

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen = Bulletin de l'Association suisse des électriciens, de l'Association des entreprises électriques suisses

**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen

**Band:** 74 (1983)

**Heft:** 23

**Artikel:** Subsynchroner Schwingungen und Resonanzen in elektrischen Maschinen unter Berücksichtigung des Netzes und der mechanischen Welle

**Autor:** Canay, I. M.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-904892>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.10.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Subsynchrone Schwingungen und Resonanzen in elektrischen Maschinen unter Berücksichtigung des Netzes und der mechanischen Welle

I.M. Canay

Die Torsionsschwingungen in elektrischen Maschinen sind nicht nur von Maschineneigenschaften, sondern auch von den Gegebenheiten des Netzes sowie der mechanischen Welle abhängig. Sowohl freie (SSR) als auch erzwungene Schwingungen von Synchron- oder Asynchronmaschinen können in einer einheitlichen Theorie unter Berücksichtigung der genannten Einflüsse behandelt werden. Dies wird mit Beispielen erläutert, und die Grundzüge der Theorie werden kurz beschrieben.

Les oscillations de torsion dans des machines électriques ne dépendent pas seulement des caractéristiques de celles-ci, mais aussi des conditions du réseau et de l'arbre mécanique. Les oscillations libres des machines synchrones ou asynchrones, de même que leurs oscillations forcées, peuvent être traitées selon une théorie générale, compte tenu des dites influences. Les phénomènes sont expliqués à l'aide d'exemples et les fondements de la théorie sont brièvement décrits.

## 1. Beispiele von Schwingungserscheinungen

Das Thema «Schwingungen in elektrischen Maschinen» umfasst ein breites Gebiet und ist ausserdem sehr mannigfaltig. Daher wird der Problemkreis zunächst mit drei Beispielen etwas genauer umrissen. Anschliessend werden die Grundzüge einer neuen Methode kurz beschrieben und anhand dieser Beispiele gezeigt, wie dieses Verfahren anzuwenden ist.

### 1.1 Selbsterregte Schwingungen bei einer Turbogruppe

Zur Reduktion der Leitungsreaktanz von sehr langen Freileitungen werden in manchen Ländern (USA, Australien, Schweden usw.) oft Serie-kondensatoren verwendet. Diese Lösung ist zwar preiswert, aber nicht immer problemlos. Sie kann unter Umständen zu selbsterregten Torsions-

schwingungen führen. Ein Beispiel darüber wird in Figur 1 gezeigt. Ein Turbogenerator im Vollastbetrieb speist drei Leitungen, wobei die Hauptleitung zum Netz  $N_1$  mit Serie-kondensatoren zu 50% kompensiert ist. Die unkompenzierten Leitungen zu  $N_2$  übertragen mit etwa 1% Strom fast keine Leistung. Deshalb werden sie bei  $t = 0$  ausgeschaltet. Diese kleine Zustandsänderung führt zu einer gegenseitigen Beeinflussung zwischen dem elektrischen und dem mechanischen System der Turbogruppe, d.h. dem sog. Interaction-Effekt. Die Welle beginnt zu schwingen, und das Drehmoment  $T_2$  zwischen der Turbine und dem Generator wächst mit einer Zeitkonstanten von etwa 1 s. Die Frequenz dieser Schwingung ist 31,4 Hz. Nach 3,8 s werden die abgeschalteten Leitungen durch ein Schutzrelais wieder eingeschaltet; die Torsionsschwingungen beginnen unverzüglich abzuklingen.

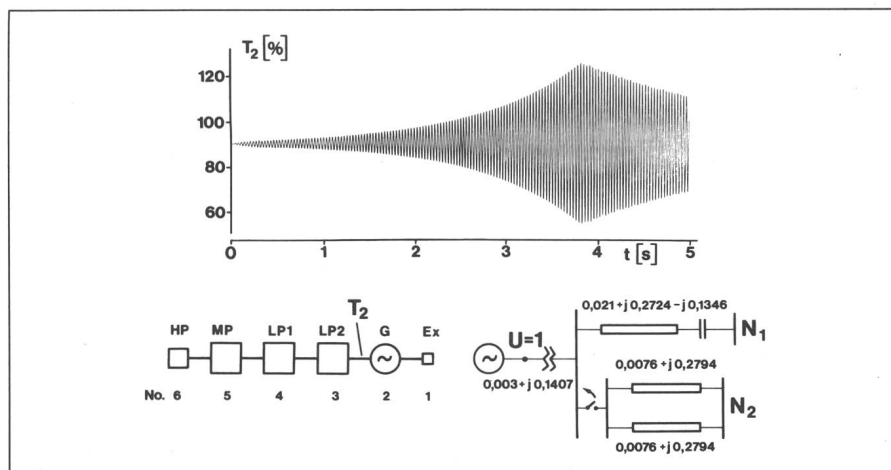


Fig. 1 Subsynchrone Resonanz bei einem Turbogenerator

Generator:

$x'_d = 1,95$	$x'_d'' = 0,227$	$T'_d' = 0,793 \text{ s}$	$T'_d'' = 0,019 \text{ s}$
$x'_q = 1,86$	$x'_q'' = 0,235$	$T'_q' = 0,223 \text{ s}$	$T'_q'' = 0,027 \text{ s}$
$r'_a = 0,0036$	$x'_c = 0,22$	$f'_n = 60 \text{ Hz}$	

Welle:

Masse	Nr.	1	2	3	4	5	6
$H$ [s]		0,021	0,727	1,54	1,558	0,284	0,104
$K$ [p. u.]		32,1	86,2	113,6	105,7	39,5	
$D$ [s]		0,0	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002

Der Aufsatz entspricht dem Vortrag von Dr. I.M. Canay vom 7. Dezember 1982 an der ETHZ, im Rahmen der Kolloquien des Fachbereiches Elektrische Energietechnik.

### Adresse des Autors

Dr. I.M. Canay, BBC Aktiengesellschaft Brown, Boveri & Cie, Abt. T-EE, 5401 Baden.

Hier liegt bekanntlich eine sub-synchrone Resonanz «SSR» vor, d. h. eine Resonanz zwischen dem elektrischen und dem mechanischen System unterhalb der Nennfrequenz. Die Eigenfrequenz des elektrischen Systems mit abgeschalteten Leitungen zu  $N_2$  ist 32,6 Hz und diejenige der Welle 31,2 Hz. Obwohl die Differenz etwa 1,5 Hz beträgt, tritt eine Resonanz auf. Man kann verschiedene Fragen aufwerfen, z. B.:

- Wie gross muss die Abweichung zwischen den Eigenfrequenzen sein, damit keine Resonanz auftritt? Wo ist die Grenze?
- Da eine Anfachung der Schwingungen vorliegt, muss die resultierende Dämpfung negativ sein. Wie kann diese negative Dämpfung elektrischer Herkunft berechnet werden?

### 1.2 Selbsterregte Schwingungen bei einer Asynchronmaschine

Es ist bekannt, dass eine Synchronmaschine unter gewissen Bedingungen, wie in Figur 1, pendelt. Weniger bekannt ist hingegen die Tatsache, dass auch eine Asynchronmaschine ein schwingungsfähiges System darstellt. Deshalb wird das zweite Beispiel aus dem Bereich der Asynchronmaschinen gewählt. Gleichzeitig soll erneut darauf hingewiesen werden, dass diese zwei Maschinenarten eigentlich physikalisch gesehen eine Einheit bilden und in der Theorie gleich behandelt werden können.

In den Statorkreis einer leerlaufenden Asynchronmaschine wird plötzlich ein Ohmscher Widerstand  $\Delta r$  eingeschaltet (Fig. 2) [1]. Beträgt dieser Widerstand den 16fachen Wert des

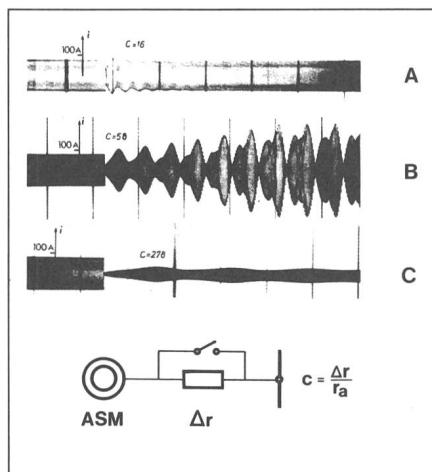


Fig. 2 Selbsterregte Schwingungen einer Asynchronmaschine

$$x_d = 4,26 \quad x_d' = 0,247 \quad r = 0,0228$$

$$T_d'' = 0,041 \text{ s} \quad H = 0,607 \text{ s}$$

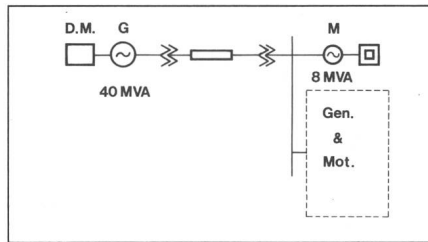


Fig. 3 Gegenseitige Beeinflussung bei erzwungenen Schwingungen

D.M. Dieselmotor

Generator (40 MVA):

$$x_d = 1,2 \quad x_d' = 0,35 \quad x_d'' = 0,29$$

$$x_q = 0,7 \quad x_q' = 0,38 \quad T_q'' = 0,03$$

$$T_d = 0,75 \text{ s} \quad T_d' = 0,022 \text{ s} \quad \Sigma H = 1,3 \text{ s}$$

Belastung:  $p = 0,75 + j0,35$

2 Transformatoren + Leitung:  $0,024 + j0,2$

Motor (8 MVA):

$$x_d = 1,28 \quad x_d' = 0,36 \quad T_d' = 1,0 \text{ s}$$

$$x_q = 0,74 \quad \Sigma H = 1,15 \text{ s}$$

Ankerwiderstandes, so führt die Maschine eine leichte Pendelung aus und läuft ruhig weiter, wie dies aus der oszillografischen Aufnahme des Ankerstromes in Figur 2a ersichtlich ist. Bei der Wiederholung dieses Versuches mit dem 58fachen Wert des Ankerwiderstandes (Fig. 2b) klingen die am Anfang entstandenen Pendelungen nicht mehr ab, sondern werden angefacht. Diese Schwingungen wären ebenfalls entstanden, wenn man die Widerstandsänderung sukzessiv durchgeführt und am Anfang keinen grossen Stoss gegeben hätte. Hier liegt wiederum eine selbsterregte Schwingung vor. Die Asynchronmaschine muss in diesem Fall eine ziemlich starke negative Dämpfung erzeugt haben. Erhöht man den zusätzlichen Widerstand  $\Delta r$  noch mehr (Fig. 2c), so verschwindet dieser Effekt wieder.

### 1.3 Erzwungene Pendelungen in einer isolierten Minenanlage

Ein Minenwerk mit vielen Generatoren und Motoren kleiner Leistung (Fig. 3) wurde mit einem grossen Synchronmotor (8 MVA), welcher eine Erzmühle antreibt, und einem neuen Dieselgenerator (40 MVA) erweitert. Die Erzmühle weist ein Störmoment mechanischer Herkunft mit der Frequenz 2,5 Hz auf. Die Störfrequenz des Zweitakt-Dieselmotors beträgt 2,0 Hz.

Vor der Inbetriebnahme des neuen Generators wurde die Erzmühle versuchsweise am bereits vorhandenen schwachen Netz betrieben; der Synchronmotor lief ruhig, obwohl er keine Dämpferwicklung besitzt. Nach der Inbetriebnahme des neuen Generators

wurde jedoch mit Erstaunen festgestellt, dass der Synchronmotor nunmehr mit etwa 2,3 Hz stark pendelt. Unwillkürlich stellte man Fragen wie:

- Warum pendelt nun der Synchronmotor so stark?
- Warum ändert sich die Frequenz, obwohl die mechanische Anregung 2,5 Hz ist?
- Wäre der Fall anders, wenn der Synchronmotor eine wirksame Dämpferwicklung hätte? usw.

Die drei Beispiele verdeutlichen, wie entscheidend das elektrische Netz und die mechanische Welle das Schwingungsverhalten des Systems beeinflussen können. Alle diese Probleme der Torsionsschwingungen können in einer einheitlichen Theorie behandelt werden, in welcher nicht nur die Maschinen (synchron oder asynchron) sowie das Netz, sondern auch die Gegebenheiten der Wellenstränge berücksichtigt werden können. Mathematisch gesehen beruht das Verfahren auf der Ermittlung der Eigenwerte des ganzen elektromechanischen Systems. Der Aufbau und die fortlaufende physikalische Interpretation der Gleichungen verleihen der vorgestellten Methode jedoch eine gewisse Transparenz.

## 2. Theorie zur Behandlung der Torsionsschwingungen

Führt der Rotor einer Maschine eine Schwingung mit der Amplitude  $\hat{\epsilon}$  und der relativen Frequenz  $\lambda = f_r/f_n$  aus (Fig. 4), so sind alle Grössen des Stators in diesen pendelnden Rotorkoordinaten mit Pendelkomponenten behaftet, unabhängig davon, ob sie in Wirklichkeit schwingen oder ruhen:

$$\underline{\epsilon} = \hat{\epsilon} e^{j\lambda t}, \quad \epsilon = \text{Re} [\underline{\epsilon}] \quad (1)$$

$t$ : Zeit in rad  $\triangleq 2\pi f_n t$  [s]

Beispielsweise weist auch eine konstante Netzspannung  $u_N$  in den pendelnden Rotorkoordinaten mathematisch

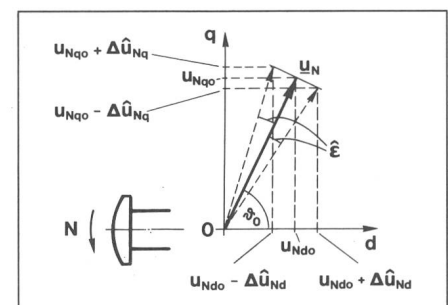


Fig. 4 Schwingende Rotorkoordinaten

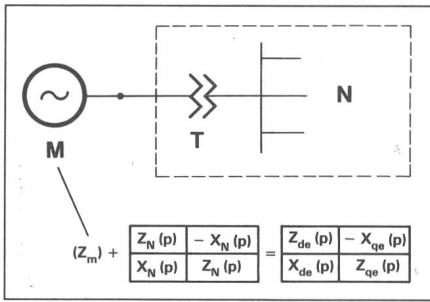


Fig. 5 Netzkonfiguration

tisch bedingte Pendelanteile  $\Delta u_{Nd}$ ,  $\Delta u_{Nq}$  auf:

$$\Delta u_{Nd} = \epsilon u_{Nq0}, \quad \Delta u_{Nq} = -\epsilon u_{Nd0} \quad (2)$$

Genauso werden die d-q-Komponenten der Klemmenspannung  $u$ , des Statorstromes  $i$  und der Flussverkettung  $\psi$  Pendelanteile aufweisen:

$$\begin{aligned} u_d &= u_{d0} + \Delta u_d, & u_q &= u_{q0} + \Delta u_q \\ i_d &= i_{d0} + \Delta i_d, & i_q &= i_{q0} + \Delta i_q \\ \psi_d &= \psi_{d0} + \Delta \psi_d, & \psi_q &= \psi_{q0} + \Delta \psi_q \end{aligned} \quad (3)$$

Im Rahmen der erweiterten Zweiachsentheorie bleibend, können alle Spannungsgleichungen der Maschine in den schwingenden Rotorkoordinaten aufgestellt und linearisiert werden. Somit erhält man eine Grundgleichung in Matrixform [2]:

$$\begin{bmatrix} \Delta i_d \\ \Delta i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{q0} \\ -i_{d0} \end{bmatrix} \epsilon + (z)^{-1} \begin{bmatrix} p & -1 \\ 1 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{de0} \\ \psi_{qe0} \end{bmatrix} \epsilon \quad (4)$$

Darin sind:

- $i_{d0}, i_{q0}$  Stromkomponenten der Vorbelastung
- $(z)$  Gesamtimpedanzmatrix (Fig. 5)
- $p$  Variable im Bildbereich der Laplace-Transformation. (Für quasistationäre Schwingungen wird  $p$  bekanntlich durch  $j\lambda$  und  $\epsilon$  durch den Schwingungszeiger  $\underline{\epsilon}$  ersetzt.)
- $\psi_{de0}, \psi_{qe0}$  Von Vorbelastung und Frequenz abhängige Flusskomponente
 
$$\begin{aligned} \psi_{de0} &= [x_q - x_d(p)] i_{q0} + G(p) g(p) \\ \psi_{qe0} &= u_{r0} - [x_d - x_q(p)] i_{d0} \end{aligned}$$
- $G(p), g(p)$  Transferfunktionen der Erregung und des Reglers, falls eine zusätzliche Erregung in Abhängigkeit der Polrad-schwingungen zugeführt wird
- $x_d(p), x_q(p)$  Reaktanzoperatoren der Maschine

Aus Gl. (4) ist ersichtlich, dass die gesuchten Pendelkomponenten  $\Delta i_d$ ,  $\Delta i_q$  des Statorstromes allein von der Vorbelastung und der Gesamtimpedanzmatrix ( $z$ ) abhängen. Der Leistungsfluss im Netz beeinflusst die Pendelungen nicht. Wenn die Vorbelastung und Gesamtimpedanzmatrix ( $z$ ) als Summe der Maschinen- und Netzmatrix bekannt sind, können die Stromkomponenten  $\Delta i_d$ ,  $\Delta i_q$  aus Gl. (4) für jede Pendelfrequenz ( $p = j\lambda$ ) berechnet werden. Dabei stellt sich die Frage, wie die Funktionen  $z_N(j\lambda)$ ,  $x_N(j\lambda)$  der Netzmatrix (Fig. 5) zu ermitteln sind.

Den Stromkomponenten  $\Delta i_d$ ,  $\Delta i_q$  entspricht in den ruhenden Statorkoordinaten ein resultierender Stromzeiger  $\Delta \underline{i}_s$ , der aus zwei Drehzeigern besteht:

$$\Delta \underline{i}_s = \underline{i}_{super} e^{j(1+\lambda)t} + \underline{i}_{sub}^* e^{j(1-\lambda)t} \quad (5)$$

$i_{super}$  mit der übersynchronen Drehfrequenz  $(1+\lambda)$

$i_{sub}$  mit der untersynchronen Drehfrequenz  $(1-\lambda)$

Dasselbe gilt auch für die Klemmenspannung. Die von den Maschinenklemmen aus gesehenen Netzimpedanzen für diese zwei Frequenzen seien  $z_{super}$ ,  $z_{sub}$ . Wenn die Netzanalytiker von dem betreffenden Netz eine sog. Frequenzanalyse bis zu  $2f_n$  liefern, so sind  $z_{super}$ ,  $z_{sub}$  bei den Frequenzen  $(1+\lambda)$  und  $(1-\lambda)$  bekannt. Bei den üblichen Verfahren zur Behandlung von subsynchronen Resonanzen SSR wird eine solche Analyse bis Nennfrequenz  $f_n$  sowieso durchgeführt. Der Mehraufwand besteht also lediglich darin, dass die Frequenzanalyse bis  $2f_n$  erweitert wird, um auch  $z_{super}$  zu erhalten. Es wurde in [2] bewiesen, dass die gesuchten Ortskurven  $z_N(j\lambda)$  und  $x_N(j\lambda)$  mit den nunmehr bekannten Impedanzen  $z_{super}$  und  $z_{sub}$  in folgenden einfachen Beziehungen stehen:

$$\begin{aligned} z_N(j\lambda) &= \frac{1}{2} [z_{sub}^* + z_{super}] \\ x_N(j\lambda) &= \frac{j}{2} [z_{sub}^* - z_{super}] \end{aligned} \quad (6)$$

Sie können somit aus diesen bestimmt werden. Es ist nicht notwendig zu wissen, wie das Netz gebaut ist. Mit diesen beiden komplexen Größen  $z_N(j\lambda)$ ,  $x_N(j\lambda)$  (oder  $z_{super}$ ,  $z_{sub}$ ) ist das Netz für die Schwingungsfrequenz  $\lambda$  vollständig erfasst.

Aus der allgemeinen Gleichung des Drehmomentes kann hergeleitet wer-

den, dass in der pendelnden Maschine ein zusätzliches Drehmoment  $\Delta T_e$  als Antwort auf diese Pendelungen erzeugt wird:

$$\begin{aligned} \Delta T_e &= \text{Re}[\Delta T_e] \\ \Delta T_e &= \psi_{qe0} \Delta i_q + \psi_{de0} \Delta i_d \\ &\quad + G(j\lambda) g(j\lambda) [i_{q0} \underline{\epsilon} - \Delta i_d] \\ &= k_e(j\lambda) \underline{\epsilon} \end{aligned} \quad (7)$$

In der komplexen Schreibweise der Wechselgrößen ( $p = j\lambda$ ) ist  $\Delta T_e$  proportional dem Schwingungszeiger  $\underline{\epsilon}$ . Der Faktor  $k_e(j\lambda)$  in Gl. (7) ist ebenfalls eine komplexe Grösse, und er wird «komplexe Drehmomentziffer des elektrischen Systems» genannt. Für den speziellen Fall konstanter Netzspannung – d. h. ohne Netzdetails, Kondensatoren, weitere Maschinen usw. – ist  $k_e(j\lambda)$  in der Fachliteratur unter dem Begriff «komplexe Synchronisierziffer» bekannt, die vor allem von Laible in einer einwandfreien Form eingeführt worden ist [3].

Der reelle Anteil  $K_e$  der komplexen Drehmomentziffer  $k_e(j\lambda)$  stellt eine Federkonstante dar, und  $D_e$  ist ein Mass für die elektrische Dämpfung. Mit  $K_e$  und  $D_e$  können also die auf den Rotor wirkenden Drehmomente des ganzen elektrischen Systems inklusive Netz, Seriendensatoren, Leitungskapazitäten, Regler usw. erfasst werden.

Figur 6 zeigt als Beispiel den Verlauf von  $K_e$  und  $D_e$  bei einem einfachen Netz (vgl. Fig. 1). Der Kompensationsgrad der langen Leitungen wird als Parameter variiert. Daraus ist ersichtlich,

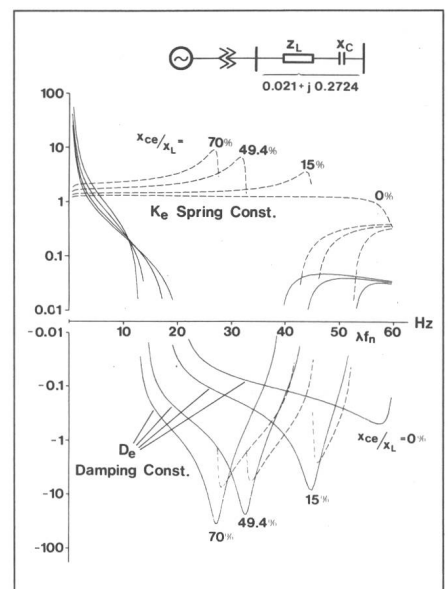


Fig. 6 Komplexe Drehmomentziffer des elektrischen Systems  $k_e(j\lambda) = K_e + j\lambda D_e$ . Einfluss der Seriendensatoren (Maschine aus Fig. 1)

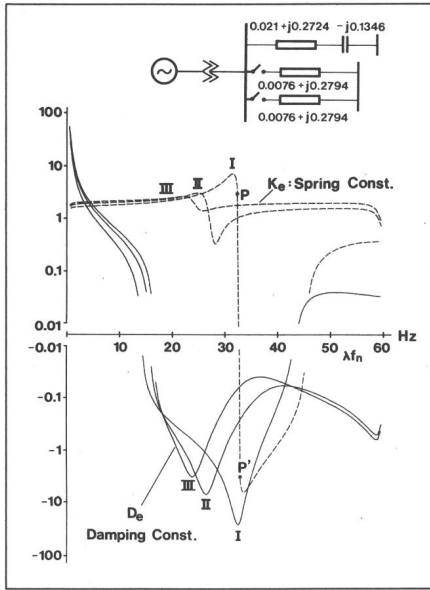


Fig. 7 Einfluss der parallelen Leitungen auf  $K_e$  und  $D_e$

Maschine aus Figur 1

I: Nur eine 50% kompensierte Leitung

II: (I) + eine parallele Leitung

III: (I) + zwei parallele Leitungen

dass die elektrische Dämpfung  $D_e$  in einem gewissen Frequenzbereich negativ wird. Dies gilt auch, wenn keine Kompensation durch Seriendensatoren vorliegt ( $x_c/x_l = 0$ ). Mit wachsendem Grad der Kompensation verschiebt sich aber der Bereich der negativen Dämpfung zu kleinen Frequenzen, und  $D_e$  wird stärker. Der Einfluss der parallelen Leitungen auf  $D_e$  und  $K_e$  ist in Figur 7 dargestellt. Die negative Dämpfung bei der 50% kompensierten Leitung (I) geht mit dem Einschalten einer (II) bzw. von zwei (III) unkomensierten Leitungen stark zurück, und der Bereich verschiebt sich wieder zu kleinen Pendelfrequenzen. In dieser Art und Weise können verschiedene Einflüsse, wie z. B. ohmscher Widerstand, Leitungskapazität, Regler usw. untersucht werden.

Die linearen Differentialgleichungen der aus  $n$ -Drehmassen bestehenden Welle sind in der Matrixgleichung (8)

$$\begin{bmatrix} H_1(p) & -K_1(p) & & & \\ -K_1(p) & H_2(p) & -K_2(p) & & \\ & -K_2(p) & H_3(p) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -K_{n-1}(p) & H_n(p) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \delta_1 \\ \varepsilon \\ \Delta \delta_3 \\ \vdots \\ \Delta \delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\Delta T_e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

unter Berücksichtigung der mechanischen Dämpfungen an Massen und Federn zusammengestellt.

$$\begin{aligned} H_i(p) &= 2 H_i p^2 + (D_i + D_{(i-1)}) p + D_{(i+1)} p + K_{i-1} + K_i \\ K_i(p) &= K_i + D_{(i+1)} p \end{aligned}$$

Formhalber wurde die 2. Masse als Rotor der elektrischen Maschine angenommen. Auf der rechten Seite dieser Zeile steht deshalb das pulsierende Drehmoment  $\Delta T_e$  des elektrischen Systems. Diese Spalte kann selbstverständlich auch mit anderen Störmomenten erweitert werden, wie dies z. B. bei Dieselmotoren der Fall ist. Nach der Eliminierung von  $\Delta \delta_1, \Delta \delta_3, \Delta \delta_4$  usw. ergibt sich

$$k_m(j\lambda) \varepsilon = -\Delta T_e, \quad (9)$$

$$k_m(j\lambda) = K_m + j\lambda D_m$$

Wie  $k_e(j\lambda)$  ist  $k_m(j\lambda)$  eine frequenzabhängige, komplexe Grösse. Sie formuliert die Reaktion des ganzen Wellenstranges auf die Schwingungen des Maschinenrotors und wird analoger Weise «komplexe Drehmomentziffer des mechanischen Systems» genannt.  $K_m$  und  $D_m$  stellen also das Reaktionsdrehmoment der Welle dar. Für eine einzige Drehmasse mit der Trägheitskonstanten  $H$  ist  $K_m = -2 H\lambda^2$ . Die Frequenzabhängigkeit von  $K_m$  ist in Figur 8a für die Turbogruppe des ersten Beispiels (Fig. 1) ohne Berücksichtigung der mechanischen Dämpfung aufgetragen ( $D_m = 0$ ). Die Schnittpunkte der Kurve  $K_m$  mit der Abszisse ergeben die Eigenfrequenzen dieses Wellenstranges. Die Neigung der Kurve an diesen Frequenzen liefert die modale Trägheits- und Federkonstante der Welle:

$$H_{\text{mod}} = -\frac{1}{4\lambda_{\text{mod}}} \left( \frac{dK}{d\lambda} \right)_{\text{mod}} \quad (10)$$

$$K_{\text{mod}} = 2\lambda_{\text{mod}}^2 H_{\text{mod}} \quad (11)$$

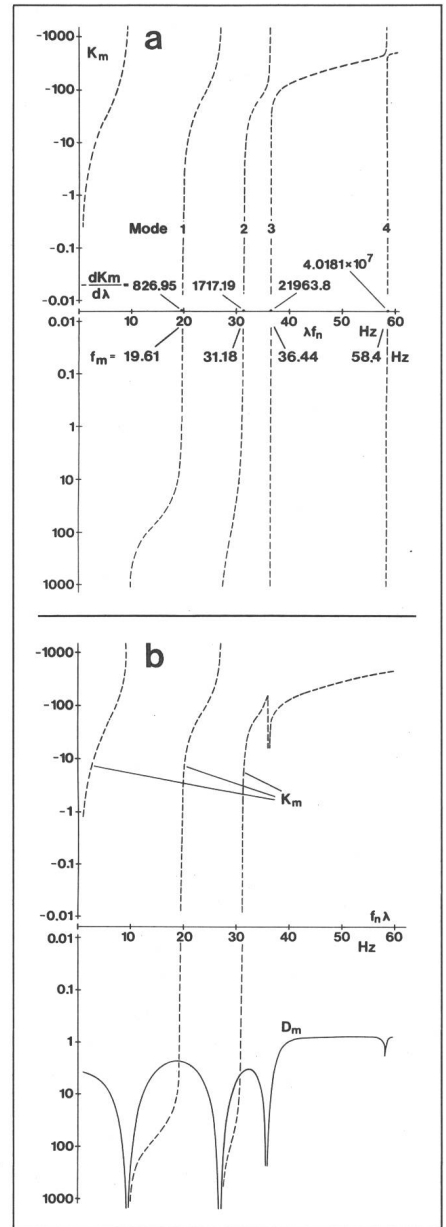


Fig. 8 Komplexe Drehmomentziffer des Wellenstranges  $k_m(j\lambda) = K_m + j\lambda D_m$

Mechanische Welle aus Figur 1

a ohne mechanische Dämpfungen

b mit mechanischen Dämpfungen

Nach diesem Verfahren können die modalen Trägheits- und Federkonstanten der Welle mit Hilfe eines Tischrechners leicht bestimmt werden.

Bei Berücksichtigung einer mechanischen Dämpfung erhält man nicht nur eine  $D_m$ -Kurve, sondern auch eine geringfügige Änderung an  $K_m$  (Fig. 8b). Die wichtigste Änderung ist das scheinbare Verschwinden der 3. und der 4. Eigenfrequenzen der Welle. Für diese Eigenfrequenzen liegt der Rotor der elektrischen Maschine in einem Knotenpunkt der Schwingungsform. Daher existiert keine gegenseitige Wirkung (Interaktion) zwischen dem elek-

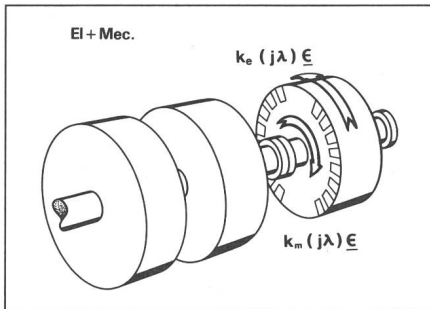


Fig. 9 Darstellung der Grundgleichung

trischen und dem mechanischen System, so dass hinsichtlich der Resonanz bei diesen Frequenzen kein Problem besteht.

Die Grundidee der Methode ist eigentlich in Gl. (9) bereits formuliert. Auf die Drehmasse des Rotors der elektrischen Maschine wirkt vom elektrischen System her ein Drehmoment  $k_e(j\lambda)\underline{\varepsilon}$  (Fig. 9), und das ganze mechanische System erzeugt in entgegengesetzter Richtung ein Reaktionsdrehmoment  $k_m(j\lambda)\underline{\varepsilon}$ . Bei freien Schwingungen muss die Summe null sein.

$$[k_m(j\lambda) + k_e(j\lambda)]\underline{\varepsilon} = 0 \quad (12)$$

Die Lösung der komplexen Gleichung

$$K_m + K_e + j\lambda(D_m + D_e) = 0 \quad (13)$$

liefert, als  $\varepsilon = \lambda + j/T$ , Eigenfrequenzen und Zeitkonstanten des ganzen elektromechanischen Systems. Für technische Bedürfnisse ist eine mathematisch exakte Lösung nicht notwendig. Es ist nämlich bekannt, dass die Dämpfung, d. h. der imaginäre Teil, in den normalen Fällen keinen nennenswerten Einfluss auf den reellen Teil dieser Gleichung ausübt. Deshalb reicht es aus, nur die Schnittpunkte der Kurven  $K_e$  und  $-K_m$  zu suchen ( $K_e + K_m = 0$ ). Diese Schnittpunkte liegen innerhalb der Ablesungs-Genauigkeit bei den Eigenfrequenzen des ganzen elektromechanischen Systems. Ist die resultierende Dämpfung  $D_m + D_e$  bei einer dieser Frequenzen negativ, so wird die Schwingung angefacht; man spricht von einer subsynchronen Resonanz zwischen dem mechanischen und dem elektrischen System.

Für ein Mehrmaschinensystem kann Gl. (12) in Matrixform aufgestellt werden.

Bei erzwungenen Schwingungen wird Gl. (12) auf der rechten Seite ein Störmoment oder eine entsprechende

Matrix der Störmomente enthalten. Die Lösung nach  $\underline{\varepsilon}$  liefert die Amplitude und die Phasenlage der Schwingungen mit den gegebenen Störfrequenzen.

### 3. Anwendung des Verfahrens

#### 3.1 Selbsterregte Schwingungen bei einer Turbogruppe

Für die Anlage nach Figur 1 ist das Resultat der Rechnungen für die Federkonstanten  $K_e$ ,  $K_m$  und die Dämpfungen  $D_e$ ,  $D_m$  in Figur 10 wiedergegeben. Die Kurven I gelten für den Fall ohne parallele Leitung, d. h. für die Zeitspanne  $0 \leq t \leq 3,8$  s. Obwohl die Eigenfrequenz des elektrischen Systems bei 32,6 Hz liegt (Punkt D mit der grössten negativen Dämpfung), schneiden sich die Kurven  $K_e$  und  $-K_m$  bei 31,4 Hz (Punkt B).

Da die resultierende Dämpfung ( $D_e + D_m$ ) bei dieser Frequenz negativ ist (B' B''), muss eine subsynchrone Resonanz mit 31,4 Hz stattfinden, wie dies in Figur 1 der Fall ist. Nach dem Einschalten der parallelen Leitungen bei  $t = 3,8$  s gelten die Kurven II und III. Bei den Schnittpunkten, die sich in der Frequenz kaum geändert haben, ist nun die resultierende Dämpfung stark positiv: Die vorhandenen Schwingungen klingen ab, eine SSR kann nicht stattfinden.

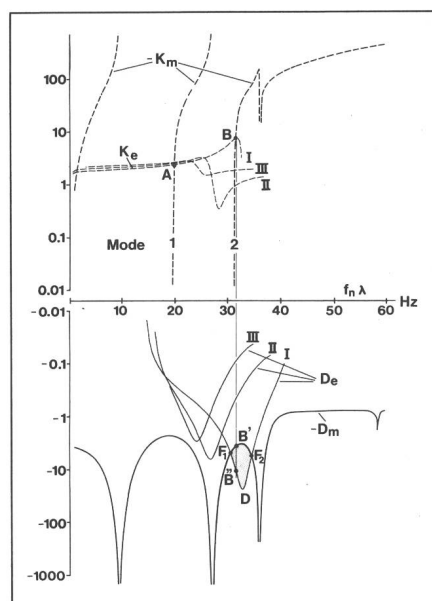


Fig. 10 Beurteilung des Schwingungsverhaltens des Turbogenerators in Figur 1

Bereich  $F_1$   $F_2$ :  
Resultierende Dämpfung  $D_e + D_m < 0$

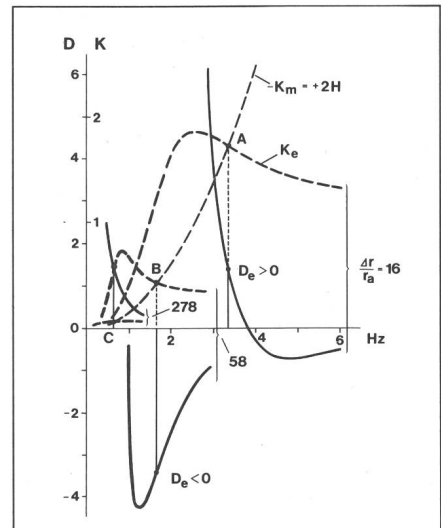


Fig. 11 Beurteilung des Schwingungsverhaltens der Asynchronmaschine in Figur 2

#### 3.2 Selbsterregte Schwingungen bei einer Asynchronmaschine

Bei leerlaufendem Asynchronmotor (Fig. 2) besteht das ganze mechanische System aus einer einzigen Drehmasse des Rotors.  $K_m$  ist also nichts anderes als  $-2 H\lambda^2$ . Alle elektrischen und mechanischen Daten der Maschine sind aus [1] entnommen worden. Die mechanische Dämpfung ist vernachlässigbar klein ( $D_m = 0$ ), das Verhalten des Motors wird also allein von der elektrischen Dämpfung bestimmt.

Im ersten Fall mit  $\Delta r = 16 r_a$  schneiden sich die Kurven  $K_e$  und  $-K_m$  im Punkt A bei 3,4 Hz (Fig. 11). Da die elektrische Dämpfung bei dieser Frequenz positiv ist, muss die nach dem Einschalten des Widerstandes  $\Delta r$  entstandene Pendelung abklingen. Für  $\Delta r = 58 r_a$  liegt der Schnittpunkt B bei etwa 1,7 Hz, wobei die elektrische Dämpfung nun stark negativ geworden ist. Die Schwingung des Rotors mit dieser Frequenz wird angefacht, wie dies im Oszillogramm in Figur 2 zu sehen ist. Erhöht man den Zusatzwiderstand  $\Delta r$  noch mehr auf den 278fachen Wert des Ankerwiderstandes, so verschwindet dieser Effekt, weil die elektrische Dämpfung wiederum positiv ist.

#### 3.3 Erzwungene Pendelungen in einer isolierten Minenanlage

Eine Untersuchung für ein Mehrmaschinensystem in einem relativ kleinen Inselnetz muss für verschiedene Netzzustände durchgeführt werden. Um das in Figur 3 beschriebene Phänomen zu erläutern und die Einflüsse aufzuzeigen, wird an dieser Stelle je-

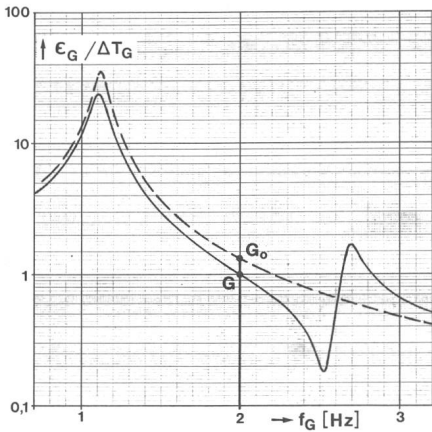


Fig. 12 Schwingungsamplitude des Generators bei einer eigenen Anregung  $\Delta T_G, f_G$   
Nachbildung der Motorwelle mit einer Drehmasse  
----- Motor ausser Betrieb  
——— Motor in Betrieb

doch nur ein Betriebszustand mit zwei potentiellen Maschinen in Betracht gezogen und die mechanische Dämpfung vernachlässigt. Das übrige Netz soll aus unzähligen kleineren Generatoren und Motoren bestehen, deren Pendelungen das Verhalten der zwei Hauptgruppen (Generator und Motor) kaum beeinflussen.

In Fig. 12 ist die Schwingungsamplitude des Generators bezogen auf das Störmoment des Dieselmotors in Funktion der Frequenz  $f_G$  aufgetragen. Wenn die Erzmühle nicht in Betrieb ist, gilt die gestrichelte Kurve. Die Eigenfrequenz des Systems liegt bei 1,1 Hz. Die Amplitude der erzwungenen Schwingungen mit der Störfrequenz 2 Hz des Dieselmotors ist klein, und der Betrieb ist ruhig (Punkt  $G_0$ ).

Ist die Erzmühle in Betrieb, so kann sie bei dieser Anregung ebenfalls pen-

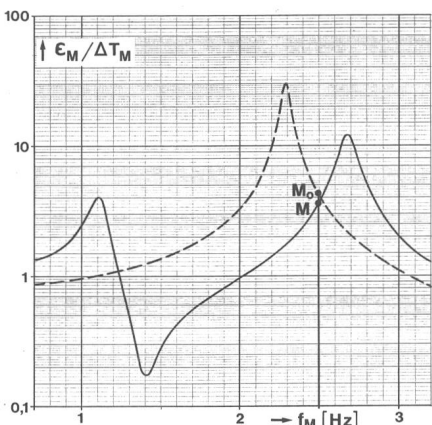


Fig. 13 Schwingungsamplitude des Motors bei eigener Anregung  $\Delta T_M, f_M$   
Nachbildung der Motorwelle mit einer Drehmasse  
----- Generator ausser Betrieb  
——— Generator in Betrieb

deln und somit das Verhalten des Generators beeinflussen. Unter der üblichen Annahme, in der die ganze Mühle (Motor) mit einer einzigen Drehmasse dargestellt wird, ergibt sich die ausgezogene Kurve in Fig. 12. Die vom Motor ins System gebrachte 2. Eigenfrequenz lässt sich bei etwa 2,7 Hz erkennen. Aus dem Vergleich der Kurven geht hervor, dass die vom Generator verursachten Pendelungen mit dem Einschalten der Erzmühle für  $f < 2,6$  Hz verbessert und für  $f > 2,6$  Hz verschlechtert werden.

Fig. 13 gibt in analoger Weise das Verhalten der Erzmühle bei eigener Anregung in Funktion der Frequenz  $f_M$  wieder. Daraus ist ersichtlich, dass die Pendelungen der Erzmühle bei der eigenen Störfrequenz von 2,5 Hz mit der Inbetriebnahme des grossen Generators sich nicht verschlechtern dürfen ( $M_0 \rightarrow M$ ), also ein Ergebnis, das den Beobachtungen nicht entspricht!

In der Tat ist das  $GD^2$  der Erzmühle zweimal grösser als dasjenige des Motors. Zudem ist die Verbindungswelle zwischen dem Motor und der Mühle ziemlich elastisch, so dass der ganze Wellenstrang statt als eine Drehmasse eher als ein Zweimassensystem mit der Torsionseigenfrequenz von 10 Hz zu betrachten ist. Berücksichtigt man diese etwas verfeinerte Wellenreduktion, so ergibt sich die Fig. 14. Nach diesem Ergebnis müssen sich die Schwingungen des Motors bei eigener Anregung etwa 5,4mal vergrössern, wenn der neue Generator in Betrieb genommen wird ( $M_0 \rightarrow M$ ). Dieses Beispiel verdeutlicht die Rolle der Wellenreduktion, die bei solchen Problemen oft vernachlässigt wird. Deshalb muss jedesmal genau überprüft werden, ob

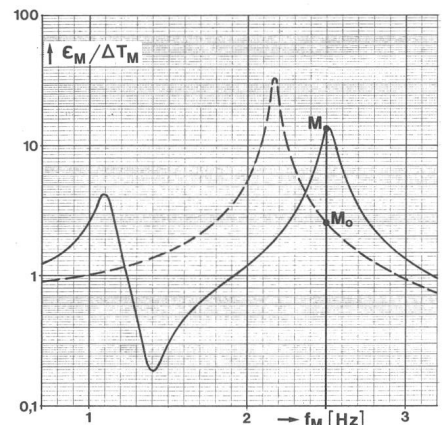


Fig. 14 Schwingungsamplitude des Motors bei eigener Anregung  $\Delta T_M, f_M$   
Nachbildung der Motorwelle mit zwei Drehmassen  
----- Generator ausser Betrieb  
——— Generator in Betrieb

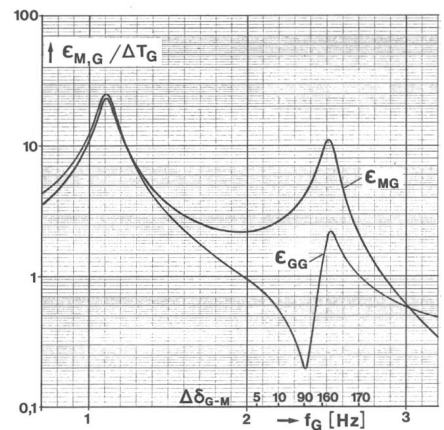


Fig. 15 Schwingungen des Motors und des Generators bei Generatoranregung  $\Delta T_G, f_G$   
Nachbildung der Motorwelle mit zwei Drehmassen  
 $\epsilon_{MG}$  Schwingungsamplituden des Motors  
 $\epsilon_{GG}$  Schwingungsamplituden des Generators

die Vereinfachung mit einem Einmassensystem zulässig ist oder nicht.

In einem System mit mehreren gleichzeitig wirkenden Störmomenten führt jeder Rotor eine gemischte Schwingung aus. Im vorliegenden Fall pendelt die Erzmühle mit zwei Frequenzen: 2,5 Hz von der Eigenanregung und 2,0 Hz von der Fremdanregung durch den Dieselmotor. Der resultierende Schwingungszeiger des Motors ist also

$$\underline{\epsilon}_M = \underline{\epsilon}_{MM} e^{j\lambda_M t} + \underline{\epsilon}_{MG} e^{j\lambda_G t} \quad (14)$$

Eine ähnliche Gleichung gilt auch für die Schwingungen des Generators.

Die Methode liefert auch die Schwingungsamplitude  $\epsilon_{MG}$  (Fig. 15) bezogen auf das Störmoment des Generators. Sind die Störmomente  $\Delta T_M$  und  $\Delta T_G$  bekannt, so können die Schwingungszeiger  $\epsilon_{MM}$  und  $\epsilon_{MG}$  bestimmt und vektoriell addiert werden. Für  $\epsilon_{MM} \gg \epsilon_{MG}$  dominiert die Anregungsfrequenz des Motors, d. h. in diesem Beispiel 2,5 Hz. Liegt der Fall  $\epsilon_{MM} \ll \epsilon_{MG}$  vor, so müssten die resultierenden Pendelungen praktisch nur eine Frequenz von 2 Hz aufweisen. Die Beobachtungen, dass die Pendelungen im gemeinsamen Betrieb der beiden Maschinen etwa 2,3 Hz seien, deuten darauf hin, dass im vorliegenden Fall  $\epsilon_{MM}$  und  $\epsilon_{MG}$  von gleicher Grössenordnung sind. Durch Interferenz erscheint die resultierende Pendelung mit 2,3 Hz.

Der Einfluss einer wirksamen Dämpferwicklung beim Synchronmotor auf dessen Pendelungen kann leicht beurteilt werden, wenn die Rechnung unter Berücksichtigung einer Dämpferwicklung wiederholt

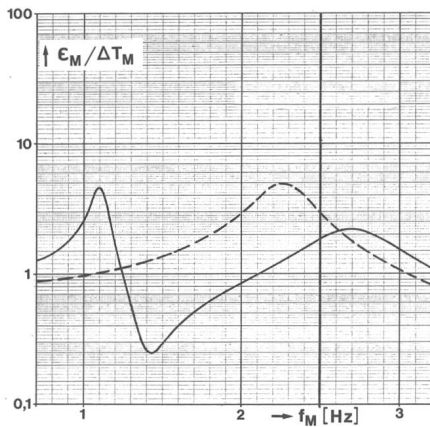


Fig. 16 Einfluss der Dämpferwicklung  
Zum Vergleich mit Figur 14

wird. Figur 16 und 17 präsentieren das neue Resultat. Aus Figur 16 geht hervor, dass die Schwingungsamplitude des Motors bei eigener Anregung mit 2,5 Hz mit der Inbetriebnahme des neuen Generators nun nicht mehr wachsen, sondern im Gegenteil etwas

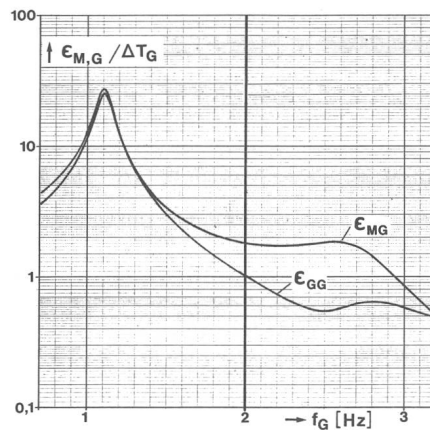


Fig. 17 Einfluss der Dämpferwicklung  
Zum Vergleich mit Figur 15

zurückgehen wird. Eine leichte Reduktion ist bei der Amplitude der vom Dieselgenerator angeregten Schwingung mit 2 Hz ebenfalls zu erwarten (Vergleich zwischen Figur 17 und 15).

Diese Beispiele geben einen Überblick darüber, wie die Schwingungs-

probleme von Synchron- wie auch von Asynchronmaschinen sowie von Systemen mit mehreren Maschinen in einer einheitlichen Theorie behandelt werden können. Sie zeigen gleichzeitig, wie die Torsionsschwingungen von Maschinen durch die Gegebenheiten des Netzes und des Wellenstranges beeinflusst werden. Der Aufbau des vorgestellten Verfahrens berücksichtigt diese Verknüpfungen und erlaubt somit eine gute Zusammenarbeit zwischen den drei technischen Disziplinen: Maschine, Netz und Mechanik.

#### Literatur

- [1] B. B. Palit: Eigenwertuntersuchungen an einer Drehstrom-Asynchronmaschine bei selbsterregten Dauerschwingungen. Bull. SEV/VSE 69(1978)8, S. 371...376.
- [2] I. M. Canay: A novel approach to the torsional interaction and electrical damping of the synchronous machine. Part I: Theorie. Part II: Application to an arbitrary network. IEEE Trans. PAS 101(1982)10, p. 3630...3647.
- [3] T. Laible: Die Theorie der Synchronmaschine im nichtstationären Betrieb mit Anwendungsbeispielen und unter Berücksichtigung der modernen amerikanischen Literatur. Berlin, Springer, 1952.