigung von Einfachausfällen ein. Die Investitionsentscheidungen zur Errichtung einer Kabelstrecke zwischen zwei Netzknoten werden nunmehr durch kontinuierliche Variablen nachgebildet, die jedoch in der Optimallösung nur die Werte 0 oder 1 annehmen. Die Zuordnung der Netzknoten zu den einzelnen Kabelringen erfolgt mit Hilfe binärer Variablen, die wiederum zu speziell angeordneten Variablenmengen zusammengefasst werden. Neben den Restriktionen zur Nachbildung der thermischen Belastbarkeitsgrenze der Kabel sind noch zusätzliche Restriktionen für den Ausschluss sogenannter Kurzyklen erforderlich, um eine Degeneration der Optimallösung zu verhindern [2].

Da die Anzahl der zuletzt genannten Nebenbedingungen sehr rasch mit der maximalen Zahl von Netzknoten je Kabelring steigt, sind als praktische Obergrenze etwa 10 Umspannstationen je Ring anzusehen. Bei der Anwendung von Standardprogrammen der Linearen Optimierung [7] ist die Anzahl der speziell angeordneten Variablenmengen, die in diesem Modell der Lastknotenzahl entspricht, durch den erforderlichen Rechenaufwand mit ungefähr 100 beschränkt. Dies entspricht gut den Anwendungsfällen in der Praxis, meist dürfte jedoch der Nachweis der Optimalität einer gefundenen Lösung zu aufwendig sein.

Es soll noch darauf hingewiesen werden, dass auch Modifikationen und Erweiterungen des dargelegten Modells von praktischem Interesse sein können. Zur Berücksichtigung von Mehrfachkabellegungen, insbesondere bei Stufenausbaumodellen, kann die Nachbildung des Strassennetzes in einem städtischen Versorgungsgebiet erforderlich sein. Dann dürfte auch der Einsatz von Dekompositions- und Partitionierungsverfahren [11] oder anderer Spezialmethoden unerlässlich sein.

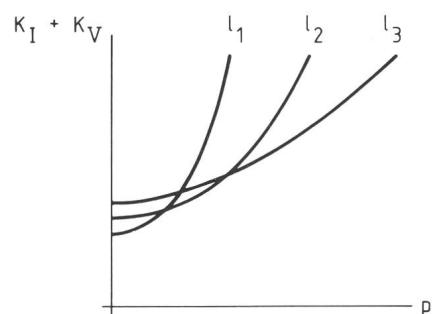


Fig. 1 Abhängigkeit der Investitions- ( $K_I$ ) und Verlustkosten ( $K_V$ ) von der übertragenen Höchstlast bei unterschiedlichen Kabelquerschnitten

### 4. Ein erweitertes Transshipmentmodell

Dieses Modell dient zur Ausbauplanung räumlich eng begrenzter Strahlennetze unter Berücksichtigung der Investitions- und Verlustkosten. Stehen mehrere genormte Kabelquerschnitte zur Auswahl, erhält man für den funktionalen Zusammenhang zwischen den Gesamtkosten einer Kabelstrecke und der im Höchstlastzustand übertragenen Wirkleistung eine Schar von Parabeln gemäss Figur 1.

Wählt man zu jeder Übertragungswirkleistung den jeweils optimalen Leitungstyp, so wird die entsprechende Kostenfunktion durch die Einhüllende dieser Parabelschar gebildet. Diese kann im technisch interessanten Bereich durch eine Gerade approximiert werden.

Die Zielfunktion enthält somit einen Fixkostenanteil, formuliert mittels binärer Variablen, sowie einen variablen Kostenanteil, der von der höchsten zu übertragenden Wirkleistung abhängt. Als Nebenbedingungen fungieren die Leistungsbilanzen in den Lastknoten und thermische Beschränkungen unter Berücksichtigung der Investitionsentscheidungen. Eine gegebenenfalls eingebaute Zusatzbedingung gewährleistet, dass alle gefundenen Lösungen nur Strahlennetze darstellen.

Das beschriebene Modell lässt sich vorteilhaft zur Planung von Niederspannungs-Kabelnetzen in neu errichteten Wohngebieten verwenden [12]. Zusätzlich zu den Netzkosten können auch die Kosten der speisenden Umspannstationen in das Modell einbezogen werden [13]. Bei Niederspannungs-Freileitungsnetzen in ländlichen Siedlungsgebieten sind die Investitionskosten im Vergleich zu den Verlustkosten meist so gering, dass die Fixkosten im mathematischen Modell vernachläs-

sigt werden können [14]. Da jedoch die Spannungsabfälle nicht nachgebildet werden, ist es nur zur Planung räumlich eng begrenzter Verteilnetze geeignet. Probleme mit einem vertretbaren Rechenaufwand umfassen bis etwa 200 ganzzahlige Variablen, wenn man sich mit praktisch brauchbaren, suboptimalen Lösungen begnügt. Die Anzahl der kontinuierlichen Variablen stellt für Aufgaben aus der Praxis keine Beschränkung dar.

## 5. Anwendungsbeispiele

### 5.1 Einstufiges Planungsmodell für ein Kabelringnetz

Zehn Umspannstellen (Knoten 1 bis 10) sind durch drei Kabelringe mit einem Umspannwerk (Knoten 0) so zu verbinden, dass die gesamte Kabellänge minimal ist. Die Knotenlasten können nachfolgender Zusammenstellung entnommen werden:

Knoten:	Last (kVA)
1	800
2	200
3	800
4	200
5	200
6	300
7	400
8	200
9	500
10	800

Es ist ein einziger Kabeltyp vorgesehen, dessen maximale Übertragungs-

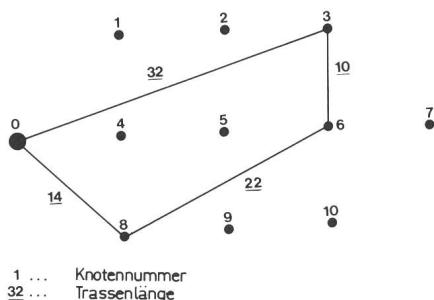


Fig. 2 Anordnung der Netz knoten im untersuchten Beispiel

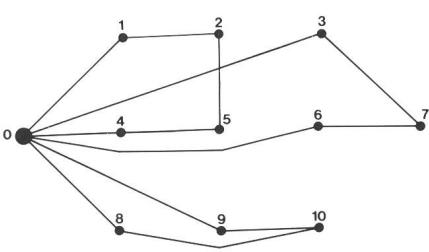


Fig. 3 Das Kabelnetz im optimalen Fall

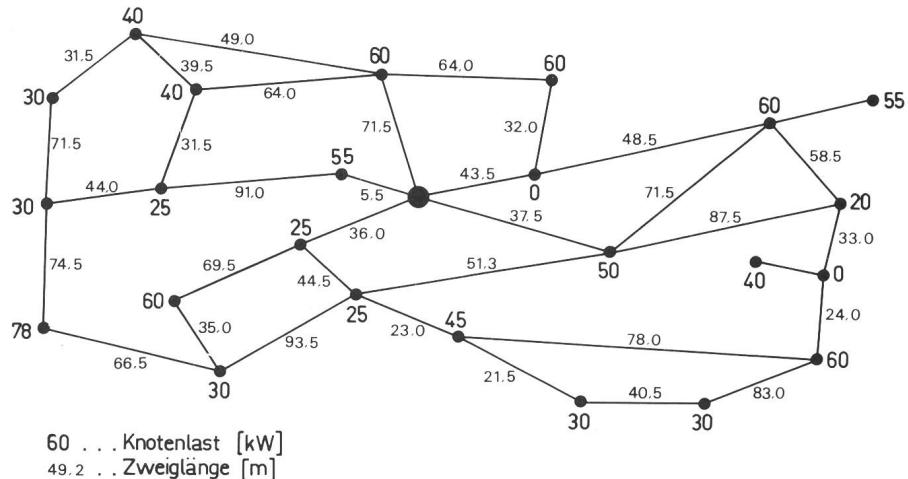


Fig. 4 Ausgangsdaten für das zu optimierende Niederspannungsnetz

leistung aufgrund seiner thermischen Belastbarkeit 1500 kVA beträgt. Wegen der Reserveverfordernisse bei Ein-fachausfällen darf die Belastung eines Kabelrings im Normalbetrieb nicht mehr als 1500 kVA betragen.

Figur 2 zeigt die in regelmässigen Abständen angeordneten Netzknoten. Als mögliche Kabeltrassen sind alle denkbaren geradlinigen Verbindungen zwischen den Netzknoten zugelassen. Diese vereinfachenden Annahmen stellen keine Einschränkung der Allgemeinheit für praktische Anwendungen dar, sondern dienen nur zur Gestaltung eines übersichtlichen Testbeispiels. Alle vorkommenden Trassenlängen sind in Form eines Kabelrings eingetragen. Die Ausdehnung des Versorgungsgebietes sei so gering, dass die Spannungsabfälle im Netz keine einschränkenden Nebenbedingungen für die Netzplanung darstellen mögen.

Das mathematische Modell stellt ein erweitertes Zuordnungsmodell gemäss Kapitel 3 dar. Es umfasst 30 binäre Variablen, zusammengefasst zu 10 speziell angeordneten Variablenmen-

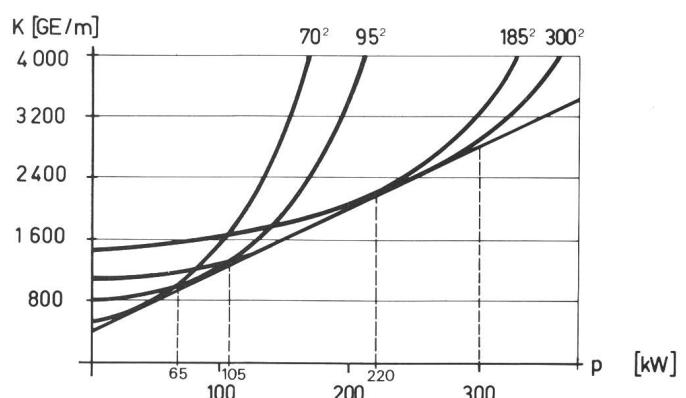
gen, 330 kontinuierliche Variablen und 234 explizite Nebenbedingungen. Mit Hilfe des Standardprogrammpakets MPSX/MIP 370 der Firma IBM [7] werden ganzzahlige Lösungen mit einem Zielfunktionswert unter 207 gesucht. Es wurde nach 2,82 min eine ganzzahlige Lösung gefunden, deren Optimalität nach 3,71 min bewiesen war. Der optimale Zielfunktionswert beträgt 206, die optimale Lösung ist in Figur 3 dargestellt.

### 5.2 Einstufiges Planungsmodell für ein Niederspannungs-Kabelnetz

Ein projektiertes Wohngebiet ist von einer Umspannstelle aus über ein Niederspannungs-Kabelnetz mit elektrischer Energie zu versorgen. Das zur Verfügung stehende Trassennetzwerk mit Angaben der Zweiglängen und Knotenlasten ist in Figur 4 dargestellt. Ein ähnliches Beispiel wurde bereits in [12] veröffentlicht.

Für die spezifischen Transportkosten werden aufgrund der linearisierten Kostenfunktion gemäss Figur 5  $400 \text{ GEm}^{-1} + 8 \text{ GEkW}^{-1}\text{m}^{-1}$  angesetzt.

Fig. 5  
Linearisierte  
Kostenfunktion



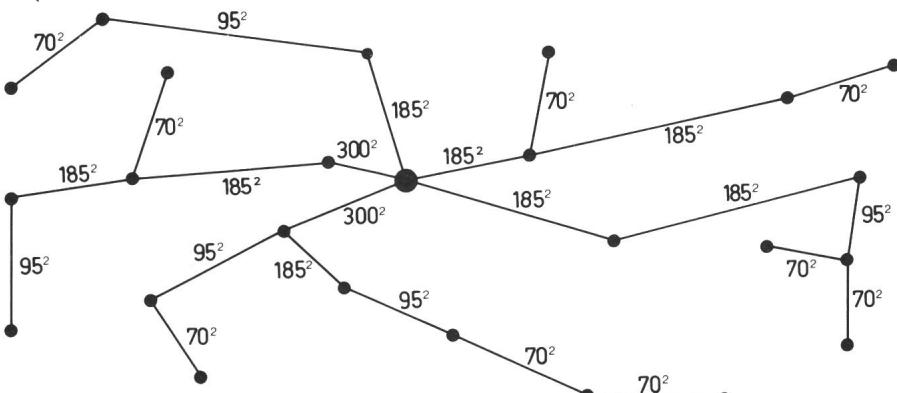


Fig. 6 Die beste der gefundenen Lösungen für das Niederspannungsnetz (Kabelquerschnitte im  $\text{mm}^2$ )

Das Fixkosten-Transshipmentmodell umfasst 33 binäre Variablen, 55 kontinuierliche Variablen und 55 Nebenbedingungen. Es wurde wiederum das Standardsoftwarepaket MPSX/MIP 370 der Firma IBM verwendet [7]. Die CPU-Zeit bis zum Auffinden der ersten ganzzahligen Lösung betrug 0,07 min, der Wert der Zielfunktion betrug  $1,267 \cdot 10^6$  Geldeinheiten (GE). Die beste ganzzahlige Lösung mit einem Zielfunktionswert von  $1,237 \cdot 10^6$  GE wurde nach 0,63 min ermittelt. Insgesamt wurden vier ganzzahlige Lösungen gefunden. Der Nachweis der Optimalität gelang nicht beim ersten Versuch, da die standardmässige «node table» mit 132 nodes zu klein war. Die beste der gefundenen Lösungen ist in Figur 6 dargestellt.

spannwerkkonfiguration in städtischen Versorgungsgebieten. Die wirtschaftlich optimale Struktur eines Kabelringnetzes lässt sich mit Hilfe eines erweiterten Zuordnungsmodells finden. Ein Fixkosten-Transshipmentmodell dient zur Planung von Strahlennetzen in räumlich eng begrenzten Versorgungsgebieten.

Moderne Standardprogramme der Linearen Optimierung ermöglichen die Lösung von kleineren Aufgabenstellungen aus der Praxis mit einem vertretbaren Rechenaufwand. Sie bieten den Vorteil, dass sie direkt vom Planungsingenieur eingesetzt werden können und keine detaillierten mathematischen Kenntnisse erfordern. Das wichtigste Kriterium für den Modellumfang stellt immer die Anzahl der ganzzahligen Variablen dar, da diese entscheidend für die notwendige Rechenzeit ist. Für umfangreichere Problemstellungen wird man auf Dekompositions- und Partitionierungsmethoden zurückgreifen müssen.

In dieser Arbeit wurden nur einstufige Ausbaumodelle vorgestellt, eine Erweiterung auf Mehrstufenmodelle ist jedoch ohne zusätzliche Schwierigkeiten möglich. Anhand von zwei

praktischen Beispielen wurden die Aufgabenstellung, der Modellumfang und der Lösungsaufwand demonstriert. Für bestimmte Aufgaben der Ausbauplanung elektrischer Energieverteilssysteme stellt somit die Lineare Optimierung ein zweckmässiges Werkzeug zum Auffinden wirtschaftlich-technisch günstiger Lösungen dar.

## Literatur

- [1] N. Adams, F. Beglari, M.A. Laughton and G. Mitra: Mathematical Programming Systems in Electrical Power Generation, Transmission and Distribution Planning. Proceedings of PSCC 1972, Paper No 1.1/13.
- [2] A. Sillaber: Lineare Optimierungsmodelle zur Synthese und zuverlässigkeitstheoretischen Analyse von Ausbauvarianten elektrischer Energieverteilssysteme in städtischen Versorgungsgebieten. Dissertation Technische Universität Graz 1982.
- [3] E. Masud: Distribution Planning: State of the Art and Extensions to Substation Sizing. Electric Power Systems Research 1(1977/78), S. 203...212.
- [4] A. Sillaber: Die Anwendung der gemischt-ganzzahligen Linearen Optimierung zur Planung elektrischer Energieverteilnetze. Zeitschrift für Operations Research 25(1981), S. 251...263.
- [5] D.L. Wall, G.L. Thompson and J.E.D. Northcote-Green: An optimization model for planning radial distribution networks. IEEE Transactions PAS 98(1979), 3, S. 1061...1065.
- [6] Y. Backlund and J.A. Bubenko: Computer-aided distribution system planning. Part I: Primary substation location and sizing. Proceedings of PSCC 1978, S. 158...165.
- [7] N.N.: IBM Mathematical Programming System Extended/370 (MPSX/370). General Information Manual. Compagnie IBM France Paris 1974.
- [8] W. Mollwitz: Umspannwerksplanung für eine Grossstadt. Österreichische Zeitschrift für Elektrizitätswirtschaft 27(1974), 2, S. 33...44.
- [9] D.M. Crawford and S.B. Holt: A mathematical optimization technique for locating and sizing distribution substations and deriving their optimal service areas. IEEE Transactions PAS 94(1975), 2, S. 230...235.
- [10] K. Neumann: Operations-Research-Verfahren Band 1. Carl-Hanser-Verlag München/Wien 1975.
- [11] L.S. Lasdon: Optimization Theory for Large Systems. MacMillan-Verlag London 1970.
- [12] R.N. Adams and M.A. Laughton: Optimal planning of power networks using mixed-integer programming. Part I: Static and time-phased network synthesis. Proceedings IEE 121(1974), 2, S. 139...147.
- [13] K.S. Hindi and A. Brameller: Design of low-voltage distribution networks: A mathematical programming method. Proceedings IEE 124(1977), 1, S. 54...58.
- [14] K.M. Hamam, A. Brameller and K.S. Hindi: Solution of the Trans-Shipment Problem by Network Modelling and its Application to Generator Scheduling and Distribution Design. Proceedings of PSCC 1975, Paper No 1.2/1.

## 6. Zusammenfassung

Bestimmte Standardmodelle der Linearen Optimierung werden um einen ganzzahligen Teil erweitert und zur Planung der zukünftigen Struktur elektrischer Energieverteilssysteme eingesetzt. Ein erweitertes Transportmodell eignet sich zur Planung der Um-