

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen = Bulletin de l'Association suisse des électriciens, de l'Association des entreprises électriques suisses

**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen

**Band:** 67 (1976)

**Heft:** 8

**Artikel:** Quasistatische H-B-Trajektorien beim Eisen

**Autor:** Gerecke, E.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-915155>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Quasistatische H-B-Trajektorien beim Eisen

Von E. Gerecke

621.318.4.042.2:537.623

Es wird über Versuche an luftspaltlosen Ringbandkernen aus kornorientiertem Silizium-Eisen-Blech von der Qualität, die für Transformatoren verwendet wird, berichtet. Die geometrischen Eigenschaften von unsymmetrischen Hystereseschleifen werden bei beliebigen, zeitlich sehr langsam veränderlichen Magnetisierungsströmen beschrieben und ein «Rückkehrsatz» formuliert. Die Umlaufzeit einer geschlossenen Schleife liegt zwischen 1 min und 1 h. Zum Schluss werden kurz die durch Kriechen sowie rasche Stromvariationen hervorgerufenen Abweichungen gestreift.

Des tores sans entre-fer en alliage au Fer-Silicium, orienté et laminé à froid, d'une qualité identique à celle utilisée pour les transformateurs de puissance, font l'objet d'essais. On étudie quelques propriétés géométriques des boucles asymétrique d'hystérèse magnétique dans le fer soumis à des courants magnétisants variant arbitrairement et très lentement. On formule également un théorème sur le retour conditionné au point de départ. Le temps de circulation dans une boucle varie entre 1 min et 1 h. Pour terminer on mentionne brièvement l'influence de la dérive magnétique du fer ainsi que les écarts provoqués par des variations rapides du courant.

## 1. Aufbau und Schema der Versuchsanlage

Für die Versuche wurde ein luftspaltfreier, gewickelter Ringbandkern aus 0,3 mm starkem, kaltgewalztem, kornorientiertem Textur- $\alpha$ -Eisen mit etwa 3 % Siliziumgehalt (ARMCO M5 und Trafoperm N2 der VAC) verwendet [1, S. 24]<sup>1)</sup>. Die Quelle  $u_q$  (Fig. 1) lieferte rampen- und dreieckförmige Spannungen von etwa 0,01 Hz. Zufolge der Weisschen Bezirke schwankt die örtliche Flussdichte über dem Eisenquerschnitt sehr stark, deren Mittelwert  $B$  ist proportional zum Integral  $\int u_2 dt$  der induzierten Spannung  $u_2$ . Die mittlere Erregung  $H = N_1 \cdot l_1^{-1} \cdot i(t)$  bezieht sich auf die Mitte des Kernes, wobei  $l$  die mittlere Länge des Kernes bedeutet. Der x-y-Schreiber zeichnet bei sehr langsam sich veränderndem Strom  $i(t)$  quasistatische H-B-Trajektorien.

## 2. Definitionen

Der momentane (mittlere) Zustand des Kernes kann durch einen Bildpunkt  $P(H, B)$  in einer H-B-Ebene dargestellt werden. Bei sehr langsam sich änderndem Strom  $i(t)$  beschreibt  $P$  eine quasistationäre Trajektorie  $T$ , deren Durchlaufsin durch einen Pfeil gekennzeichnet wird. Geht  $i(t)$  durch ein Maximum oder ein Minimum, so zeigt die Trajektorie eine Spitze oder einen Umkehrpunkt. Es ist zweckmässig, Aufwärts- und Abwärtstrajektorien zu unterscheiden, je nachdem  $di/dt$  positiv oder negativ ist.

<sup>1)</sup> Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

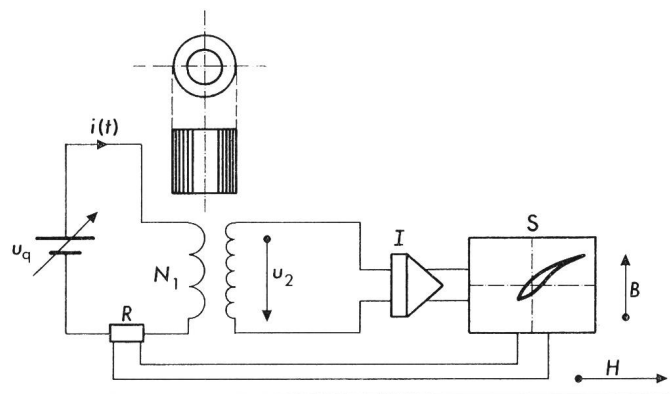


Fig. 1 Anlagenschema

- $u_q$  variable Spannungsquelle
- $N_1$  Anzahl Windungen der Erregerwicklung
- $i(t)$  Erregerstrom
- $R$  Messwiderstand
- $u_2$  sekundär induzierte Spannung
- $I$  Integrator
- $S$  Koordinatenschreiber
- $H$  Erregung
- $B$  Flussdichte

## 3. Ideales Eisen

Die zugehörige äusserste Trajektorie (Fig. 2) hat zwei nahezu senkrechte Flanken UV,  $U^*V^*$  und zwei horizontale Äste  $VEU^*$  und  $V^*E^*U$  [1, S. 10]. Die Koerzitiverrückung  $H_c$  liegt beim Monokristall aus Silizium- $\alpha$ -Eisen bei etwa 1 A/m. Überschreitet im Punkt U die Erregung  $H$  den Wert  $H_c$  ganz wenig, so wandern im Eisenkern die Blochwände von aussen nach innen. Reduziert man im Bildpunkt 1 den Strom  $i(t)$  bis  $1'$ , und erhöht man ihn wieder bis 1, so stehen die Blochwände dabei still und die Trajektorie ist eine horizontale Gerade. Ähnlich verhält sich die Trajektorie 2-2'-2. Bei der Trajektorie 3-3' muss man  $H$  von  $-H_c$  bis  $+H_c$  und bei 4-4' von  $+H_c$  bis  $-H_c$  ändern. Durch Kombination erhält man die geschlossenen Schleifen 3-3'-4-4'-3, sowie  $V-U^*-3-3'-V$  und  $U-4-4'-V^*-U$ .

Bei technischem Eisen gehen die Trajektorien 1-1'-1 sowie 2-2'-2 in flache krummlinige Zweiecke (oder Zweiseite) und die Fig. 2 in Fig. 3 über.

## 4. Experimentelle Resultate

Fig. 3 zeigt zwei bezüglich des Mittelpunktes M zentrisch-symmetrische, geschlossene Trajektorien 1-T<sub>1</sub>-1\*-T<sub>1</sub>\*-1 und 2-T<sub>2</sub>-2\*-T<sub>2</sub>\*-2. Deren Umkehrpunkte 1, 1\* und 2, 2\* liegen auf der Kommutierungs- (oder Spitzen-)Kurve K-M-K\*. Verlegt man den Punkt 1 bis zum Punkt E mit der höchst erreichbaren Erregung  $H_E$ , so erhält man die zugehörigen Grenztrajektorien mit dem linken Ast  $G_1$ :  $E-R_0-G_1-H_c^*-E^*$  und dem rechten Teil  $E^*-R_u-G_r-H_c-E$ .

Geht man von beliebigen, auf  $T_1$  gelegenen Bildpunkten wie 3 oder 4 wieder nach rechts, so gelangt man über  $T_3$  bzw.  $T_4$  zurück nach 1. Kommutiert man ferner in einem beliebigen Bildpunkt P auf  $T_4$  den Strom, so gelangt man über die zugehörige Trajektorie  $T_4^*$  in den Ausgangspunkt 4 zurück, folgt dann  $T_1$  bis  $1^*$  und hernach ungefähr der Kommutierungskurve  $K^*$  bis  $E^*$ . Diese Trajektorie von P bis  $E^*$  weist zwei Knickpunkte 4 und  $1^*$  auf; dort ändert sich die Tangente und damit auch die differentielle Permeabilität ( $dB/dH$ ) unstetig. Kommutiert man  $i(t)$  in einem beliebigen Punkt 5 auf  $T_4^*$ , so gelangt man über  $T_5$  abermals nach P. Auf  $T_2$  existiert ein Punkt 6 derart, dass dessen Aufwärtstrajektorie  $T_6$  genau durch P geht. Auf der Grenztrajektorie  $G_r$  gibt es zudem einen Punkt 7 so, dass dessen Abwärtstrajektorie  $T_7$  ebenfalls durch P geht; die zugehörige Aufwärtstrajektorie  $T_7^*$  endet wieder in 7. Durch jeden Bildpunkt P innerhalb der Grenztrajektorien gehen also unendlich viele quasistatische Trajektorien; sie verlaufen in den zu P gehörigen 1. und 3. Quadranten. Die differentielle Permeabilität dieser Trajektorien in P ist stets positiv

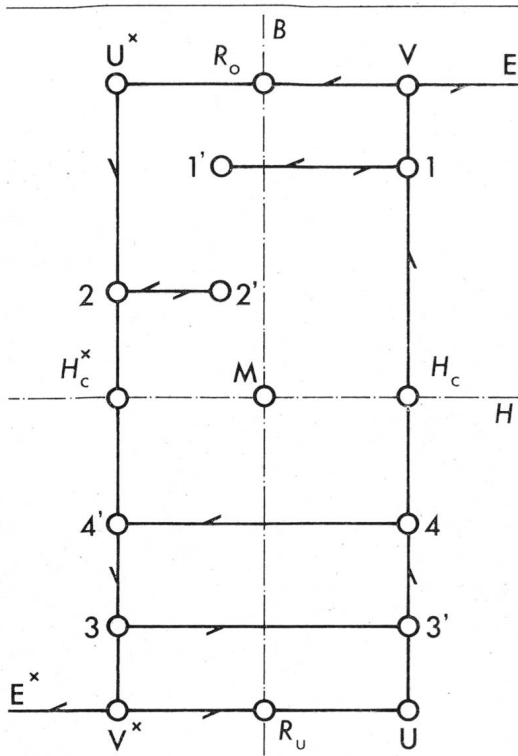


Fig. 2 H-B-Schleifen von idealem monokristallinem Eisen

$H$	Erregung
$B$	Flussdichte
$R_0, R_u$	Oberer, bzw. unterer Remanenzpunkt
$H_c$	Koerzitivverregung
$U, V, U^*, V^*$	äußerste Hystereseschleife
$E, E^*$	äußerste Bildpunkte
$1-1'-1, 2-2'-2$	kleine Schleifen
$3-3'-4-4'-3$	mittlere Schleife

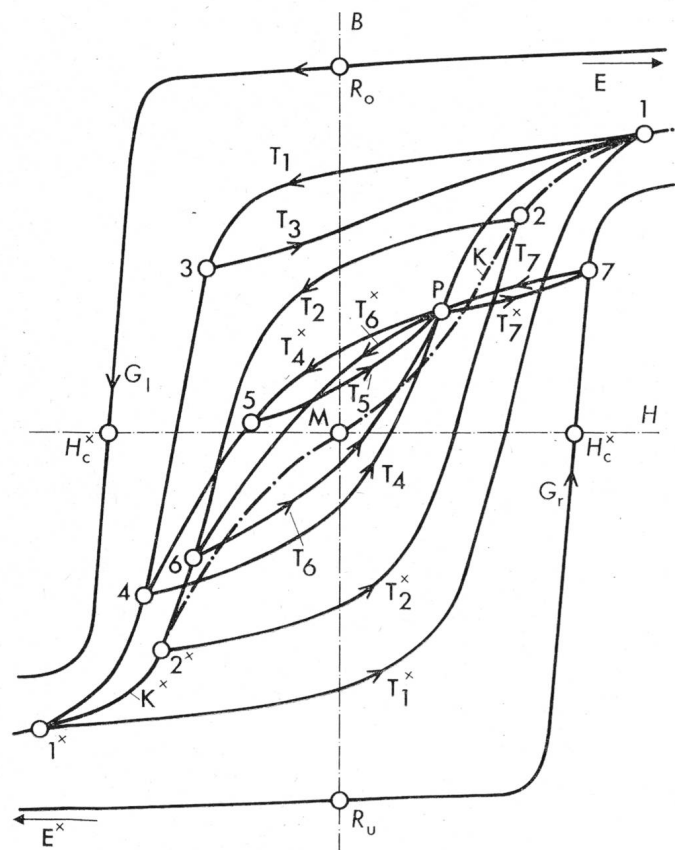


Fig. 3 H-B-Trajektorien von technischem Eisen  
Symmetrische und unsymmetrische Schleifen  
Bezeichnungen siehe im Text

und liegt zwischen einem unteren und einem oberen Grenzwert. Zweiseitig geschlossene Schleifen wie P-4, P-5, P-6 und P-7 können beliebig oft durchlaufen werden, man kehrt immer wieder zu den gleichen Umkehrpunkten zurück. Geht man jedoch z. B. von P über 4 nach 1\* und kommutiert dann, so erreicht man P nicht mehr, offenbar weil man den Knickpunkt 4 passiert hat.

## 5. Schlussfolgerungen

Aus dem Vorhergehenden ergeben sich folgende Schlüsse:

1. Durch jeden innerhalb der Grenztrajektorien gelegenen Bildpunkt  $P(H, B)$  gehen unendlich viele quasistatische Trajektorien; sie verlaufen im ersten und dritten Quadranten des Koordinatensystems mit Ursprung P.

2. Die differentielle Permeabilität ( $dB/dH$ ) ist bei quasistatischen Trajektorien stets positiv und liegt in jedem Bildpunkt zwischen 2 Grenzwerten.

3. Bildpunkte  $P(H, B)$  ausserhalb der Grenztrajektorien sind nicht erreichbar.

4. Die Umkehrpunkte symmetrischer Trajektorienschleifen liegen auf einer Kommutierungskurve (Spitzenkurve). Diese kann von der Neukurve abweichen.

5. Trajektorien können Knickpunkte aufweisen, bei denen sich die differentielle Permeabilität unstetig ändert [1, S. 33].

6. Gelangt man bei zunehmendem Strom zu einem Bildpunkt  $P_1$ , kommutiert man alsdann den Strom bis man einen Punkt  $P_2$  erreicht hat und erhöht man diesen wieder, so gelangt man zu  $P_1$  zurück, falls man keinen Knickpunkt passiert hat (Rückkehrsatz) [1, S. 31].

## 6. Beispiele zum Rückkehrsatz

In Fig. 4 geht man von einem beliebigen Bildpunkt P sehr langsam abwärts bis 1, dann wieder aufwärts bis P, dann abwärts bis 2 und zurück bis P und wiederholt diesen Vorgang bis Punkt 14. Man gelangt dabei stets in den Umkehrpunkt P zurück.

In Fig. 5 [1, S. 34] startet man vom unteren Remanenzpunkt  $R_u$  aufwärts, reduziert dann  $i(t)$  langsam auf Null, erhöht  $i(t)$  wieder und wiederholt dieses Spiel abwechselungsweise. Man gelangt dabei stets wieder auf die Grenztrajektorie  $G_r$ .  $H_c$  beträgt hier 7,5 A/m. Man vergleiche diese Trajektorien mit denen des idealen Eisens von Fig. 2.

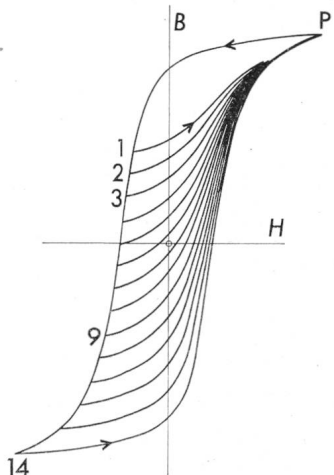
## 7. Dynamische Trajektorien

Befindet sich allgemein ein System zur Zeit  $t_1$  in einem stationären Zustand I und zur Zeit  $t_2$  in einem stationären Zustand II, so durchläuft es zwischen  $t_1$  und  $t_2$  einen transienten Vorgang. Ist z. B. bei  $t_1$  der Strom  $i = i_1$  konstant und bei  $t_2$   $i = i_2$  konstant, so kann der Übergang von  $i_1$  zu  $i_2$  sehr langsam, also quasistatisch oder sehr rasch, also dynamisch vorgenommen werden; je nachdem ergibt sich eine quasistatische oder dynamische H-B-Trajektorie. Es zeigt sich nun beim System «Eisen», dass sich der gewünschte stationäre Zustand II gar nicht sofort einstellt, es kann Sekunden oder Stunden oder Jahre benötigen. Denn das Eisen besteht aus rund  $10^{29}$  m<sup>-3</sup> Elementarmagneten (spin), und es dauert sehr lange, bis alle die endgültige Lage erreicht haben. Diese Erscheinung ist schon lange als Kriechen oder magnetische Nachwirkung bekannt [1, S. 20], sie muss bei den vorhergehenden Abschnitten 3 und 4 mitberücksichtigt werden.

Fig. 4

**Beispiel zum Rückkehrsatz**

Beginn in Punkt P; von P nacheinander abwärts bis zu den Punkten 1...14 und zurück. Dabei gelangt man stets zum Ausgangspunkt P zurück.



Ist beim Zustand II  $i(t)$  eine periodische Funktion der Zeit, so durchläuft die dynamische  $H$ - $B$ -Trajektorie eine Reihe von nicht ganz geschlossenen Schleifen, die dauernd wandern und sich erst nach 10...100 oder mehr Perioden in einen nahezu stationären Zustand einspielen, wie das folgende Beispiel zeigt.

Startet man nach Fig. 6 vom unteren Remanenzpunkt  $R_u$  mit einer sinusförmigen Erregung  $H_0 \sin \omega t$  kleiner Frequenz, so gelangt man zunächst längs  $G_r$  zu Punkt 1, dann längs der zu 1 zugehörigen statischen Abwärtstrajektorie  $T_1$  nach Punkt 2 und anschliessend laut dem Rückkehrsatz nach 1 zurück. Dann verschiebt sich die Schleife 1-2 beim vielmahligen Durchlaufen kaum merklich [1, S. 36]. Wiederholt man den Vorgang jedoch stundenlang, so hebt sich die Schleife langsam an und gelangt über die Zwischenlagen 3-4 schliesslich in die stationäre Lage 5-6, wobei die Spitzen symmetrisch zum Mit-

telpunkt M auf der Kommutierungslinie  $KK^*$  liegen. Beginnt man beim oberen Remanenzpunkt  $R_o$ , so verschiebt sich die Schleife langsam abwärts bis in die Endlage 5-6. Solch langsame Kriechvorgänge sind schon vielfach beobachtet worden, z. B. bei Messinstrumenten und bei Pupinspulen nach Stromstössen.

Bei dynamischen Vorgängen sind die Schlussfolgerungen von Abschnitt 5 wie folgt zu ändern:

3\* Dynamische Trajektorien können sehr wohl ausserhalb der Grenztrajektorien verlaufen.

1\* Durch jeden erreichbaren  $H$ - $B$ -Bildpunkt gehen unendlich viele dynamische Trajektorien; sie können dort in allen Quadranten verlaufen.

2\* Die differentielle Permeabilität ( $dB/dH$ ) bei dynamischen Trajektorien kann jeden Wert zwischen  $(-\infty)$  und  $(+\infty)$  annehmen.

4\* Bei Extremwerten von  $i(t)$  verläuft die Trajektorie senkrecht. Bei dynamischen symmetrischen Trajektorien liegen die Bildpunkte mit extremalem  $H$  nicht mehr genau auf der Kommutierungskurve  $KK^*$ .

6\* Der Rückkehrsatz gilt nur noch näherungsweise.

Die Neukurve ist eine dynamische Trajektorie, sie kann ja jeweils nur einmal durchlaufen werden. Sie kann sogar die Grenztrajektorien überqueren.

**Literatur**

- [1] E. Gerecke: Ferromagnetophysik. Scientia Electrica 19(1973)3, S. 57...96, 20(1974)1, S. 1...47 + Nr. 2, S. 49...80 + Nr. 3, S. 81...110.

**Adresse des Autors**

Prof. Dr. h. c. Ed. Gerecke, ETHZ-ETL Physikstrasse 3, 8006 Zürich.

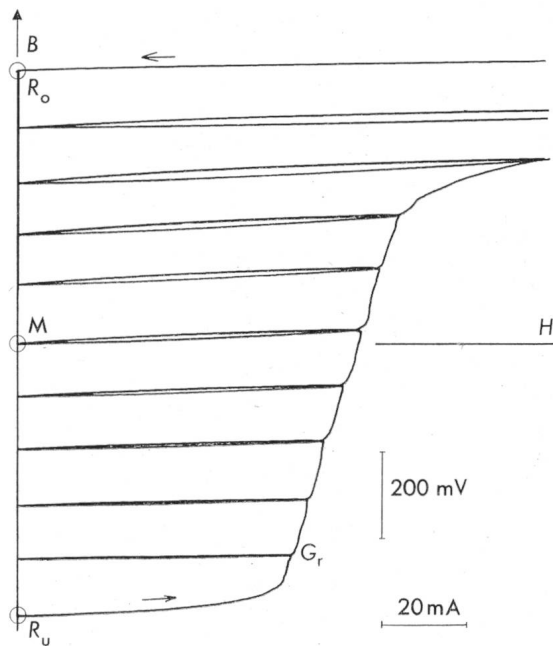


Fig. 5 Linsenförmige Schleifen

Beginn im unteren Remanenzpunkt  $R_u$ . Fortschreiten längs der Grenztrajektorie  $G_r$ . Dabei mehrmals Reduktion von  $i(t)$  bis Null und jeweils anschliessende Erhöhung von  $i(t)$ .  
ARMCO M5. [1, S. 34, Fig. C 10]  
Abszisse  $H$ : 20 mA  $\triangleq$  1,91 A/m,  $H_0 = 7,5$  A/m  
Ordinate  $H$ : 200 V  $\triangleq$  0,5 Tesla,  $B_u/B_0 = 3,06$  Tesla

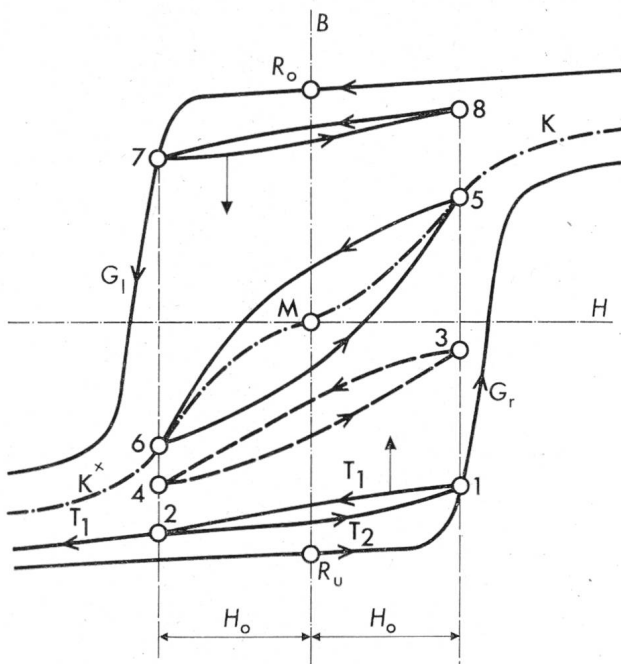


Fig. 6 Kriechen der  $H$ - $B$ -Schleifen bei periodischem Strom  $i(t)$

Beginn in  $R_u$ , dann nach 1. Zu 1 gehörende statische Abwärtstrajektorie  $T_1$ . Schleife 1- $T_1$ -2- $T_2$ -1. Schleife 3-4 in einer späteren Zwischenlage. Stationäre Schleife 5-6-5 mit Umkehrpunkten auf der Kommutierungskurve  $K$ - $M$ - $K^*$ . Obere anfängliche Schleife 7-8-7.