Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen = Bulletin de l'Association suisse des électriciens, de l'Association des entreprises électriques suisses

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen

Band: 75 (1984)

Heft: 21

Artikel: Über die Berechnung von Impedanzen

Autor: Leuchtmann, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-904495

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über die Berechnung von Impedanzen

P. Leuchtmann

Die numerisch berechenbaren elektrischen und magnetischen Felder sind umständlich zu handhaben. Der vorliegende Aufsatz zeigt deshalb, wie aus den Feldern die in der Praxis gebräuchlichen Impedanzen, Widerstände und Induktivitäten berechnet werden können. Dazu wird hergeleitet, wann eine statische Feldberechnung zulässig ist, und gezeigt, wie das elektromagnetische Feld aufgeteilt und vereinfacht berechnet werden kann. Dann werden die Formeln zur Bestimmung der Induktivität, der inneren und äusseren Impedanz sowie der Gegenimpedanz hergeleitet.

Grâce aux méthodes numériques, il est maintenant possible de calculer un grand nombre de champs électriques et magnétiques. L'article montre comment on en déduit en pratique les différentes impédances, résistances et inductivités. En partant des cas généraux, les possibilités et les limites des calculs statiques sont montrées. Les subdivisions usuelles du champ électromagnétique, ainsi que des cas particuliers bien connus sont introduits. Puis, les différentes formules pour calculer l'impédance intérieure et extérieure ainsi que l'impédance induite sont déduites.

Adresse des Autors

P. Leuchtmann, dipl. El.-Ing. ETH, Institut für Elektronik, Gruppe elektromagnetische Felder, ETH-Zentrum, 8092 Zürich.

1. Einleitung

Da die numerische Feldberechnung dank leistungsfähiger Computer immer einfacher wird, können heute vermehrt «exakte» Rechnungen auch für Geometrien, die nicht mit einfachen Formeln beschrieben werden können, durchgeführt werden. Der vorliegende Artikel gibt eine Übersicht über die Zusammenhänge zwischen den Feldgrössen einerseits und den Impedanzen (Widerständen, Induktivitäten) andererseits. Erstere sind als vektorwertige Ortsfunktionen zu umständlich für den Praktiker, letztere sind als komplexe (oder reelle) Zahlen nicht mit einfachen Formeln berechenbar, wohl aber leicht messbar.

1.1 Begriffsabgrenzung

Impedanzen haben komplexe Werte. Sie sind Verhältnisse zwischen zugeordneten komplexen Grössen von Spannungen und Strömen. Implizit sind also nur sinusförmige Zeitabhängigkeiten zugelassen. Verallgemeinerte Impedanzen, z.B. die (Wellen-)Impedanz des Raumes, werden nicht behandelt.

Widerstände und *Induktivitäten* haben reelle Werte. Sie sind bei beliebiger Zeitabhängigkeit von Strömen und Spannungen brauchbar. Im folgenden wird oft nur einer der beiden obigen Begriffe stellvertretend für beide gebraucht. Der Zusammenhang zwischen Widerständen, Induktivitäten und Impedanzen ist in Abschnitt 3.4 behandelt.

1.2 Maximale Abmessungen von Feldgebieten

Die Verknüpfung von Feld und Induktivität geschieht mit Hilfe der Energie (bzw. Leistung): Falls z.B. eine Stromverteilung mit Gesamtstrom I insgesamt die (magnetische) Feldenergie W_M aufweist, gehört dazu eine Induktivität

$$L = 2\,W_M / I^2 \tag{1}$$

Ist der Strom zeitlich veränderlich, bleibt diese Definition nur sinnvoll, wenn W_M gleichartig von der Zeit t abhängt wie I^2. Dies ist sicher dann der Fall, wenn in jedem Punkt $\boldsymbol{r}$ des zu L gehörigen Feldgebietes G sowohl die Stromdichte $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$ als auch die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)$ in der Form

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = \tilde{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r}) \cdot f(t)$$

$$\text{bzw. } \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \tilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r}) \cdot f(t) \tag{2}$$

geschrieben werden können. Dies ist möglich, wenn das Feldgebiet nicht zu grosse Abmessungen hat. Da sich Änderungen von Feldgrössen mit der (materialabhängigen) Fortpflanzungsgeschwindigkeit v ausbreiten, verursacht die Schreibweise (2) nämlich höchstens einen Fehler von

$$\tilde{H}(\boldsymbol{r}) \cdot \max|\partial f/\partial t| \cdot \Delta t < \delta \cdot \tilde{H}(\boldsymbol{r})$$

wobei δ der maximal zulässige relative Fehler ist. Mit $\Delta t = d/v$ erhält man für den maximal zulässigen Durchmesser d von G die Ungleichung

$$d < \min\left(v\delta / |\partial f/\partial t|\right) \tag{3}$$

Ist anderseits (3) für ein bestimmtes Problem erfüllt, können die Felder *statisch* gerechnet werden. Allerdings muss die Materialabhängigkeit von v beachtet werden: Im dielektrischen Medium gilt $1/v = \sqrt{\mu\varepsilon}$ mit der Permeabilität μ und der Dielektrizitätskonstante ε. In Metallen hingegen ist v ein Funktional von $f(t)$. Zerlegt man f nach Fourier, dann sind die höchsten Frequenzanteile massgebend. Für harmonische Zeitabhängigkeit ($f(t) = \cos \omega t$) gilt $v = \sqrt{2\omega/\mu\sigma}$ und damit anstelle von (3):

$$d_{\text{Met}} < \delta \cdot \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}; \quad d_{\text{Diel}} < \frac{\delta}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{3a}$$

1.3 Zulässigkeit statischer Rechnung

Die Ungleichungen (3a) geben Schranken für die Ausdehnung von Gebieten an, wo

a) die statische Feldberechnung zulässig ist und
b) aus der Feldenergie Induktivitäten usw. abgeleitet werden dürfen.

Ist die Bedingung (3a) verletzt, muss in jedem Fall dynamisch gerechnet werden. Hingegen gilt b) unter Umständen immer noch. Dies ist insbesondere im stationären Zustand (feste Kreisfrequenz ω) für die Impedanzen möglich: Da bei der Berechnung der gesamten Feldenergie die örtliche Phasenverschiebung berücksichtigt werden kann, darf *G beliebig ausgedehnt* sein. Lediglich das Tor (d.h. der Ort, wo Strom und Spannung definiert sind) muss eindeutig bezeichnet sein (typisches Beispiel: Fusspunktimpedanz einer Antenne).

Eine zahlenmässige Auswertung der Gl. (3a) ergibt bei $\delta = 1\%$ und $\omega = 2\pi \cdot 10^6\ s^{-1}$ für Luft $d < 0{,}5$ m und für Kupfer $d < 0{,}7\ \mu m$.

Es gilt daher für viele praktische Fälle:

- Die Felder im Dielektrikum können statisch gerechnet werden.
- Die Felder im Leiter *müssen* dynamisch behandelt werden.

Im folgenden ist ein solcher Fall angenommen.

2. Aufteilung des Gesamtfeldes in separat berechenbare Teilfelder

Da im Dielektrikum voraussetzungsgemäss statisch gerechnet werden darf und in der Statik keine Kopplung zwischen magnetischem Feld $\boldsymbol{H}$ und elektrischem Feld $\boldsymbol{E}$ besteht, ist die folgende Aufteilung des gesamten elektromagnetischen Feldes $\boldsymbol{F}$ in drei Teile vorteilhaft:

$\boldsymbol{F}_E$ enthält das elektrische Feld im *Dielektrikum*. Man erhält es als Lösung eines Randwertproblems für das elektrostatische Potential φ aus $\boldsymbol{E}_E = -\operatorname{grad} \varphi$. Im Leiter ist $\boldsymbol{F}_E$ nach Voraussetzung null. Falls das Dielektrikum eine (geringe) Leitfähigkeit σ_D aufweist, zählt das zugehörige Stromdichtefeld $\boldsymbol{j}_E = \sigma_D \boldsymbol{E}_E$ auch zu $\boldsymbol{F}_E$.

Zu $\boldsymbol{F}_M$ gehört die im *Leiter* vorhandene Stromdichte $\boldsymbol{j}_M$, das durch $\boldsymbol{j}_M$ verursachte Magnetfeld $\boldsymbol{H}_M$ sowie das im Leiter mit Leitfähigkeit σ_L vorhandene elektrische Feld $\boldsymbol{E}_M = \boldsymbol{j}_M/\sigma_L$. $\boldsymbol{H}_M$ ist im allgemeinen sowohl im Leiter als auch ausserhalb desselben von null verschieden.

Das Restfeld $\boldsymbol{F}_R$ schliesslich wird vernachlässigbar klein. Zu ihm zählen das durch $\boldsymbol{j}_E$ erzeugte $\boldsymbol{H}_E$ sowie $\boldsymbol{E}$-Komponenten, die noch nicht erfasst wurden, wie Verschiebungsstromdichte im Leiter, zu $\boldsymbol{E}_E$ orthogonale Komponenten im Dielektrikum usw. Die Impedanzen werden somit in zwei Schritten berechnet:

1. Berechnung von $\boldsymbol{F}_E$: Lösung des Randwertproblems für φ.
2. Berechnung von $\boldsymbol{F}_M$:
   a) dynamische Rechnung zur Bestimmung der Felder im Leiter, insbesondere der Stromdichte $\boldsymbol{j}_M$. Dieser Schritt wird oft durch eine Näherungsrechnung erledigt (s. 2.1).
   b) Statische Rechnung im Dielektrikum mit jetzt bekanntem $\boldsymbol{j}_M$.

Vereinfachung der dynamischen Rechnung im Leiter

In vielen Fällen kann 2a vereinfacht werden. Für genügend dicke Leiter nimmt nämlich j_M nach dem Leiterinnern hin (x-Richtung) exponentiell ab (3a):

$$j_M(x) = j_{M0} \exp(-x/d_s);\ d_s = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (4)$$

j_{MO} Stromdichte auf der Leiteroberfläche
d_s Skin- oder Eindringtiefe

Des weiteren darf angenommen werden, dass j_{MO} näherungsweise proportional zu E_E ist (Proximity-Effekt).

Auf die Feldberechnungen wird im folgenden nicht weiter eingegangen. Es wird angenommen, die Felder seien berechnet und die Frage gestellt, wie daraus die Impedanzen abzuleiten sind. Dies wird im nächsten Abschnitt unter Beschränkung auf das Feld $\boldsymbol{F}_M$ getan.

3. Der Begriff der Eigenimpedanz

3.1 Die Berechnung der magnetischen Feldenergie

Eine geschlossene Stromverteilung $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$ mit dem Gesamtstrom $I(t)$ sei in der Form $\boldsymbol{j}'(\boldsymbol{r})\ I(t)$ darstellbar, d.h., die Näherung (2) ist zulässig, $\boldsymbol{j}$ erzeugt ein magnetisches Feld $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{H}'(\boldsymbol{r})\ I(t)$, wobei hier und im folgenden alle mit ′ markierten Grössen die Strukturfunktionen der entsprechenden Grössen bezeichnen. Ausserdem kann das magnetische Vektorpotential $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r})\ I(t)$ definiert werden, wobei $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{H}$ über

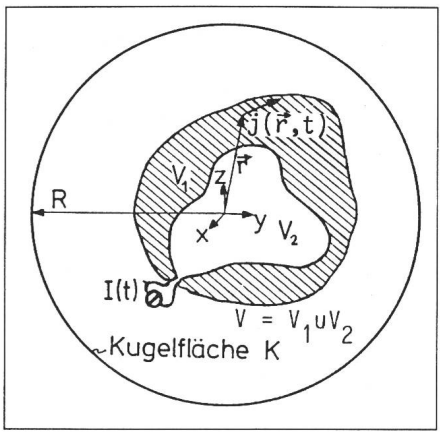


Fig. 1 Komplizierte Leiterstruktur
Im schraffierten Bereich V_1 ist die Stromdichte j von null verschieden. Ausserhalb von V_1, d.h. in V_2, ist $j = 0$. Die Feldstärke H und das Vektorpotential A ist im ganzen Raum ($V = V_1 \cup V_2$) vorhanden. Der Radius R der Kugel K wird beliebig gross.
$j(\vec{r}, t) = j'(\vec{r}) \cdot I(t)$

$$\mu\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \quad \text{oder} \quad \mu\boldsymbol{H}' = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}' \quad (5)$$

zusammenhängen. Die totale magnetische Energie W_M des Feldes erhält man als Integral über den gesamten Feldraum V (Fig. 1) zu

$$W_M = \frac{1}{2}\int_V \mu \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}\,dV = \frac{I^2}{2}\int_V \mu |\boldsymbol{H}'|^2\,dV \quad (6)$$

Mit (5) folgt

$$\mu\boldsymbol{H}'\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H}' \operatorname{rot} \boldsymbol{A}' = \operatorname{div}(\boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{H}') + \boldsymbol{A}' \operatorname{rot} \boldsymbol{H}'$$

Mit dem Satz von Gauss gilt

$$\int_V \operatorname{div}(\boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{H}')\,dV = \int_K (\boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{H}')\,d\boldsymbol{O} \quad (7)$$

Für grosse R gilt $A' \sim 1/R$, $H' \sim 1/R^2$, und somit (7) $\rightarrow 0$.

Mit der Maxwellgleichung rot $\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{j}'$ folgt schliesslich

$$W_M = \frac{I^2}{2}\int_V \boldsymbol{j}'\boldsymbol{A}'\,dV \quad (8)$$

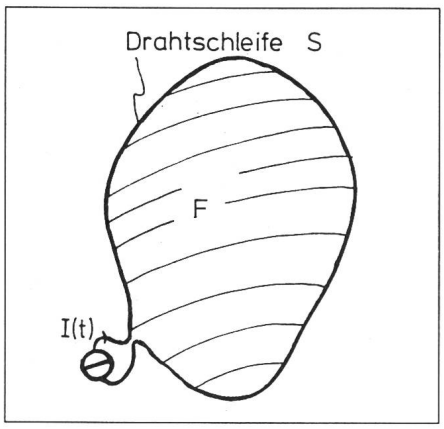


Fig. 2 Linienleiter
Fliesst der Strom in einem dünnen Draht, kann das Integral über V_1 (Fig. 1) auf ein Umlaufintegral über S vereinfacht werden.

Falls der Strom I in einem dünnen Draht fliesst, kann man (8) umschreiben (Fig. 2):

$$W_M = \frac{I^2}{2} \oint_S A' \, \mathrm{d}l$$

Mit (5) und dem Satz von Stokes folgt endlich

$$W_M = \frac{I^2}{2} \int_F \mu H' \, \mathrm{d}O \qquad (9)$$

3.2 Drei verschiedene Integrale für die Induktivität

Da in jedem Fall (1) gilt, stehen wegen (6), (8) und (9) drei verschiedene Integrale zur Berechnung der Induktivität L zur Verfügung:

$$L = \int_V \mu |H'|^2 \, \mathrm{d}V \qquad (10)$$

$$L = \int_{V_1} j' A' \, \mathrm{d}V \qquad (11)$$

$$L = \int_F \mu H' \, \mathrm{d}O \qquad (12)$$

Durch Aufteilung der Integrationsbereiche können in allen drei Fällen Teilinduktivitäten abgeleitet werden. Das Integral (10) summiert die Energiedichte. Daher entspricht dort einer Aufteilung des Integrationsbereiches eine physikalische Trennung von Energien. Die sogenannten inneren und äusseren Induktivitäten werden gewöhnlich von diesem Integral abgeleitet. Eine Aufteilung des Integrationsbereiches bei den Intergralen (11) und (12) hat im allgemeinen keine physikalische Bedeutung. Trotzdem können formal Teilinduktivitäten definiert werden, aber es muss im allgemeinen dann genau angegeben werden, welchem der drei Integrale (10), (11), (12) die Aufteilung entstammt.

3.3 Die Berechnung des Widerstandes

Der Strom I fliesst normalerweise in einem Leiter mit Leitfähigkeit σ. Die gesamte ohmsche Verlustleistung P errechnet sich durch Integration der Verlustleistungsdichte p über den stromführenden Leiter (V_1 in Fig. 1) zu

$$P = \int_{V_1} p(\boldsymbol{r}) \, \mathrm{d}V = I^2 \int_{V_1} j' E' \, \mathrm{d}V$$
$$= I^2 \int_{V_1} \frac{1}{\sigma} |j'|^2 \, \mathrm{d}V$$

Anderseits gilt

$$P = RI^2$$

und daraus folgt für den Widerstand R

$$R = \int_{V_1} \frac{1}{\sigma} |j'|^2 \, \mathrm{d}V = \int_{V_1} \sigma |E'|^2 \, \mathrm{d}V \qquad (13)$$

3.4 Verbindung von R und innerem L zur inneren Impedanz

Da einerseits das Integral (13) des Widerstandes einer Stromschleife nur über den stromführenden Bereich des Raumes zu erstrecken ist und man anderseits die Feldgrössen im Leiter oft mit dynamischen Methoden rechnet (wo $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ simultan erhalten werden), teilt man das Integral (10) in einen inneren und einen äusseren Teil auf. Es kann dann bei sinusförmiger Zeitabhängigkeit die Integration für R und L_{in} unter Verwendung zugeordneter komplexer Grössen (im folgenden durch Unterstreichen gekennzeichnet) kombiniert werden.

Es sei eine Stromverteilung $\underline{j}$ mit dem Gesamtstrom $\underline{I}$ gegeben. Im Innern des stromführenden Leiters ist dann das Magnetfeld $\underline{H} = \underline{I}\,\underline{H}'$ und das elektrische Feld $\underline{E} = \underline{I}\,\underline{E}'$ vorhanden. Die komplexe Scheinleistung $\underline{S}$, die im Innern des Leiters umgesetzt wird, errechnet sich durch Integration des komplexen Poynting Vektors $\underline{E} \times \underline{H}^*$ über die Leiteroberfläche:

$$\underline{S} = -\int (\underline{E} \times \underline{H}^*) \, \mathrm{d}O = -\underline{I}\,\underline{I}^* \int (\underline{E}' \times \underline{H}'^*) \, \mathrm{d}O \qquad (14)$$

($\mathrm{d}O$ ist nach aussen orientiert, * bedeutet konjugiert komplex.) Mit Hilfe der komplex geschriebenen Maxwellgleichungen

$$\mathrm{rot}\, \underline{H}' = \underline{j}' = \sigma \underline{E}'; \; \mathrm{rot}\, \underline{E}' = -\mathrm{i}\omega\mu \underline{H}'$$

und der Identität

$$\mathrm{div}\,(\underline{E}' \times \underline{H}'^*) = \underline{H}'^* \,\mathrm{rot}\, \underline{E}' - \underline{E}' \cdot \mathrm{rot}\, \underline{H}'^*$$

ergibt sich mit (14) und dem Gaussschen Satz

$$-\int_O (\underline{E}' \times \underline{H}'^*) \, \mathrm{d}O = -\int_V \mathrm{div}\,(\underline{E}' \times \underline{H}'^*) \, \mathrm{d}V$$

der bekannte Poyntingsche Satz

$$S = \mathrm{i}\omega \int_V \mu \underline{H}' \, \underline{H}'^* \, \mathrm{d}V + \int_V \sigma \underline{E}' \, \underline{E}'^* \, \mathrm{d}V \qquad (15)$$

Mit (10), (13) und (14) erhält man

$$\underline{S} = |\underline{I}|^2 (\mathrm{i}\omega L_{in} + R) = |\underline{I}|^2 \underline{Z}_{in} \qquad (15a)$$

Die innere Impedanz $\underline{Z}_{in}$ kann also mit Hilfe der Feldgrössen auf der Oberfläche ausgedrückt werden und heisst deshalb auch Oberflächenimpedanz (Surface Impedance).

Man beachte, dass die Oberflächenimpedanz den Energieinhalt des Feldes im Dielektrikum nicht berücksichtigt. Dieser (äussere) Energieinhalt führt zur sog. äusseren Impedanz $\underline{Z}_a = \mathrm{i}\omega\, L_a$, wobei die äussere Induktivität L_a natürlich ebenfalls mit (10), erstreckt über V_2, berechnet werden muss. Die totale Impedanz $\underline{Z}$ des Kreises ist die Summe beider Impedanzen:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{in} + \underline{Z}_a \qquad (16)$$

4. Der Begriff der Gegenimpedanz

In der Praxis kommen oft mehrere Stromkreise vor, deren Felder sich überlagern. Da nur die Felder überlagert werden dürfen, in den Integralen (10), (11) und (12) aber Produkte von Feldgrössen auftreten, müssen zusätzlich die sog. Gegenimpedanzen (Mutual Impedances) eingeführt werden.

Es seien zwei Stromverteilungen $\underline{j}_1 = \underline{j}'_1 I_1$ und $\underline{j}_2 = \underline{j}'_2 I_2$ gegeben. Sie verursa-

chen die Felder $\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}'_1 I_1$ und $\boldsymbol{H}'_2 = \boldsymbol{H}'_2 I_2$ sowie entsprechende elektrische Felder. Die gesamte magnetische Energie W_M berechnet sich aus der Energie des Feldes $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2$ zu

$$W_M = \frac{1}{2} \int \mu (\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2)(\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2) \mathrm{d}V$$

$$= \frac{1}{2} \int \mu |\boldsymbol{H}_1|^2 \mathrm{d}V + \frac{1}{2} \int \mu |\boldsymbol{H}_2|^2 \mathrm{d}V + \int \mu \boldsymbol{H}_1 \boldsymbol{H}_2 \mathrm{d}V \quad (17)$$

Aus den ersten beiden Termen folgen die Selbstinduktivitäten der beiden Stromkreise, der letzte Term führt auf die Gegeninduktivität M_{12}, wobei offenbar $M_{12} = M_{21}$ gilt, denn die Energie zweier verkoppelter Stromkreise kann man bekanntlich auch als

$$W_M = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2 \quad (18)$$

schreiben. Analog zu den früheren Überlegungen erhält man verschiedene Integrale für die Gegeninduktivität M_{12}

$$M_{12} = \int \mu \boldsymbol{H}'_1 \boldsymbol{H}'_2 \mathrm{d}V \quad (19)$$

$$M_{12} = \int \boldsymbol{j}'_1 \boldsymbol{A}'_2 \mathrm{d}V = \int \boldsymbol{j}'_2 \boldsymbol{A}'_1 \mathrm{d}V \quad (20)$$

$$M_{12} = \int \mu \boldsymbol{H}'_1 \mathrm{d}\boldsymbol{O}_2 = \int \mu \boldsymbol{H}'_1 \mathrm{d}\boldsymbol{O}_1 \quad (21)$$

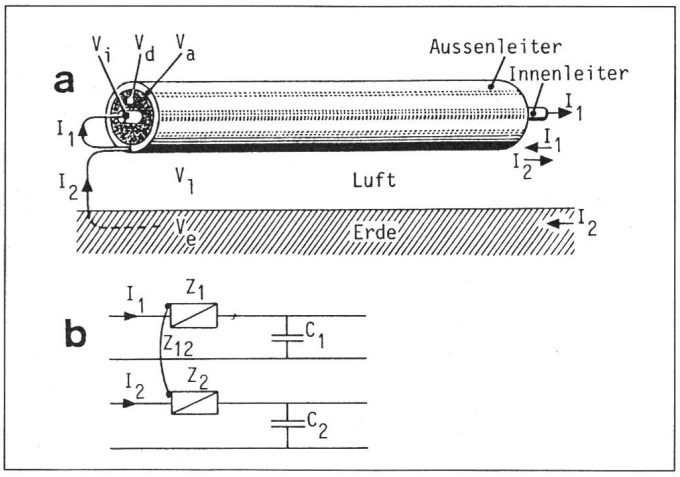
Ähnliches gilt für den Widerstand überlappender Stromverteilungen, denn analog zu (18) gilt für die Verlustleistung

$$P = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + 2 R_{12} I_1 I_2$$

Für den Gegenwiderstand R_{12} gilt in Analogie zu (13)

$$R_{12} = \int \frac{1}{\sigma} \boldsymbol{j}'_1 \boldsymbol{j}'_2 \mathrm{d}V = \int \sigma \boldsymbol{E}'_1 \boldsymbol{E}'_2 \mathrm{d}V$$

Fig. 3
Beispiel: langes Koaxialkabel über leitender Erde
a Prinzipieller Aufbau
b Mögliches Ersatzschaltbild (pro Längeneinheit)



Der mit (19) berechnete innere Anteil der Gegeninduktivität M_{12} und der Gegenwiderstand R_{12} können wie im Abschnitt 3.4 zu einer inneren Gegenimpedanz verbunden werden. Diese Impedanz heisst *Transferimpedanz* (Transfer Impedance) oder auch *Kopplungsimpedanz*.

5. Beispiel

Abschliessend seien die theoretischen Betrachtungen anhand eines Beispiels wiederholt. Die Figur 3a zeigt ein Koaxialkabel mit runden Innen- und Aussenleitern über der Erde sowie die für eine Längeneinheit geltende Ersatzschaltung (Fig. 3b). Entsprechend den drei Leitern können zwei Stromkreise definiert werden.

- I_1 fliesst im Innenleiter hin und im Aussenleiter zurück.
- I_2 fliesst im Aussenleiter hin und in der Erde zurück.

Diese Wahl ist willkürlich; man hätte auch beide Kreise über die Erde schliessen können. Die Impedanzbestimmung verläuft im weiteren wie folgt:

1. Getrennte Berechnung des elektrostatischen Feldes (Laplace-Gleichung) in den beiden dielektrischen Gebieten, analytisch oder mittels Computerprogramm. Daraus folgen die Eigenkapazitäten C_1 und C_2 (Integration des $\boldsymbol{E}$-Feldes).
2. Ermittlung der genauen frequenzabhängigen Stromverteilung in den Leitern mittels eines zweiten Programms. Im Beispiel könnte $\boldsymbol{j}_1$ analytisch berechnet und $\boldsymbol{j}_2$ geschätzt werden (Kap. 2.1).
3. Berechnung der Felder $\boldsymbol{H}_1$ und $\boldsymbol{H}_2$ über eine einfache Integration (z.B. Biot-Savart). Es zeigt sich, dass $\boldsymbol{H}_1$ ausserhalb des Kabels verschwindet und $\boldsymbol{H}_2$ innerhalb des Kabels praktisch konstant ist.
4. Aufteilung des Feldraumes in Innenleiter V_i, Kabeldielektrikum V_d, Aussenleiter V_a, Luft V_l und Erde V_e.
5. Berechnung der beiden Eigenimpedanzen $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ sowie der Gegenimpedanz $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$ mit Hilfe der Integrale (10), (13) und (19).

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{1,\mathrm{in,i}} + \underline{Z}_{1,\mathrm{in,a}} + \underline{Z}_{1,\mathrm{a,d}}$$
$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{2,\mathrm{in,a}} + \underline{Z}_{2,\mathrm{in,e}} + \underline{Z}_{2,\mathrm{a,l}}$$
$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{12,\mathrm{in,a}}$$

Der erste Index bezeichnet den Stromkreis, der zweite die innere oder äussere Impedanz, der dritte das Integrationsgebiet. Die Gleichungen 10 und 13 liefern z.B.:

$$\underline{Z}_{1,\mathrm{in,i}} = \int_{V_i} \sigma |\underline{\boldsymbol{E}}'|^2 \mathrm{d}V + \mathrm{i}\omega \int_{V_i} \mu |\underline{\boldsymbol{H}}'|^2 \mathrm{d}V$$

Die übrigen Komponenten errechnen sich analog dazu.