Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen = Bulletin de l'Association suisse des électriciens, de l'Association des entreprises électriques suisses

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen

Band: 68 (1977)

Heft: 8

Artikel: Condensateurs Circulaires sur Microruban

Autor: Mosig, J. R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-915024

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Condensateurs Circulaires sur Microruban [1])

Par J. R. Mosig

621.372.821

La capacité d'un disque microruban est calculée sur la base d'une approximation statique qui assimile le mode fondamental se propageant dans la structure à un mode TEM. Le problème est formulé avec les techniques de la fonction de Green, qui est obtenue par un processus itératif conduisant à une série infinie de charges-images. L'équation intégrale résultante est calculée par la méthode des moments, et des résultats asymptotiques pour le comportement du champ électrique au bord du disque sont employés pour obtenir une représentation précise de la densité de charge. Les techniques numériques associées sont décrites en détail. Enfin des résultats pratiques sont présentés et comparés avec ceux existant dans la littérature.

Die Kapazität einer Microstrip-Scheibe wird mit einer statischen Approximation berechnet, in welcher die entstehende Hauptwelle als eine TEM-Welle betrachtet wird. Das Problem wird mit Hilfe der Greenschen Funktion formuliert, was durch Iteration zu einer unendlichen Reihe von Bildladungen führt. Die Integralgleichung wird mit der Momente-Methode berechnet, und asymptotische Ergebnisse über den Verlauf des elektrischen Feldes am Rand der Scheibe ergeben eine genaue Darstellung der Ladungsdichte. Die betreffenden numerischen Verfahren sind im Detail beschrieben. Schliesslich werden praktische Ergebnisse dargelegt und mit den bisher veröffentlichten verglichen.

1. Introduction

L'apparition de la technologie des circuits imprimés dans le domaine des hyperfréquences (MIC = Microwave Integrated Circuit) a fait de la ligne microruban un moyen de transmission privilégié en ce qui concerne les faibles distances et interconnexions entre éléments. Par conséquent, un grand effort a été fourni durant ces dernières années dans la recherche de structures microruban simulant le comportement des composants classiques utilisés en basse fréquence. Parmi elles, le disque circulaire offre de nombreuses possibilités et a déjà trouvé des applications comme élément capacitif, comme résonateur et même comme antenne.

Cet article étudie la capacité d'un disque microruban dans l'hypothèse du mode dominant TEM en utilisant la méthode décrite dans l'article précédent [1] [2]). L'exactitude des résultats présentés permet l'emploi de ce type de structure comme condensateur intégré dans des filtres microruban et des circuits de polarisation ou de découplage pour éléments actifs.

2. Description du problème

La structure considérée est présentée à la fig. 1. Un disque conducteur d'épaisseur supposée nulle est placé dans un plan parallèle et à une distance d du plan de masse. L'espace entre les deux plans est rempli d'un milieu diélectrique, homogène et sans pertes, de permittivité $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$. De plus, une différence de potentiel V est appliquée entre le disque et le plan de masse. La symétrie de révolution de la structure suggère l'utilisation de coordonnées cylindriques z, ϱ, φ et le problème (indépendant de φ) peut être résolu dans le plan $z-\varrho$.

Pour faciliter le calcul, cette structure est remplacée par celle de la fig. 2, où deux disques parallèles sont séparés par une plaque de diélectrique d'épaisseur $2d$. Cette nouvelle structure est équivalente à la première du point de vue électrostatique mais bénéficie d'une plus grande symétrie. Il faut toutefois remarquer que la capacité obtenue ainsi vaut la moitié de la capacité du problème réel (fig.1).

[1]) Pour faire le travail décrit dans cet article, l'auteur a reçu une bourse de la Commission Fédérale de Bourses pour Etudiants Etrangers ainsi qu'une aide financière de la Fondation Hasler (projet nº 16).

[2]) Voir la bibliographie à la fin de l'article.

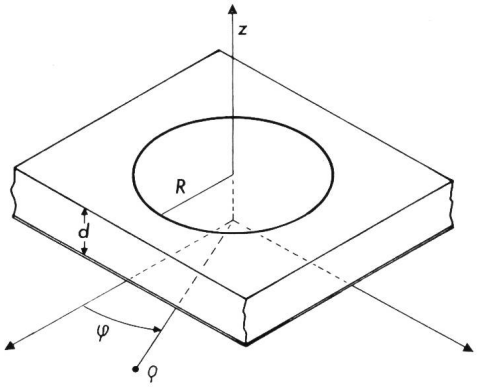

Fig. 1 Géométrie du problème
ϱ, φ, z coordonnées cylindriques
R rayon du disque
d épaisseur du substrat

3. Analyse numérique

Le problème de la fig. 2 est compris dans une certaine classe de problèmes électrostatiques étudiés dans [1]. On peut donc appliquer la méthode de l'équation intégrale qui s'écrit ici

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{D_1+D_2} \varrho_s(\vec{r}\,')\, G(\vec{r}, \vec{r}\,')\, ds' \qquad \vec{r}, \vec{r}\,' \in \boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2 \tag{1}$$

où $\varrho_s(\vec{r}\,')$ représente la densité superficielle de charge inconnue sur les disques, $\Phi(\vec{r})$ le potentiel de ces disques et $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ la fonction de Green du problème. L'intégration porte sur la surface $\boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2$ des deux disques.

Or, en profitant de la symétrie, on peut réduire le domaine d'intégration à un seul disque. $\vec{a}_2$ étant un vecteur unitaire, on a en effet

$$\begin{aligned} \varrho_s(\vec{r}_1\,') &= -\varrho_s(\vec{r}_2\,') \\ \Phi(\vec{r}_1\,') &= -\Phi(\vec{r}_2\,') = V \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{r}_1\,' = \vec{\varrho}\,' + d\,\vec{a}_z & \vec{r}_1\,' \in \boldsymbol{D}_1 \\ \vec{r}_2\,' = \vec{\varrho}\,' - d\,\vec{a}_z & \vec{r}_2\,' \in \boldsymbol{D}_2 \end{cases} \tag{2}$$

et l'équation intégrale (1) devient ainsi

$$V = \int_{D_1} \left\{ G(\vec{r}, \vec{r}_1\,') - G(\vec{r}, \vec{r}_2\,') \right\} \varrho_s(\vec{r}_1\,')\, ds' \qquad \begin{aligned} &\vec{r}, \vec{r}_1\,' \in \boldsymbol{D}_1 \\ &\vec{r}_2\,' \in \boldsymbol{D}_2 \end{aligned} \tag{3}$$

Une fois cette équation résolue et la densité de charge déterminée, la capacité du problème réel est donnée par

$$C = \frac{1}{V} \int_{D_1} \varrho_s(\vec{r})\, ds \tag{4}$$

4. Calcul de la fonction de Green

La fonction de Green utilisée à l'équation (1) a été définie dans [1]. Elle peut être identifiée au potentiel dû à une charge unitaire dans une région où l'on a conservé les inhomogénéités diélectriques du problème initial mais où l'on a supprimé les

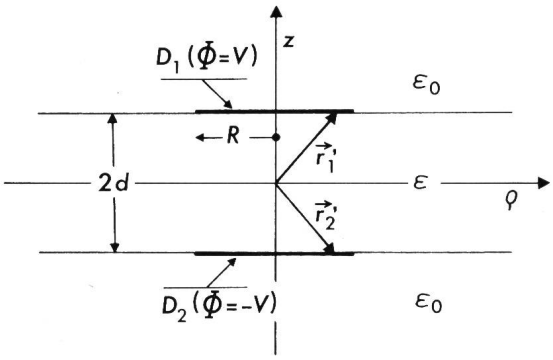

Fig. 2 Le problème équivalent
D_1 conducteur réel
D_2 conducteur image
Φ potentiel sur les conducteurs
ε_0, ε permittivités des milieux
$\vec{r}_1'$, $\vec{r}_2'$ vecteurs de position
R, d, z, ϱ voir fig. 1

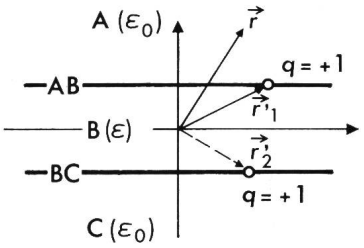

Fig. 3 Problèmes associés pour le calcul des fonctions de Green
A, B, C milieux diélectriques
AB, BC surfaces de séparation
q charge ponctuelle
$\vec{r}_1'$, $\vec{r}_2'$ vecteurs de position des charges
$\vec{r}$ point de calcul du potentiel

surfaces métalliques, Les conditions limites liées à ces dernières sont restituées en y supposant une densité de charge appropriée, calculée par l'équation (1).

Deux cas particuliers doivent être résolus avec la charge ponctuelle unitaire placée sur chacun des deux interfaces air-diélectrique (fig. 3). Les potentiels en $\vec{r}$ dûs à cette charge placée en $\vec{r}_1'$ ou $\vec{r}_2'$ représentent respectivement les fonctions de Green $G(\vec{r}, \vec{r}_1')$ et $G(\vec{r}, \vec{r}_2')$. Le calcul de ces potentiels est compliqué car il faut satisfaire aux conditions limites pour les champs $\vec{E}$ et $\vec{D}$ aux deux interfaces air-diélectrique. Il peut être effectué par l'emploi itératif de la méthode des charges images, souvent utilisée pour des configurations de ce type [2; 3].

On considère trois zones dans le problème (fig. 3): deux remplies d'air (A et C) et une de diélectrique (B). Le potentiel dans chaque zone est calculé comme solution d'un problème associé homogène, où tout l'espace est rempli du diélectrique propre de la zone, mais où la charge unitaire est remplacée par une suite de charges images dont les valeurs et les positions sont imposées par les conditions limites aux surfaces de séparation air-diélectrique.

On suppose d'abord que les potentiels dans les zones A et B peuvent être trouvés comme solutions des problèmes associés montrés dans la fig. 4. On a donc

$$\Phi_A = \frac{q_{0A}}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_1'|} \qquad \Phi_B = \frac{q_{0B}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r |\vec{r} - \vec{r}_1'|} \tag{5}$$

Or, le problème réel impose les conditions suivantes:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{S_A} \vec{D}_A \cdot \vec{ds} + \int_{S_B} \vec{D}_B \cdot \vec{ds} = q = 1 \\ &(\vec{E}_A - \vec{E}_B) \times \vec{a}_z = 0 \\ &(\vec{D}_A - \vec{D}_B) \cdot \vec{a}_z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Ces conditions ne sont vérifiées que si

$$q_{0A} = \frac{2}{1+\varepsilon_r} \qquad q_{0B} = \frac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r} \tag{7}$$

Il faut, d'autre part, trouver un problème associé pour la zone C, tel que les conditions limites à la surface de séparation BC soient vérifiées:

$$\left.\begin{aligned} &(\vec{E}_B - \vec{E}_C) \times \vec{a}_z = 0 \\ &(\vec{D}_B - \vec{D}_C) \cdot \vec{a}_z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Malheureusement un tel système n'existe pas et les conditions (8) ne peuvent être vérifiées que si l'on modifie le problème associé pour la zone B.

La figure 5 montre les trois problèmes associés dont celui de la zone B modifié par l'adjonction d'une charge $q_{0B'}$. Les potentiels sont maintenant

$$\begin{aligned} &\Phi_A = \frac{q_{0A}}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_1'|} \qquad \Phi_C = \frac{q_{0C}}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_1'|} \\ &\Phi_B = \frac{q_{0B}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r |\vec{r} - \vec{r}_1'|} + \frac{q_{0B}'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r |\vec{r} - \vec{r}_1' - 4d\vec{a}_z|} \end{aligned} \tag{9}$$

et les conditions (8) sont vérifiées avec

$$q_{0B}' = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \cdot q_{0B} \qquad q_{0C} = \frac{2}{\varepsilon_r + 1} \cdot q_{0B} \tag{10}$$

Par contre, les conditions (6) ne sont plus satisfaites et de nouvelles charges-images sont nécessaires dans les problèmes associés aux zones A et B, ces nouvelles charges empêchant de satisfaire (8). Le processus d'adjonction de charges-images se poursuit ainsi et on aboutit à trois suites infinies de charges images avec les propriétés (fig. 5):

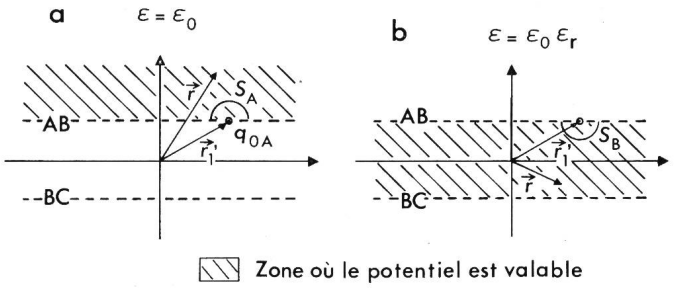

Fig. 4 Résolution par la méthode des images
q_{0A}, q_{0B} charges images
S_A, S_B surfaces hémisphériques
AB, BC, $\vec{r}_1'$, r voir fig. 3

Valeurs initiales avec $k = (\varepsilon_r - 1)/(\varepsilon_r + 1)$

$$q_{0A} = 1 - k,\ q_{0B} = 1 + k,\ q_{0B'} = (1 + k)k,\ q_{0C} = 1 - k^2 \quad (11)$$

– Loi de récurrence:

$$q_{jX} = k^2 \cdot q_{j-1,X},\ j > 0,\ X = A, B, B', C \qquad j = \text{entier} \quad (12)$$

– Position:

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_{jX'} &= \vec{\varrho}' + (1 - 4j) \cdot d \cdot \vec{a}_z,\ j > 0,\ X = A, B' \\ \vec{r}_{jX'} &= \vec{\varrho}' + (1 + 4j) \cdot d \cdot \vec{a}_z,\ j > 0,\ X = B, C \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

La fonction de Green est alors donnée par:

$$G(\vec{r}, \vec{r}_1') = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{q_{jA}}{|\vec{r} - \vec{r}_{jA}'|} & \vec{r} \in A \\[2ex] \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{q_{jB}}{|\vec{r} - \vec{r}_{jB}'|} + \sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{q_{jB'}}{|\vec{r} - \vec{r}'_{jB'}|} \right) & \vec{r} \in B \\[2ex] \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{q_{jC}}{|\vec{r} - \vec{r}_{jC}'|} & \vec{r} \in C \end{cases} \quad (14)$$

Toutefois, seule une de ces trois expressions est nécessaire, étant donné que, d'après l'équation (3), la fonction de Green ne doit être calculée que sur la surface de séparation AB. Il suffit donc de considérer la zone A ou la zone B la surface AB appartenant aux deux zones. Choisissant la zone A où $\vec{r} = \vec{\varrho} + d\,\vec{a}_z$, on trouve

$$G(\vec{r}, \vec{r}_1') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q_{jA}}{|(\vec{\varrho} - \vec{\varrho}') + 4j d\vec{a}_z|} \quad (15)$$

Le calcul de $G(\vec{r}, \vec{r}_2')$ est identique et on trouve finalement pour la fonction totale de Green

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{q_{jA}}{|(\vec{\varrho} - \vec{\varrho}') + 4j d\vec{a}_z|} - \frac{q_{jC}}{|(\vec{\varrho} - \vec{\varrho}') + (4j + 2)\, d\vec{a}_z|} \right] \qquad \vec{\varrho}, \vec{\varrho}' \in \boldsymbol{D}_1 \quad (16)$$

qu'on écrit d'une façon abrégée

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, g(\vec{\varrho}, \vec{\varrho}') \quad (17)$$

5. Solution de l'équation intégrale

L'équation intégrale (3) est résolue par la méthode des moments, souvent employée pour ce type de problèmes [2; 4]. On ne donne ici qu'un bref aperçu de l'application particulière de la méthode, la théorie générale pouvant être trouvée dans des ouvrages spécialisés [5].

On commence par postuler pour l'inconnue ϱ_s un développement du type

$$\varrho_s = \varrho_0 \sum_{j=1}^{N} \alpha_j f_j(\varrho') \quad (18)$$

où la dépendance de ϱ_s avec la seule coordonnée ϱ' est mise en évidence. Les α_j sont des coefficients sans dimensions à déterminer et les N fonctions f_j indépendantes et sans dimension appartiennent à un ensemble complet dit «de base». Avec ce développement et l'équation (17), l'équation (3) devient

$$\frac{4\pi\varepsilon_0 V}{\varrho_0} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \int_{D_1} g(\vec{\varrho}, \vec{\varrho}')\, f(\varrho')\, ds' \quad (19)$$

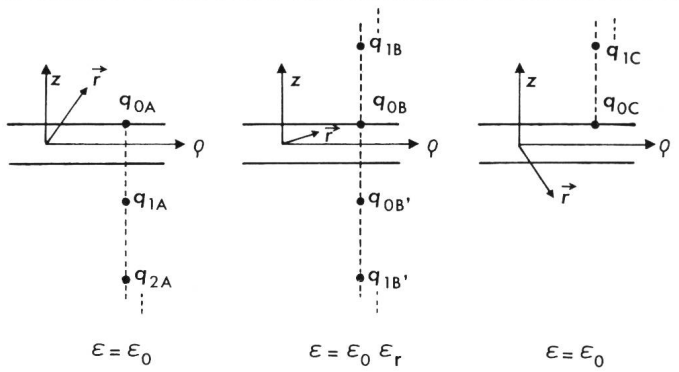

Fig. 5 Suites complètes d'images pour les trois zones
q_{jA}, q_{jB}, q_{jB}', q_{jC} charges images
$\vec{r}$ point de calcul du potentiel
z, ϱ coordonnées cylindriques

On définit ensuite un produit interne de fonctions, noté $< f_1, f_2 >$, par

$$< f_1, f_2 > = \int_{D_1} f_1 f_2\, ds \quad (20)$$

L'équation est alors résolue en employant un nouvel ensemble de N fonctions $W_i(\vec{\varrho})$ appelées fonctions de test. En faisant le produit interne de (19) avec chaque fonction W_i on transforme l'équation intégrale en un système de N équations linéaires:

$$\begin{aligned} &\frac{4\pi\varepsilon_0 V}{\varrho_0} \int_{D_1} W_i(\vec{\varrho})\, ds = \\ &= \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \int_{D_1}\int_{D_1} W_i(\vec{\varrho})\, f_j(\varrho')\, g(\vec{\varrho}, \vec{\varrho}')\, ds\, ds', \qquad i = 1, 2 \ldots N \end{aligned} \quad (21)$$

qui peut être résolu par des techniques classiques.

6. Choix des fonctions de base et de test

Au point de vue pratique, ce choix doit être guidé par les considérations suivantes:

– L'ensemble de base doit être capable de fournir une bonne représentation de la fonction inconnue ϱ_s avec un nombre restreint de fonctions f_j.

– Les fonctions f_j et W_i doivent être assez simples pour permettre un calcul facile des termes de l'équation (21).

– La matrice obtenue par l'équation (21) doit être bien adaptée à une inversion numérique. C'est le cas si les ensembles de base et de test sont proches de l'orthogonalité du point de vue du produit interne considéré [5].

Compte tenu de ces remarques, on a choisi

$$W_i = \delta(\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_i),\ \vec{\varrho}_i = \frac{i - 1}{N - 1}\, R\, \vec{a}_\varrho \quad (22)$$

où δ est la fonction de Dirac. Ce choix simplifie sensiblement l'équation (21) qui devient

$$\frac{4\pi\varepsilon_0 V}{\varrho_0} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \int_{D_1} f_j(\varrho')\, g(\vec{\varrho}_i, \vec{\varrho}')\, ds', \qquad i = 1, 2 \ldots N \quad (23)$$

Une simplification ultérieure est possible si l'on introduit les variables normalisées

$$\vec{\gamma} = \vec{\varrho}/R, \quad \vec{\gamma}' = \vec{\varrho}'/R \tag{24}$$

et si l'on adopte comme potentiel de référence

$$V = \frac{\varrho_0 R}{4\pi\varepsilon_0} \tag{25}$$

Le système normalisé s'écrit alors

$$1 = \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\, \alpha_j, \qquad i = 1, 2 \ldots N \tag{26}$$

où

$$c_{ij} = \int_0^{2\pi}\int_0^{1} f_j(\gamma)\, g(\vec{\gamma}, \vec{\gamma}')\, \gamma'\, d\gamma'\, d\varphi' \tag{27}$$

En faisant usage de (4) et de (25) la capacité devient

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{R} \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \int_{D_1} f_j(\varrho)\, ds \tag{28}$$

et après normalisation

$$C_N = \frac{C}{R} = 8\pi^2\varepsilon_0 \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \int_0^1 f_j(\gamma)\, \gamma\, d\gamma \tag{29}$$

Quant aux fonctions de base, le choix s'est porté sur des fonctions triangulaires, à l'exception de f_N qui tient compte de la conduite asymptotique de ϱ_s sur le bord du disque [6]:

$$\lim_{\gamma\to 1} \varrho_s(\gamma) = \lim_{\gamma\to 1} (1-\gamma)^{-\beta}, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sin^{-1}\frac{\varepsilon_r - 1}{2\varepsilon_r + 2} \tag{30}$$

On prend donc, avec $\gamma_0 = 1/(N-1)$,

$$f_N(\gamma) = \begin{cases} [\gamma - (N-2)\,\gamma_0]\,(1-\gamma)^{-\beta} & \text{pour } (N-2)\gamma_0 < \gamma < 1 \\ 0 & \text{pour } \gamma < (N-2)\gamma_0 \text{ et } \gamma > 1 \end{cases} \tag{31}$$

Les expressions analytiques des autres fonctions f_i peuvent être trouvées d'après la fig. 6.

7. Détails du calcul

Les intégrales à évaluer numériquement sont données par les formules (27), (29). Les expressions (27) sont des intégrales doubles avec $g(\vec{\varrho}_i, \vec{\varrho}')$ dépendant de ϱ' et de φ par la relation

$$\left|\vec{\varrho}_i - \vec{\varrho}'\right| = \sqrt{\varrho_i^2 + \varrho'^2 - 2\,\varrho'\varrho_i \cos\varphi} \tag{32}$$

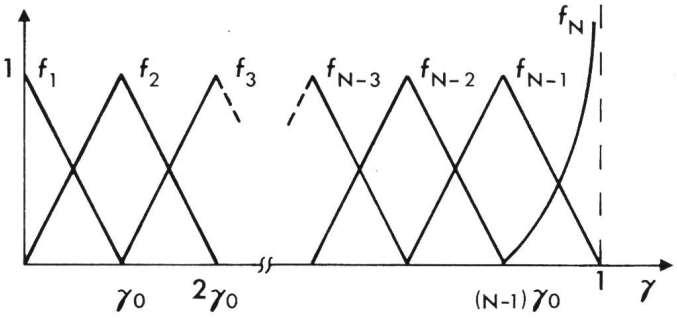

Fig. 6 Ensemble de fonctions de base
γ coordonnée normalisée
$\gamma_0 = 1/(N-1)$
f_j fonctions de base

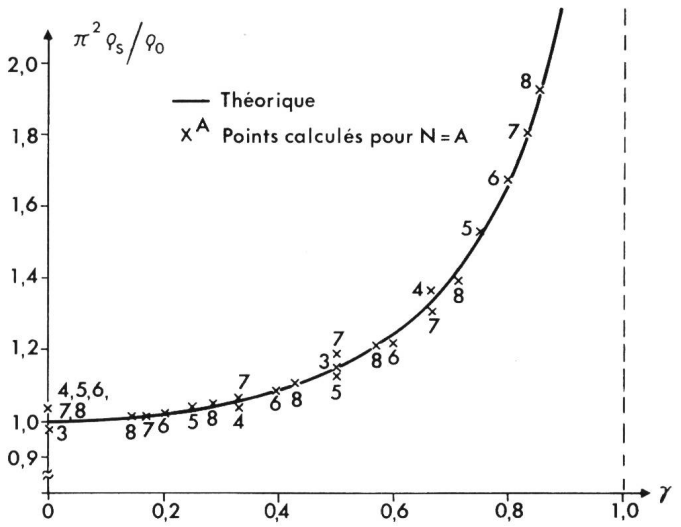

Fig. 7 Densité de charge sur un disque isolé
γ rayon normalisé
$\pi^2\varrho_s/\varrho_0$ densité de charge normalisée

Par ailleurs, elles présentent toujours un point singulier pour $\vec{\varrho}' = \vec{\varrho}_i$ et, lorsque $j = N$, une ligne singulière pour $\left|\vec{\varrho}'\right| = R$.

Une méthode numérique particulière a dû être mise au point pour ce type d'intégration basée dans une quadrature bidimensionnelle de Gauss-Tchebycheff [7]. Par contre, les intégrales (29) peuvent être résolues analytiquement à l'exception du cas $j = N$ où une quadrature standard de Tchebycheff a été employée.

Une part importante du calcul devant être consacrée à l'évaluation de la fonction de Green, on a porté une attention toute particulière à l'étude de l'erreur introduite en tronquant la série de $g(\vec{\varrho}, \vec{\varrho}')$. Si on appelle $g_n(\vec{\varrho}, \vec{\varrho}')$ la série tronquée du $n^{\text{ième}}$ terme, on trouve que l'erreur augmente avec ε_r et le rapport $\left|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}'\right|/d$, g_n pouvant même devenir négatif. En fait, pour $n > 25$ seulement, l'erreur relative moyenne entre g et g_n reste au-dessous de 1%.

Cependant, cette limite d'erreur peut être atteinte avec seulement $n = 5$, ce qui épargne un temps de calcul considérable, si on emploie comme fonction de Green approchée

$$g_n^*(\vec{\varrho}, \vec{\varrho}') = g_n(\vec{\varrho}, \vec{\varrho}') + \left| g(\vec{\varrho}, \vec{\varrho}') - g_n(\vec{\varrho}, \vec{\varrho}') \right|_{\left|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}'\right| = R} \tag{33}$$

Cette fonction est tabulée au début du programme comme une fonction de $\mu = \left|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}'\right|$, $0 < \mu < R$, pour 500 valeurs de μ, plus concentrées aux environs de $\mu = 0$ où la variation de g_n^* est plus rapide. Ces valeurs sont alors emmagasinées et la fonction de Green calculée chaque fois par interpolation non linéaire.

Finalement, l'inversion matricielle est faite avec un algorithme standard de Gauss-Jordan [7].

8. Résultats

Pour vérifier l'exactitude des techniques numériques on a résolu d'abord un cas théorique dont la solution est connue: le disque isolé dans le vide [8]. Dans ce cas on a simplement

$$g(\vec{\varrho}, \vec{\varrho}') = \frac{1}{\left|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}'\right|} \tag{34}$$

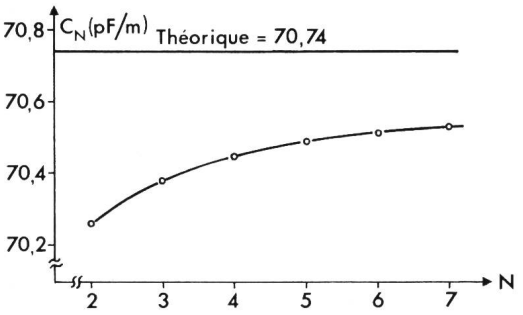

Fig. 8 Capacité d'un disque conducteur isolé
N nombre de fonctions de base
C_N capacité normalisée par rapport au rayon

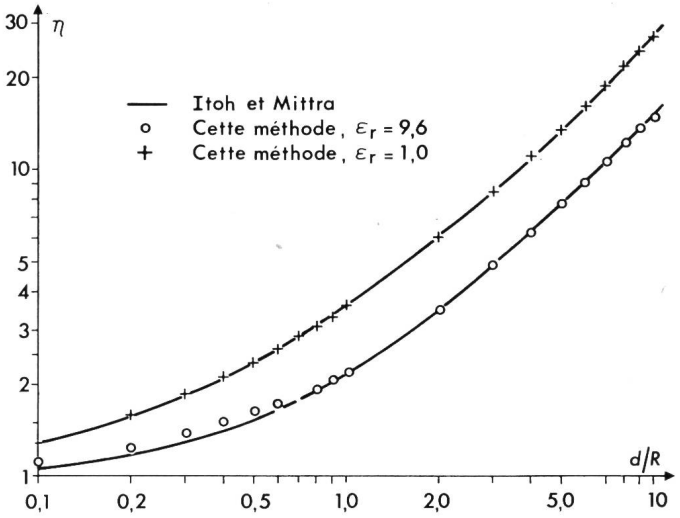

Fig. 9 Résultats pour le disque sur microruban
η (Capacité calculée) / (Capacité du condensateur plan du même rayon)
d épaisseur du substrat
R rayon du disque

et on trouve théoriquement avec le potentiel de référence (25)

$$\frac{\varrho_s}{\varrho_0} = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-\gamma^2}}, \quad C_N = 8\varepsilon_0 = 70.74 \text{ pF/m} \tag{35}$$

Les résultats obtenus avec cette méthode sont présentés dans les figures 7 et 8. On remarque que la valeur de la capacité obtenue pour N = 3 a déjà une précision supérieure à 1%, tandis qu'une extrapolation de Aitken basée sur les valeurs N = 3, 4, 5 donne une erreur de 0,3%. On peut donc s'attendre à trouver des résultats très précis dans le problème réel avec des valeurs faibles de N et une extrapolation finale. Des valeurs extrapolées à partir des cas N = 3, 4, 5 pour le quotient $\eta = C_N/C_p$, où C_p est la capacité normalisée d'un condensateur plan, $C_p = \varepsilon\pi R/d$, sont données dans la fig. 9, pour deux valeurs de la permittivité $\varepsilon_r = 9{,}6$ et $\varepsilon_r = 1{,}0$.

L'exactitude de ces résultats est mise en évidence en les comparant avec ceux obtenus par Itoh et Mittra [9] par une autre méthode, plus complexe, basée sur l'analyse dans le domaine spectral.

9. Conclusions

Une méthode de calcul numérique a été présentée pour l'étude du disque en microruban. Basée sur la notion de fonction de Green, elle a l'avantage d'être simple du point de vue mathématique et relativement générale dans ses applications. La précision ne dépend en effet pas des valeurs des paramètres ε_r et d/R.

La densité de charge est obtenue sous une forme analytique très utile pour des applications ultérieures. Quant à la capacité, sa valeur converge très rapidement avec N ce qui permet d'obtenir des résultats exacts avec seulement 15 s de calcul sur ordinateur CDC Cyber pour chaque paire de valeurs ε et d/R.

Bibliographie

[1] *J. R. Mosig* et *M. C. Decreton:* Lignes microruban et fonctions de Green. Bull. ASE/UCS 68(1977)8, p. 391...395.
[2] *P. Silvester:* TEM wave properties of microstrip transmission lines. Proc. IEE 115(1968)1, p. 43...48.
[3] *A. Farrar* and *A. T. Adams:* Matrix methods for microstrip three-dimensional problems. Trans. IEEE MTT 20(1972)8, p. 497...504.
[4] *T. Itoh* and *R. Mittra:* Spectral-domain approach for calculating the dispersion characteristics of microstrip lines. Trans. IEEE MTT 21(1973)7, p 496...499.
[5] *R. F. Harrington:* Field computation by moment methods. New York, Macmillan/London, Collier-Macmillan, 1968
[6] *R. Mittra* and *S. W. Lee:* Analytical techniques in the theory of guided waves. New York, Macmillan, 1971.
[7] *A. Ralston:* A first course in numerical analysis. New York, McGraw-Hill, 1965.
[8] *J. A. Stratton:* Electromagnetic theory. New York/London, McGraw-Hill, 1941.
[9] *T. Itoh* and *R. Mittra:* A new method for calculating the capacitance of a circular disk for microwave integrated circuits. Trans IEEE MTT 21(1973)6, p. 431...432.

Adresse de l'auteur

Juan R. Mosig, Chaire d'Electromagnétisme et d'Hyperfréquences EPFL, 16, Chemin de Bellerive, 1007 Lausanne.