

Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen = Bulletin de l'Association suisse des électriciens, de l'Association des entreprises électriques suisses

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen

Band: 69 (1978)

Heft: 8

Artikel: Magnetische Netzwerke mit komplexen magnetischen Widerständen und ihre duale Abbildung

Autor: Štepina, J.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-914870>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 04.05.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Magnetische Netzwerke mit komplexen magnetischen Widerständen und ihre duale Abbildung

Von J. Štešina

621.3.011.7:537.621.2;

Es wird die Abbildung von magnetischen und elektrischen Netzwerken mit Wirbelströmen oder Wirbelströmen im dualen Bereich untersucht und die Autodualität der massiven Leiter gezeigt. Für die praktische Anwendung der elektrischen oder magnetischen Ersatzschaltbilder wird eine genaue Systematik der Zählpfeile eingeführt.

L'auteur examine la représentation de réseaux magnétiques et électriques avec courants de Foucault ou flux tourbillonnaires dans le domaine dualiste et il démontre l'autodualité des conducteurs massifs. Pour l'application en pratique des schémas équivalents électriques ou magnétiques, une systématique précise des flèches de comptage est introduite.

1. Einleitung

Als elektrisches Netzwerk bezeichnet man ein System von ausgeprägten elektrisch leitenden Wegen, deren elektrischer Widerstand im Vergleich mit der Umgebung gering ist, so dass sich die Ströme praktisch nur auf diesen Wegen entwickeln können. Es gibt jedoch auch Systeme von *magnetisch* gut leitenden Wegen, welche man meistens nicht als Netzwerke, sondern nur als magnetische Kreise bezeichnet, weil sie normalerweise einfacher als ihre elektrischen Analogien sind. Die magnetischen Netzwerke haben nicht so gute Eigenschaften wie die elektrischen, weil die Permeabilität der ferromagnetischen Werkstoffe, bezogen auf den leeren Raum, nicht so gross wie die Leitfähigkeit des Kupfers im Vergleich mit üblichen Isolatoren ist. Es gibt jedoch praktische Beispiele, wo man sogar eine räumliche Feldverteilung mit ausreichender Genauigkeit durch ein einfaches Netzwerk ersetzen kann [1¹⁾].

Die magnetischen Kreise sind meistens mit elektrischen Netzwerken verkettet, so dass eine direkte Abhängigkeit zwischen den elektrischen und magnetischen Grössen besteht. Da der magnetische Teil eines elektromagnetischen Netzwerkes meistens einfacher als der elektrische Teil ist, erfasst man oft den magnetischen Kreis durch ein elektrisches Ersatzschaltbild, wo die magnetischen Grössen durch elektrische abgebildet werden. Es wurde schon in [2] und [3] darauf hingewiesen, dass die Ersatzschaltbilder duale Struktur zu den zugehörigen magnetischen Schemata besitzen und dass den magnetischen Widerständen Reaktanzen im Ersatzschaltbild entsprechen. Die Dualität der elektrischen und magnetischen Netzwerke macht es auch möglich, die Vorgänge in elektrischen Netzwerken anhand von magnetischen Ersatzschaltbildern darzustellen. Diese Idee wurde in [4] für elektrische Maschinen vorgeschlagen und später noch ausführlicher untersucht.

Der vorliegende Aufsatz stützt sich auf Arbeiten [1; 5], in welchen Systeme mit massiven Fluss- und Stromleitern untersucht und mit dualen magnetischen und elektrischen Ersatzschaltbildern beschrieben werden. Es wird nun eine genaue Zählpfeilsystematik entwickelt und die Autodualität von massiven Körpern mit Wirbelströmen untersucht. Zum Schluss wird auf die Möglichkeit hingewiesen, von sinusförmigen Wechselgrössen zu Ausgleichsvorgängen überzugehen.

2. Verkettungselemente

Als Verkettungselemente sollen die Stellen im elektromagnetischen System bezeichnet werden, wo der elektrische Teil mit dem magnetischen zusammenhängt. Es sind Spulen, deren Ströme magnetische Spannungen hervorrufen. Damit man nach der Transformation eines im Verbraucher-Zählpfeilsystem (VZS) beschriebenen Elements wieder das VZS erhält,

empfiehlt sich die Zuordnung der Zählpfeile an der Verkettungsstelle nach Fig. 1a oder 1b vorzunehmen. Man kann sich leicht anhand des Durchflutungs- und Induktionsgesetzes davon überzeugen, dass in beiden Schemata dieselben Beziehungen zwischen den Zeigern der magnetischen und elektrischen Grössen (Kreisfrequenz ω) bestehen:

$$\underline{U}_m = w \underline{I} \quad (1)$$

$$\underline{U} = j \omega w \underline{\Phi} \quad (2)$$

Durch die Proportionalität zwischen der magnetischen Spannung und dem elektrischen Strom auf einer Seite und dem magnetischen Fluss und elektrischer Spannung auf der anderen ist die duale Rolle der beiden Grössengruppen eindeutig definiert. Aus Gl. (1) folgt unmittelbar, dass ein konstanter Strom einer konstanten magnetischen Spannung entspricht und daher eine Quelle des konstanten Stromes in dem magnetischen Schaltbild durch eine Quelle der magnetischen Spannung ersetzt werden kann. Dieselbe Vertauschbarkeit gilt auch nach Gl. (2) für die Quellen des magnetischen Flusses und der elektrischen Spannung.

3. Abbildung der passiven Elemente

In Fig. 2 ist die Abbildung von passiven Elementen im dualen Bereich dargestellt. Für die elektrische Spannung in Fig. 2a kann man nach Gln. (1) und (2) schreiben

$$\underline{U} = j \omega w \underline{\Phi} = j \omega w \frac{U_m}{Z_m} = \frac{j \omega w^2}{Z_m} \underline{I} = \underline{Z} \underline{I} \quad (3)$$

wobei die elektrische Impedanz \underline{Z} mit der komplexen Reluktanz \underline{Z}_m nach der Gleichung

$$\underline{Z} = j \omega w^2 / \underline{Z}_m \quad (4)$$

zusammenhängt. Im dualen Fall einer mit einer Impedanz \underline{Z} abgeschlossenen Wicklung (Fig. 2b) gilt nach (1) und (2) für den zugeordneten komplexen magnetischen Widerstand

$$\underline{Z}_m = \underline{U}_m / \underline{\Phi} = j \omega w^2 \underline{I} / \underline{U} = j \omega w^2 / \underline{Z} \quad (5)$$

und man sieht, dass die Gln. (4) und (5) nur dieselbe umkehrbare Abbildung beschreiben.

Nach Gl. (5) findet man für elektrischen Wirkwiderstand R

$$\underline{Z}_m = j \omega w^2 / R \quad (6)$$

einen imaginären magnetischen Widerstand und für einen Kondensator C eine negative reelle Reluktanz

$$\underline{Z}_m = j \omega w^2 j \omega C = -\omega^2 w^2 C \quad (7)$$

¹⁾ Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

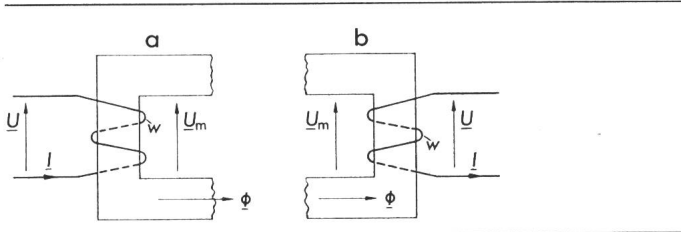


Fig. 1 Zuordnung der Zählpfeile an den Verkettungsstellen

- \underline{U} Wechselspannung (Zeiger)
- \underline{U}_m magnetische Wechselspannung (Zeiger)
- \underline{I} Wechselstrom (Zeiger)
- $\underline{\Phi}$ magnetischer Wechselfluss (Zeiger)
- w Windungszahl

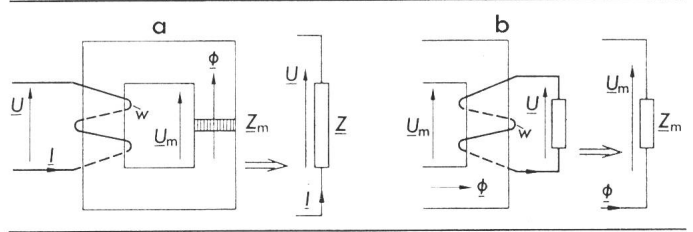


Fig. 2 Duale Abbildung von komplexen Widerständen

- \underline{Z} komplexer elektrischer Widerstand (Impedanz)
- \underline{Z}_m komplexer magnetischer Widerstand (komplexe Reluktanz)

als Abbildung im magnetischen Bereich. Man kann daher mit Hilfe einer über einen Kondensator kurzgeschlossenen Wicklung den magnetischen Widerstand eines Teiles des magnetischen Kreises kompensieren. In Fig. 3 sind einige umkehrbare Abbildungen dargestellt.

Die von einem Element aufgenommene Wirkleistung kann man sowohl durch elektrische als auch durch magnetische Größen ausdrücken:

$$P_w = \text{Re} [\underline{U} \underline{I}^*] = |\underline{I}|^2 \text{Re} [\underline{Z}] = \text{Re} [j \omega \underline{\Phi} \underline{U}_m^*] = |\underline{\Phi}|^2 \text{Re} [-j \omega \underline{Z}_m] \quad (8)$$

Aus Gl. (8) ist ersichtlich, dass jede zeitliche Verspätung des Flusses hinter der Erregung Verlusten entspricht.

4. Dualität der magnetischen und elektrischen Schaltbilder

Aus den Gleichungen (1), (2) und (4) folgen auch die bekannten Zusammenhänge zwischen dualen Netzwerken; z. B. für eine Parallelschaltung von zwei komplexen Reluktanzen $\underline{Z}_{m1}, \underline{Z}_{m2}$ findet man den resultierenden magnetischen Leitwert in der Form

$$\underline{Y}_m = 1/\underline{Z}_m = 1/\underline{Z}_{m1} + 1/\underline{Z}_{m2} \quad (9)$$

und die zugeordnete elektrische Impedanz ist dann nach Gl. (8)

$$\underline{Z} = j \omega w^2 / \underline{Z}_m = j \omega w^2 / \underline{Z}_{m1} + j \omega w^2 / \underline{Z}_{m2} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \quad (10)$$

Einer Parallelschaltung im magnetischen Bereich entspricht daher eine Reihenschaltung im elektrischen Bereich und umgekehrt. Im allgemeinen findet man das duale Schaltbild nach dem bekannten Verfahren in Fig. 4. In jede Masche des bestehenden Netzwerkes trägt man einen Knoten des gesuchten dualen Netzwerkes ein und ergänzt diese Knotengruppe durch einen einzigen Knoten ausserhalb des Schaltbildes. Zwischen diesen Knoten führt man dann durch gesamte Elemente des Netzwerkes Verbindungslinien. Das auf diese Weise entstandene Gebilde ist der Graph des gesuchten dualen Schaltbildes. An den Stellen, wo die Verbindungslinien die Elemente des ursprünglichen Netzwerkes schneiden, liegen die nach Gl. (4) oder (5) zu bestimmenden Elemente des gesuchten Ersatzschaltbildes.

Bei der Anwendung des in Fig. 4 dargestellten Verfahrens kann auch die Frage der Zählpfeile berücksichtigt werden, sofern man auch gleiche Vorzeichen in den dualen Gleichungssystemen haben will. In Fig. 5 sind zwei duale Netzwerke dargestellt, welche nach dem in Fig. 4 beschriebenen Verfahren gegenseitig abhängig sind. Es wird angenommen, dass z. B. das

Fig. 3 Passive Elemente der komplexen magnetischen Netzwerke und ihrer elektrischen Abbildung

magnetisches Netzwerk			elektrisches Ersatzschaltbild (bezogen auf Windungszahl w)		
magnetisches Element		komplexer magnetischer Widerstand $\underline{Z}_m = \frac{\underline{U}_m}{\underline{\Phi}}$	elektrisches Element		komplexer Widerstand $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{j \omega w^2}{\underline{Z}_m}$
Darstellung	Beschreibung		Darstellung	Beschreibung	
	Luftspalt d (Querschnitt A)	$R_m = \frac{d}{\mu_0 A}$		induktive Reaktanz	$\underline{Z} = \frac{j \omega w^2}{R_m} = j \omega L$
	kurzgeschlossene Windung mit Widerstand R	$\underline{Z}_m = \frac{j \omega}{R}$		Widerstand	$\underline{Z} = R w^2$
	massive Zwischenlage; Umfang des Querschnittes b	$\underline{Z}_m = \frac{d}{b} \sqrt{\frac{2 \pi f}{\mu \rho}} e^{j \frac{\pi}{4}}$		Impedanz mit gleichem Real- und Imaginärteil	$\underline{Z} = \frac{b w^2}{d} \cdot \sqrt{2 \pi f \mu \rho} \cdot e^{j \frac{\pi}{2}}$
	Eisenteil mit Verlusten (Verlustwinkel psi)	$\underline{Z}_m = \underline{Z}_m \angle \psi$		Drosselspule mit Verlusten	$\underline{Z} = \frac{\omega w^2}{ \underline{Z}_m } \angle 90^\circ - \psi$

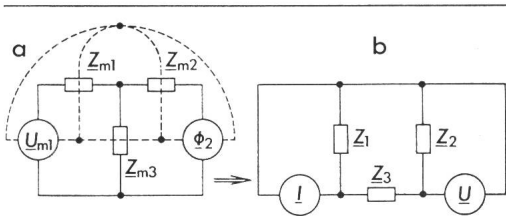


Fig. 4 Bestimmung des dualen Ersatzschaltbildes

a magnetisches Netzwerk
b elektrisches Ersatzschaltbild

aus den Maschen A, B, C bestehende Netzwerk magnetisch und das andere elektrisch ist. In beiden Netzwerken entsprechen die auf den Verbindungslinien liegenden Zählpfeile Ströme oder magnetischen Flüssen und die neben den Elementen liegenden Pfeile den Spannungen. Die Zählpfeile des Netzwerkes D, E, F sind so gewählt, dass sie gegenüber den dualen Grössen des Netzwerkes A, B, C um 90° im Uhrzeigersinn versetzt sind. Wenn man die in einen Knoten einflussenden Ströme als positiv nimmt und die Spannungen in den Maschen nach den angegebenen Richtungen summiert, erhält man die Gleichungen

$$\text{A: } -\underline{U}_{m1} + \underline{U}_{m2} - \underline{U}_{m4} = 0$$

$$\text{a: } -\underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_4 = 0$$

$$\text{B: } \underline{U}_{m4} - \underline{U}_{m3} + \underline{U}_{m5} = 0$$

$$\text{b: } \underline{I}_4 - \underline{I}_3 + \underline{I}_5 = 0$$

$$\text{C: } -\underline{U}_{m5} + \underline{U}_{m6} = 0$$

$$\text{c: } -\underline{I}_5 + \underline{I}_6 = 0$$

$$\text{D: } \underline{U}_3 - \underline{U}_5 - \underline{U}_6 = 0$$

$$\text{d: } \underline{\Phi}_3 - \underline{\Phi}_5 - \underline{\Phi}_6 = 0$$

$$\text{E: } -\underline{U}_2 + \underline{U}_4 - \underline{U}_3 = 0$$

$$\text{e: } -\underline{\Phi}_2 + \underline{\Phi}_4 - \underline{\Phi}_3 = 0$$

$$\text{F: } -\underline{U}_1 + \underline{U}_2 = 0$$

$$\text{f: } -\underline{\Phi}_1 + \underline{\Phi}_2 = 0$$

Die Dualität der beteiligten Grössen und der Schaltbilder ist vollständig. Den Knoten des magnetischen Netzwerkes entsprechen Maschen des elektrischen Ersatzschaltbildes und umgekehrt. Die mit gleichen Buchstaben bezeichneten Gleichungen haben gleiche Vorzeichen bei Grössen mit gleichen Indices.

5. Autodualität der massiven Leiter

Massive Teile mit Wirbelerscheinungen kommen sowohl im elektrischen als auch im magnetischen Bereich vor. Grundsätzlich sind jedoch immer beide Komponenten wirksam. Es existieren nämlich nicht getrennt eine elektrische und magnetische Verdrängung, sondern nur eine einzige elektromagnetische Verdrängung. Der Unterschied besteht nur darin, ob Strom oder Fluss zugeführt wird; die andere Grösse fliesst dann nur innerhalb des massiven Leiters auf geschlossenen Wirbelbahnen.

Nach [6] gilt für 1 m^2 der Oberfläche eines massiven Körpers (Fig. 6), welche man bei grösseren Querschnitten schon als Halbebene ohne Rücksicht auf die Form betrachten kann, die Beziehung

$$\underline{H}_0 = \frac{1+j}{j} \frac{\beta}{\omega \mu} \underline{E}_0 \quad (11)$$

zwischen der magnetischen (\underline{H}_0) und der elektrischen (\underline{E}_0) Feldstärke, wobei

$$\beta = \sqrt{\pi f \cdot \mu / \rho} \quad (12)$$

ist und f die Frequenz, μ die Permeabilität und ρ den spezifischen Widerstand bedeutet. Weiter kann man schreiben:

$$\underline{H}_0 = \underline{I}_1 \quad (13)$$

$$\underline{E}_0 = j \omega \underline{\Phi}_1 \quad (14)$$

wobei \underline{I}_1 , $\underline{\Phi}_1$ den Strom- und Flussanteil darstellen, welche unter der Einsoberfläche von 1 m^2 parallel zur Oberfläche fliessen (Fig. 6). Wenn der Weg der Ströme an der Oberfläche des ganzen Körpers die Länge l_e hat und die Länge des Flussweges l_m ist, gelten folgende Gleichungen:

$$\underline{U} = l_e \underline{E}_0 \quad (15)$$

$$\underline{U}_m = l_m \underline{H}_0 \quad (16)$$

$$\underline{\Phi} = l_e \underline{\Phi}_1 \quad (17)$$

$$\underline{I} = l_m \underline{I}_1 \quad (18)$$

Aus den Gln. (11) bis (18) ergibt sich die Impedanz der ganzen Oberflächenschicht in der Tangentialrichtung l_e zu

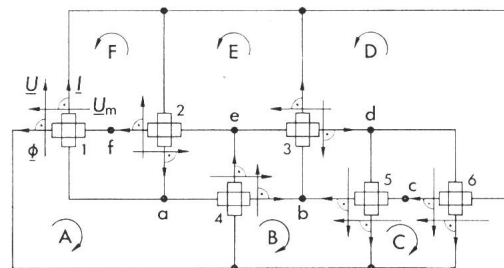


Fig. 5 Duale Netzwerke mit einheitlich zugeordneten Zählpfeilen

A...F Maschen
a...f Knoten

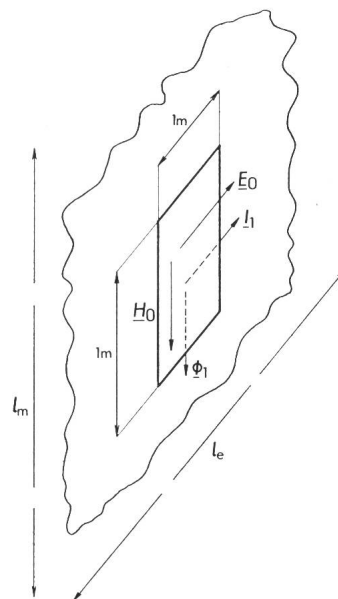


Fig. 6 Einsoberfläche eines massiven Leiters

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{l_e}{l_m} \frac{E_0}{H_0} = \frac{l_e}{l_m} \cdot \frac{j}{1+j} \cdot \frac{\omega \mu}{\beta} = \frac{l_e}{l_m} \sqrt{2 \pi f \mu \varrho} e^{j \frac{\pi}{4}} \quad (19)$$

und die komplexe Reluktanz in der Tangentialrichtung l_m ist dann

$$\underline{Z}_m = \frac{\underline{U}_m}{\underline{\Phi}} = \frac{l_m}{l_e} j \omega \frac{H_0}{E_0} = \frac{l_m}{l_e} (1+j) \frac{\beta}{\mu} = \frac{l_m}{l_e} \sqrt{\frac{2 \pi f}{\mu \varrho}} e^{j \frac{\pi}{4}} \quad (20)$$

Die komplexen Widerstände \underline{Z} und \underline{Z}_m erfüllen Gl. (4) für $w = 1$. Man sieht, dass ein massiver Leiter mit Wirbelströmen, dessen Abmessungen wesentlich grösser als die Eindringtiefe sind [6], im dualen Bereich durch einen Massivleiter aus demselben Material vertreten ist. In dem besonderen Fall, dass $l_m = l_e$ ist, d.h., wenn der Umfang gleich der Länge des massiven Leiters ist, erscheint der massive Körper im dualen Bereich unverändert als seine eigene Abbildung. So ein massiver Leiter ist autodual; seine Impedanz und komplexe Reluktanz erfüllen Gl. (4) ohne Änderung der Abmessungen. Man sieht, dass die Möglichkeit einer dualen Ersatzdarstellung in der Elektrodynamik tief verwurzelt ist und bei dreidimensionalen elektromagnetischen Anordnungen ganz automatisch zur Geltung kommt.

Massive Teile kommen vor allem in magnetischen Kreisen vor und sind meistens aus Eisen. Das Eisen hat zwar eine veränderliche Permeabilität, aber aus dem Vergleich mit der Methode von Rosenberg [7], welche trotz Einfachheit gute Ergebnisse bringt, folgt, dass man in linearen Beziehungen

$$\mu \approx 2 \hat{B}_0 / \hat{H}_0 \quad (21)$$

näherungsweise annehmen kann, wobei \hat{B}_0, \hat{H}_0 die Scheitelwerte dieser Grössen an der Oberfläche sind. Die Permeabilität hängt von der magnetischen Beanspruchung ab und muss iterativ in der Magnetisierungskennlinie gefunden werden.

6. Transiente Vorgänge

Die Anwendung der Ersatzschaltbilder beschränkt sich meistens auf Dauerbetrieb mit sinusförmigen Wechselgrössen, obwohl auf diese Weise ebensogut auch Ausgleichsvorgänge behandelt werden können. Wenn man Gln. (1), (2) in Augenblickswerten schreibt und nach Laplace transformiert, er-

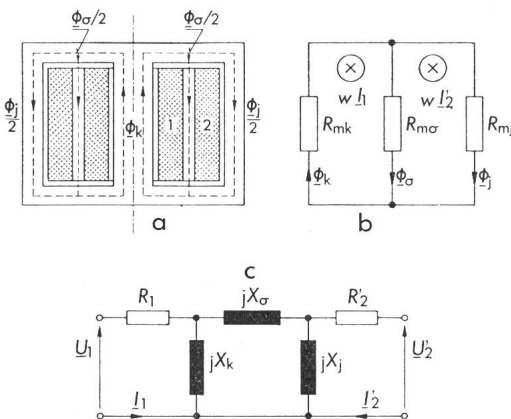


Fig. 7 Magnetisches (b) und elektrisches (c) Ersatzschaltbild eines Einphasentransformators (a)

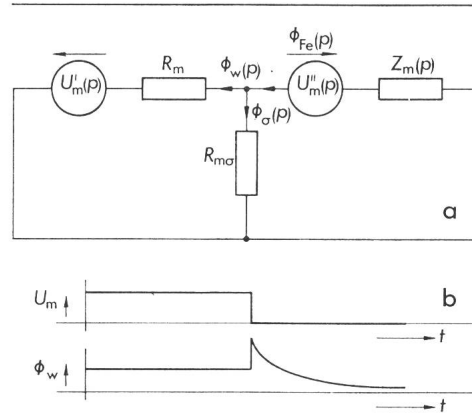


Fig. 8 Magnetisches Netzwerk (a) für transiente Vorgänge im Wendepolkreis von Gleichstrommotoren mit massivem Joch und zeitlicher Verlauf bei Stromunterbrechung (b)

$R_m, R_{m\sigma}$ magnetische Widerstände des Luftspaltes und des Streuweges des Wendepols
 $Z_m(p)$ Operatorreluktanz des massiven Ständerjoches
 $U_m'(p), U_m''(p)$ Bildfunktionen der magnetischen Spannungen des Ankers und der Wendepolwicklung

hält man im Bildbereich bei verschwindenden Anfangsbedingungen

$$U_m(p) = w I(p) \quad (22)$$

$$U(p) = w p \Phi(p) \quad (23)$$

wobei $U_m(p), I(p), \Phi(p)$ Bildfunktionen sind. Als Verallgemeinerung der Gl. (4) erhält man die Abbildung von Operatorimpedanzen in der Form

$$Z(p) = U(p)/I(p) = w^2 p/Z_m(p) \quad (24)$$

wo $Z_m(p)$ die Operatorreluktanz ist. Die Gleichungen (1), (2), (4) sind Sonderfälle von (22) bis (24), wenn $p = j \omega$ ist. In diesem Zusammenhang machen auch massive Leiter mit Wirbelströmen keine Ausnahme.

Nach [8] gilt für $\Phi(t)$ beim Einheitssprung der magnetischen Spannung $U_m(t)$

$$\Phi_{sp}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\mu \varrho} \frac{l_e}{l_m} \sqrt{t} \quad (25)$$

Nach der Transformation erhält man

$$\Phi_{sp}(p) = \frac{l_e}{l_m} \sqrt{\mu \varrho} \frac{1}{p \sqrt{p}} \quad (26)$$

Für einen beliebigen Verlauf der magnetischen Spannung $U_m(t)$ gilt nach dem Faltungssatz

$$\Phi(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t U_m(t-\xi) \Phi_{sp}(\xi) d\xi \quad (27)$$

und nach der Transformation

$$\Phi(p) = p U_m(p) \Phi_{sp}(p) = U_m(p) \frac{l_e}{l_m} \sqrt{\mu \varrho} \frac{1}{\sqrt{p}} \quad (28)$$

Die Operatorreluktanz ist dann

$$Z_m(p) = \frac{U_m(p)}{\Phi(p)} = \frac{l_m}{l_e} \sqrt{\frac{1}{\mu \varrho}} \sqrt{p} \quad (29)$$

und für $p = j \omega$ erhält man wieder Gl. (20).

