

<b>Zeitschrift:</b>	Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen = Bulletin de l'Association suisse des électriciens, de l'Association des entreprises électriques suisses
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen
<b>Band:</b>	66 (1975)
<b>Heft:</b>	16
<b>Artikel:</b>	Zur Berechnung des Kapazitätsbelags von Streifenleitungen mit Teilflächenmethode
<b>Autor:</b>	Arndt, F.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-915306">https://doi.org/10.5169/seals-915306</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Zur Berechnung des Kapazitätsbelags von Streifenleitungen mit der Teilflächenmethode

Von F. Arndt

Die Kapazitätsbeläge von Streifenleitungen werden mit Hilfe der Teilflächenmethode berechnet, wobei durch eine optimale Teilstreckenunterteilung der Fehler minimal wird. Es wird eine obere und eine untere Fehlerschranke festgelegt, die sich einfach aus dem Potentialverlauf ermitteln lässt. Weiter wird ein Näherungsausdruck zur Fehlerabschätzung angegeben.

621.372.821 : 621.3.054

Les capacités linéaires de canalisations en bande sont calculées en appliquant la méthode des aires partielles, l'erreur étant rendue minimale par une subdivision optimale des sections partielles. Les limites supérieure et inférieure d'erreur peuvent être facilement déterminées d'après la variation du potentiel. L'auteur indique en outre une formule approchée pour l'estimation de l'erreur.

## 1. Einführung

Nur in Sonderfällen ist die Berechnung der Kapazität durch exakte mathematische Methoden möglich. «Exakt» heisst dabei: Die Lösung ist vollständig durch einen in der Mathematik definierten Ausdruck darstellbar. Diese Ausdrücke (z. B. elliptische Integrale) sind jedoch in vielen Fällen nur in tabellierter Form bzw. nur durch numerische Integration zugänglich. Aus diesen beiden Gründen interessieren sehr oft Näherungsverfahren.

In dieser Arbeit wird als Näherungsverfahren die Teilflächenmethode, z. B. [1...9]<sup>1</sup>), benutzt, um den Kapazitätsbelag von Streifenleitungen zu berechnen. Eine Streifenleitung ist hier eine Anordnung von Leitern mit polygonaler Randkurve zwischen parallelen leitenden Ebenen (Fig. 1). Die Teilflächenmethode besitzt gegenüber anderen Näherungsverfahren folgende Vorteile:

1. Es werden nur die Ladungen auf der Leiteroberfläche und nicht das gesamte Feld approximiert (wie z. B. bei der Methode der finiten Differenzen), das man zur Kapazitätsberechnung nicht unmittelbar benötigt. Dadurch hält sich der numerische Aufwand in engen Grenzen.

2. Die Teilflächenmethode ist für jeden Geometrie-Grundtyp verwendbar, für den die Greensche Funktion angebbar ist. Ausgehend von diesem Grundtyp (z. B. Linienladung zwischen zwei leitenden Ebenen) kann die Geometrie der zu untersuchenden Leiteranordnung in weiten Grenzen verändert werden (z. B. Mehrfachleitungen mit polygonaler Leiterberandung zwischen zwei leitenden Ebenen), ohne dass neue Ansätze getroffen werden müssen.

3. Die Teilflächenmethode konvergiert sehr gut. Bereits mit wenigen Teilflächen pro Leiteroberfläche sind Fehler unter 1% erreichbar.

Ziel dieser Arbeit ist weiter, durch Approximation des Ladungsbelags mit einer Treppenfunktion ungleicher Stufenbreite den Fehler bei gegebener Stufenzahl zu optimieren. Da bei einem Näherungsverfahren eine Fehlerabschätzung wichtig ist, wird gezeigt, dass man eine obere und eine untere Fehlerschranke sehr einfach, nämlich direkt aus dem Potentialverlauf, ermitteln kann. Darüber hinaus wird ein Näherungsdruk zur Fehlerabschätzung angegeben, der nahe bei dem wirklichen Fehler liegt.

## 2. Teilflächenmethode

Die Teilflächenmethode ist bereits ausführlich in [1...9] dargestellt. Es sei deshalb nur kurz auf das Wesentliche eingangen.

Zur Bestimmung der Kapazitätsbeläge  $c$  auf einem System mit  $M$  Leitern benutzt man zunächst die Beziehung zwischen

<sup>1</sup>) Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

den Ladungsbelägen  $Q$  und den Potentialwerten  $V$  auf diesen Leitern [10]

$$(Q) = (c) (V) \quad (1)$$

mit

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1M} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{M1} & c_{M2} & \dots & c_{MM} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Matrix der Kapazitätsbelags-} \\ \text{koeffizienten } c_{ik}, \\ \text{wobei } c_{ik} = c_{ki} \text{ ist.} \end{array}$$

Aus Gl. (1) ergibt sich die Vorschrift für das Randwertproblem zur Bestimmung eines einzelnen Kapazitätsbelagskoeffizienten.  $c_{kl}$  zwischen dem Leiter  $k$  und dem Leiter  $l$ , zu  $V(x, y) \neq 0 =$  konstant auf dem Leiter, z. B. gleich  $U_1$ ,  $V(x, y) = 0$  auf den Leitern  $n \neq l$

Es ist also

$$c_{kl} = \frac{Q_k}{U_1} \Big|_{V_{n+1} = 0} \quad (2)$$

Der unbekannte Ladungsbelag  $Q_k$  wird näherungsweise mit der Teilflächenmethode bestimmt (wobei im vorliegenden ebenen Fall anstelle von «Teilflächen» nur «Teilstrecken» betrachtet zu werden brauchen). Der Umfang des Leiters  $k$  wird dazu in  $N_k$  Teilstrecken  $s_{km}$  (Fig. 1) unterteilt, längs deren der unbekannte Ladungsbelag pro Breiteneinheit  $q_{km}$  konstant angenommen wird. Der Ladungsbelag des Leiters  $k$  ist dann:

$$Q_k = \sum_{m=1}^{N_k} q_{km} s_{km} \quad (3)$$

( $N_k$  ist die Anzahl der Teilstrecken auf dem Leiter  $k$ ).

Zur Berechnung der insgesamt  $N = \sum_{k=1}^M N_k$  Unbekannten  $q_j$  der  $M$  Leiter sind  $N$  Gleichungen nötig, die man mit folgender Beziehung für das Potential  $V_i$  in einem beliebigen Aufpunkt  $P_i$  zwischen den leitenden Ebenen aufstellen kann (wobei anstelle der Doppelindizierung «km» in Gl. (3) zur Vereinfachung der Schreibweise eine einfache Indizierung «j» verwendet wird)

$$V_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} q_j \quad (4)$$

$a_{ij}$  sind dabei die «Ladungskoeffizienten», die für einen Geometriegrundtyp (z. B. hier Leiter zwischen parallelen leitenden Ebenen) numerisch bestimmt werden können [siehe Gl. (8)].

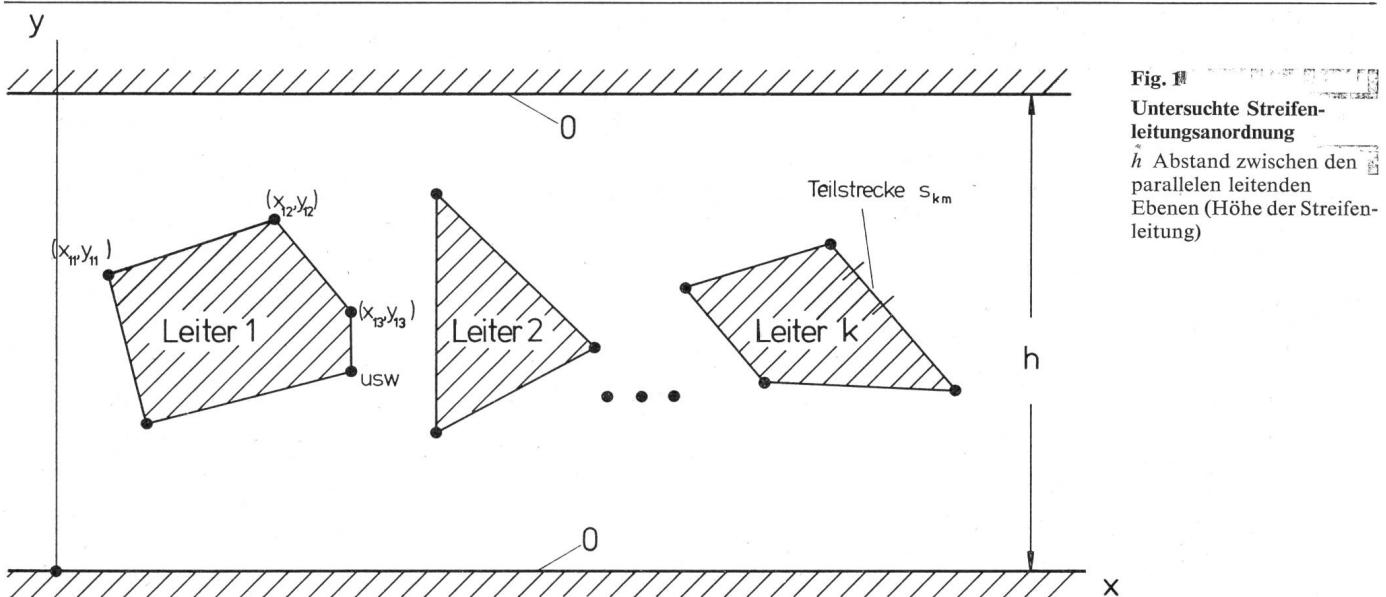


Fig. 1 Untersuchte Streifenleitungsanordnung

$h$  Abstand zwischen den parallelen leitenden Ebenen (Höhe der Streifenleitung)

Um die benötigten  $N$  Gleichungen aufzustellen, legt man den Aufpunkt  $P_i$  nacheinander in jede Teilstrecke, z. B. jeweils in deren Mitte. Dort ist das Potential aber bekannt, nämlich gleich dem vorgegebenen Wert  $U_1$  (z. B. 1 V) auf dem Leiter 1 und  $V_{n+1} = 0$  [Gl. (2)] auf den restlichen Leitern. Das so aufgestellte Gleichungssystem

$$(V) = (a) (q) \quad (5)$$

kann dann nach den  $N$  unbekannten Ladungsbelägen  $q_j$  pro Breiteneinheit aufgelöst werden.

Die Ladungskoeffizienten  $a_{ij}$  in Gl. (4) bzw. (5) werden aus der Lösung der allgemeinen Poissonschen Gleichung für den ebenen Fall [11] bestimmt

$$V(x, y) = \int G(x, y; x', y') \frac{q}{\epsilon} (x', y') \, ds' (x', y') \quad (6)$$

( $G$  ist die Greensche Funktion [11].)

Bei der Teilflächenmethode ist hier der Ladungsbelag  $q(x', y')$  pro Teilstrecke  $s_j$  jeweils konstant angenommen, so dass man näherungsweise für das Potential  $V_i$  im Punkt  $P_i(x_i, y_i)$  erhält:

$$V_i(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^N q_j \frac{1}{\epsilon} \int_{s_j} G(x_i, y_i; x_j, y_j) \, ds_j (x_j, y_j) \quad (7)$$

Durch Vergleich mit Gl. (4) ergibt sich für die dort mit  $a_{ij}$  abgekürzten Potentialkoeffizienten

$$a_{ij} = \frac{1}{\epsilon} \int_{s_j} G(x_i, y_i; x_j, y_j) \, ds_j (x_j, y_j) \quad (8)$$

In Tabelle I sind die Greenschen Funktionen für einige Geometriegrundtypen zusammengestellt. Für das vorliegende Problem der Streifenleitung ist die Greensche Funktion Nr. 4 einzusetzen. Die Integration in Gl. (8) wird numerisch durchgeführt, wobei man die Singularität bei  $x' = x$  und  $y = y'$  separieren muss.

### 3. Optimierung der Teilstrecken

Die Teilflächenmethode wird als Approximationsproblem interpretiert, bei dem das Potential  $V_k$  = konstant längs einer Leiterberandung durch Gl. (4) bzw. (7) angenähert werden soll. Nach Gl. (4) bzw. (7) wird Übereinstimmung in den Funktionswerten

$$V_i(x_i, y_i) = V_k \quad (9)$$

gefordert an  $N$  festen Aufpunkten.

Es liegt zunächst der Gedanke nahe, durch geeignete Wahl der Lage der Aufpunkte (insbesondere derjenigen auf der

Fig. 2 Einfache Streifenleitung

Kapazitätsfehler  $F_c$  bei Verschiebung der beiden Aufpunkte in der Nähe des Leiterrandes  
 Teilstreckenzahl  $N = 6$ ; Teilstreckenunterteilung nach Gl. (11)  
 $w$  Breite des Innenleiters  
 $t$  Abstand des Aufpunkts vom Leiterrand  
 $s_1$  Breite der ersten Teilstrecke  
 $h$  Höhe der Streifenleitung

<p><b>1</b></p> <p><u>Punktladung</u></p> <p><math>R(x',y',z')</math> <math>G(\infty)=0</math></p>	$G(x,y,z; x',y',z') = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r(x,y,z; x',y',z')}$
<p><b>2</b></p> <p><u>Linienladung</u></p> <p><math>R(x',y')</math> <math>G(\infty)=0</math></p>	$G(x,y; x',y') = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln \cdot \frac{r_0}{r(x,y; x',y')}$ <p><math>r_0</math> = Bezugsradius, bei dem <math>G</math> einen bestimmten Wert annehmen möge</p>
<p><b>3</b></p> <p><u>Linienladung über leitende Ebene</u></p> <p><math>R(x',y')</math> <math>R'(x',-y')</math> <math>P(x,y)</math> <math>r_1</math> <math>r_2</math></p> <p><math>G=0</math></p>	$G(x,y; x',y') = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln \cdot \frac{r_2(x,y; x',y')}{r_1(x,y; x',y')}$
<p><b>4</b></p> <p><math>h</math></p> <p><math>P(x,y)</math> <math>R(x',y')</math></p> <p><math>G=0</math></p> <p><u>Linienladung zwischen parallelen leitenden Ebenen</u></p>	$G(x,y; x',y') = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \frac{(x-x')^2 + (y-y'-2nh)^2}{(x-x')^2 + (y+y'-2nh)^2}$ $= -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2} \frac{x-x'}{h} + \sin^2 \frac{\pi}{2} \frac{y-y'}{h}}{\sin^2 \frac{\pi}{2} \frac{x-x'}{h} + \sin^2 \frac{\pi}{2} \frac{y+y'}{h}}$ <p>[6]</p>
<p><b>5</b></p> <p><math>R</math> <math>r</math> <math>r'</math> <math>R(x',y')</math> <math>P(x,y)</math></p> <p><u>Linienladung in einem leitendem Zylinder</u></p>	$G(x,y; x',y') = \frac{1}{2\pi} \left( \ln \frac{r_0}{r_1(x,y; x',y')} + \ln \frac{r'}{R} r_2(x,y; x',y') \right)$ <p><math>r_0</math> vgl. Bemerkung bei (2)</p>
<p><b>6</b></p> <p><math>2h</math></p> <p><math>P(x,y)</math> <math>R(x',y')</math></p> <p><math>2l</math></p> <p><u>Linienladung in einem leitendem Rechteckkasten</u></p>	$G(x,y; x',y') = \frac{4}{h\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin \frac{k\pi}{2l} (x+l) \sin \frac{m\pi}{2} \left( \frac{h+y}{h} \right) \sin \frac{k\pi}{2l} (x'+l) \sin \frac{m\pi}{2} \left( \frac{h+y'}{h} \right)}{m^2 + k^2 \left( \frac{h^2}{l} \right)} \right\}$ <p>[18]</p>
<p><b>7</b></p> <p><math>\epsilon_1</math> <math>\epsilon_2</math> <math>h</math></p> <p><u>Linienladung einer dielektrischen Schicht über leitender Schicht</u></p>	$y \geq h$ $y' \geq h$ $G(x,y; x',y') = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right)^k \ln \left[ \frac{(x-x')^2 + (y+y'+2kh)^2}{(x-x')^2 + (y-y'-2kh)^2} \right]$ $- \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \left( \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right)^{k+1} \ln \left[ \frac{(x-x')^2 + (y+y'-2(k-1)h)^2}{(x-x')^2 + (y-y'+2(k+1)h)^2} \right]$ <p>[7]</p>

Randteilstrecke) zu versuchen, den Kapazitätsfehler gegenüber dem bei Lage der Aufpunkte in Teilstreckenmitte zu verringern. In Fig. 2 wird anhand der einfachen Streifenleitung gezeigt, dass bei einer entsprechenden Verschiebung ( $t/s_1 = 0,19$ ) der beiden Aufpunkte jeweils auf der Randteilstrecke  $\bar{O}1$  bzw.  $\bar{1}0$  des Innenleiters der Fehler  $F_c$  bei den Abmessungen  $w/h = 0,01 \dots 10$  im Bereich  $|F_c| < 0,18\%$  bleibt gegenüber  $|F_c| < 0,63\%$  bei Lage der Aufpunkte in Teilstreckenmitte ( $t/s_1 = 0,5$ ).

Weiter kann man versuchen, das Approximationsproblem mit Hilfe der «mittleren Approximation» zu lösen. Hier gibt man  $N_p > N$  Punkte vor, an denen der Approximationsausdruck (4) vorgegebene Werte annehmen soll [12].

Trotz der Vorteile dieser beiden Approximationsverfahren (Verschiebung der Aufpunkte, mittlere Approximation), nämlich hohe Genauigkeit, geringe Rechenzeit, ist ein Nachteil schwerwiegend: Für jede Teilstreckenzahl und für jede Ände-

lung der geometrischen Abmessungen muss der Ort der Aufpunkte für minimalen Fehler neu bestimmt werden. Dies kann zwar etwa nach dem Kriterium eines möglichst glatten Potentialverlaufs erfolgen, die Bestimmung ist dennoch unbequem und zeitraubend. Im folgenden wird deshalb die Lage der Aufpunkte durchweg in Teilflächenmitte und ihre Zahl gleich der Zahl der unbekannten Ladungsbeläge pro Breiteneinheit angenommen. Es wird die Teilstreckenbreite optimiert.

Die Teilstrecken müssen zweckmässigerweise an den Stellen hoher Ladungsdichte (z. B. bei der einfachen Streifenleitung, Fig. 2, in der Nähe der Leiterenden) kleiner sein als an Stellen geringerer Ladungsdichte. In [3; 4] werden die Leiteroberflächen bei Parallelbandleitungen so unterteilt, dass das Verhältnis der Grössen zweier aufeinanderfolgender Teilstrecken konstant ist (geometrische Unterteilung). Die geometrische Unterteilung ist jedoch bei Streifenleitungen noch nicht optimal.

Anhand von Fig. 2 lässt sich erkennen, dass der Kapazitätsfehler bei der Streifenleitung negativ ist, wenn die Aufpunkte in die Mitten der Teilstrecken gelegt werden. Dies bedeutet, dass der Fehler dann minimal wird, wenn der Gesamtladungsbetrag  $Q_k$  auf dem Leiter  $k$  bei einer vorgegebenen Teilstreckenzahl ein Maximum besitzt. Die optimale Teilstreckenunterteilung wird mit einem Optimierungsverfahren nach [13] numerisch ermittelt. Dieses Optimierungsverfahren gestattet, eine Funktion mehrerer Veränderlicher

$$f(T_1, T_2, T_3, \dots) = Q_k \quad (10)$$

zu optimieren, auch wenn (wie hier) kein direkt formelmässig beschreibbarer Zusammenhang zwischen den Variablen und  $Q_k$  besteht.

Die Variablen sind im vorliegenden Fall die Teilungsverhältnisse  $T_j = s_{j+1}/s_j$  jeweils zweier aufeinander folgender Teilstrecken  $s_j$  und  $s_{j+1}$ . Die Unterteilung in Teilstrecken wird dabei symmetrisch zur Mitte des jeweiligen geraden Stücks der Leiteroberfläche vorgenommen, das in Teilstrecken unterteilt werden soll (bzw. symmetrisch zur Mitte des gesamten Leiters bei einem Fall wie in Fig. 2). Es wird von der geometrischen Unterteilung als erster Näherung ausgegangen und schrittweise eine Verbesserung  $p + 1$  gesucht, für die gilt:

$$f(T_{1p+1}, T_{2p+1}, \dots) > f(T_{1p}, T_{2p}, \dots)$$

Das Verfahren arbeitet mit sich dem Problem angleichender Schrittweite.

In Fig. 3 sind die optimalen Teilungsverhältnisse  $T_j$  für die einfache Streifenleitung aufgetragen. Man erkennt, dass sich für Teilstreckenzahlen pro Leiterhälfte  $N/2 > 3$  ein von den Abmessungen nahezu unabhängiges Gesetz für die optimale Teilstreckenaufteilung aufzeigen lässt:

$$\begin{aligned} T_1 &\approx 10 \\ T_j &\approx 3 \quad (j > 1) \end{aligned} \quad (11)$$

Lediglich bei sehr breiten Innenleitern ( $h/w \leq 0,5$ ) steigt jeweils das Verhältnis der innersten Teilstrecke zu der danebenliegenden auf etwa 10 an. Der Anstieg erklärt sich aus dem bei sehr breiten Innenleitern nahezu homogenen Feld in der Nähe der Leitermitte, wo dann die Teilstrecke sehr gross werden kann. Das Gesetz (11) für die optimale Teilstreckenaufteilung bei der einfachen Streifenleitung lässt sich auch ohne grossen zusätzlichen Fehler bei Streifenleitungen mit mehreren Innenleitern und mit Innenleitern von komplizierterem Quer-

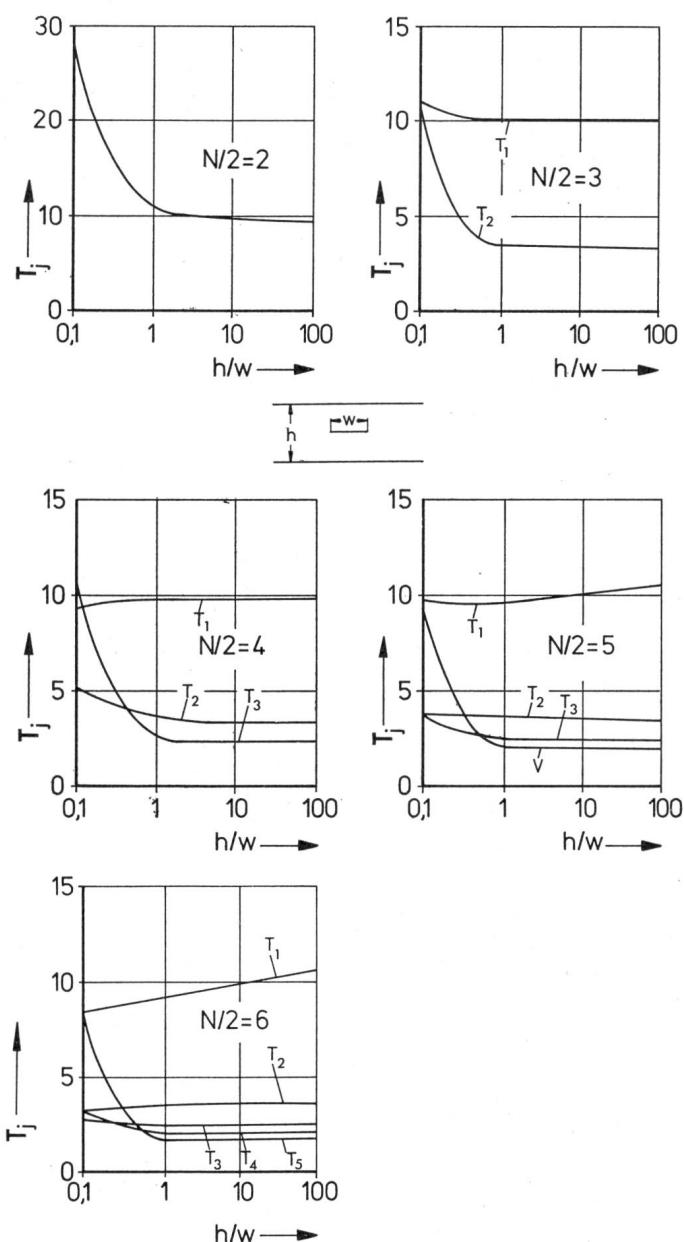


Fig. 3 Hinsichtlich eines geringen Kapazitätsfehlers optimale Teilungsverhältnisse  $T_j = s_{j+1}/s_j$  der Teilstrecken als Funktion von  $h/w$  bei der einfachen Streifenleitung. Parameter ist die Anzahl  $N/2$  der Teilstrecken pro Leiterhälfte

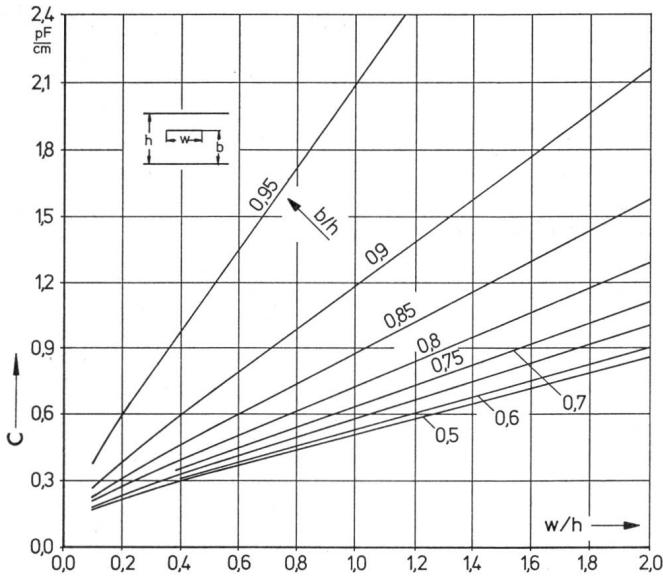


Fig. 4 Kapazitätsbelag bei der unsymmetrischen einfachen Streifenleitung

- c Kapazitätsbelag
- h Höhe der Streifenleitung
- w Breite des Innenleiters
- b Abstand des Innenleiters von der unteren Ebene

schnitt anwenden. Dies kommt daher, dass das Optimum der Funktion von Gl. (10) sehr flach verläuft.

In Fig. 4 sind für die unsymmetrische einfache Streifenleitung und in Fig. 5 für die gekoppelte Streifenleitung die Kapazitätsbeläge als ein Berechnungsbeispiel für die Teilstreckenunterteilung nach Gl. (11) aufgetragen. Die Anzahl der Teilstrecken pro Leiterhälfte beträgt jeweils  $N/2 = 5$ . Der Kapazitätsfehler ist dabei kleiner als 1 %.

#### 4. Fehlerabschätzung

Bei einem Näherungsverfahren ist es wichtig, eine Möglichkeit der Fehlerabschätzung zu besitzen. Hier bietet die Teilflächenmethode, neben der Einfachheit sowie der relativ hohen Genauigkeit bei geringer Teilflächenzahl, einen weiteren Vorteil, wie in diesem Abschnitt gezeigt wird.

Es ist sinnvoll, zur Fehlerabschätzung der Kapazitätsberechnung den Potentialfehler heranzuziehen, den man leicht berechnen kann, weil man ja das vorgegebene Sollpotential längs der Leiteroberfläche kennt. Als Kapazitätsfehler  $F_c$  wird definiert

$$F_c = \frac{c - c_w}{c_w} \quad (12)$$

wobei  $c$  der näherungsweise berechnete Kapazitätsbelag und  $c_w$  der wirkliche Kapazitätsbelag sind.

Zunächst wird ein näherungsweise bestimmbarer Ausdruck für den Kapazitätsfehler hergeleitet. Hierzu wird der zweite Greensche Satz in der Ebene benutzt [14; 15]:

$$\int_W \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \iint_B (v \Delta u - u \Delta v) dx dy \quad (13)$$

$u$  sei gleich der Potentialfunktion des vorgegebenen Dirichletschen Problems (im Bereich  $B$  zwischen den Leitern ist  $\Delta u = 0$ ,  $u$  ist auf der Leiterberandung bekannt).  $v$  sei gleich der nach Gl. (7) näherungsweise berechneten Potentialfunktion (wofür analog  $\Delta v = 0$  gilt). Die Integration über die Randkurve  $W$

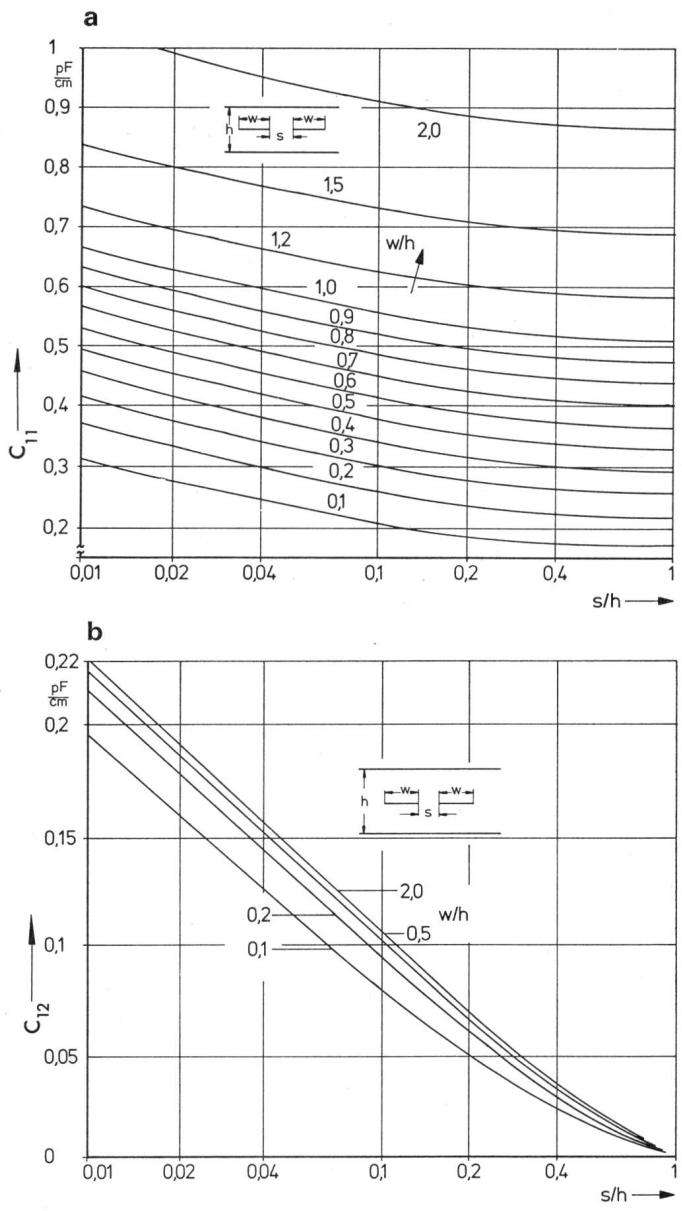


Fig. 5 Kapazitätsbeläge bei der gekoppelten Streifenleitung

- a Eigenkapazitätsbelag  $c_{11}$
- b Teilkapazitätsbelag  $c_{12}$
- s Abstand der Innenleiter

Weitere Bezeichnungen siehe Fig. 4

wird über die Konturen der Oberflächen der Innenleiter sowie längs der Kontur des Außenleiters durchgeführt (längs des Außenleiters ist  $u = 0, v = 0$ ).

Mit der Einführung der Potentialabweichung  $\delta V_i$  vom vorgegebenen Sollpotential  $U_i$  auf der Leiteroberfläche  $i$

$$\delta V_i = V_i - U_i \quad (14)$$

ergibt sich dann der Näherungsausdruck  $FN_{c11}$  für den Fehler des Eigenkapazitätsbelages  $c_{11}$  des Leiters:

$$FN_{c11} = \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{N_i} q_{ij} \int_{S_j} \frac{\delta V_i}{U_i} ds_j}{Q_1} \quad (15)$$

( $Q_1$  Näherungs-Ladungsbelag auf dem Leiter  $i$ ,  $M$  Anzahl der Leiter,  $N_i$  Anzahl der Teilstrecken auf dem Leiter  $i$ ,  $q_{ij}$  Ladungsbelag pro Breiteneinheit auf der Teilstrecke  $j$  des Leiters  $i$ ,  $U_i$  ist das Sollpotential auf dem Leiter  $i$ ).

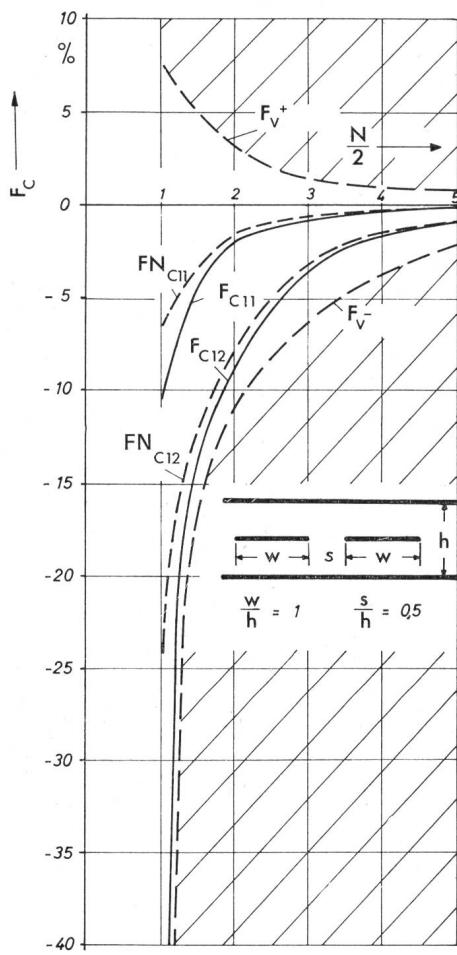


Fig. 6 Kapazitätsfehler  $F_c$ , näherungsweise berechneter Kapazitätsfehler  $F_{N_c}$  sowie obere  $F_{v^+}$  und untere Fehlerschranke  $F_{v^-}$  bei der gekoppelten Streifenleitung aufgetragen über der halben Teilstreckenzahl  $N/2$

Der Teilkapazitätsbelag  $c_{kl}$  zwischen den Leitern  $k$  und  $l$  berechnet sich aus der gleichen Potentialverteilung, aber mit anderem Näherungs-Ladungsbetrag  $Q_k$  [Gl. (2)]. Deshalb ist für den Näherungsausdruck des entsprechenden Fehlers in Gl. (15)  $Q_k$  anstelle von  $Q_1$  zu setzen. Der Fehler von  $c_k$  ist grösser ( $Q_k < Q_1$ ).

Eine Fehlerabschätzung kann dann als gelöst betrachtet werden, wenn wie z. B. bei der Variationsmethode eine Fehlereingrenzung möglich ist, d. h. wenn man eine obere und eine untere Fehlerschranke angeben kann. Dies soll im folgenden für die Teilflächenmethode gezeigt werden.

Zur Angabe einer oberen und einer unteren Fehlerschranke geht man wieder von der Beziehung (13) aus. Setzt man die nach Gl. (7) näherungsweise berechnete Potentialfunktion jeweils pro Leiterkontur  $l$  gleich dem dort auftretenden grössten Wert  $V_{\max l}$  bzw. gleich dem dort auftretenden kleinsten Wert  $V_{\min l}$ , so ergibt sich für die Fehlereingrenzung der Berechnung des Kapazitätsbelags  $c_{kl}$  eines Leiters  $l$ :

$$\underbrace{\frac{V_{\min l}}{U_1} - 1}_{F_{v^-}} < F_c < \underbrace{\frac{V_{\max l}}{U_1} - 1}_{F_{v^+}} \quad (16)$$

( $F_{v^-}$  grösster negativer Potentialfehler,  $F_{v^+}$  grösster positiver Potentialfehler). Bei mehreren Leitern ist für  $F_{v^-}$  bzw.  $F_{v^+}$  jeweils die Summe der maximalen Potentialfehler einzusetzen.

Die maximalen Potentialfehler sind aus Gl. (7) berechenbar, nachdem die Ladungsbeläge  $q_j$  pro Breiteneinheit bestimmt worden sind. Da die grösste Potentialabweichung vom Sollpotential erfahrungsgemäss meist an den Leiterkanten bzw. -ecken auftritt, kann man sich in diesen Fällen auf die Beachtung dieser Punkte beschränken. In Fig. 6 sind zum Vergleich als Beispiel der Kapazitätsfehler  $F_c$  (berechnet aus der Beziehung mit elliptischen Integralen [16]), der näherungsweise berechenbare Kapazitätsfehler nach Gl. (15) sowie die obere und untere Fehlerschranke  $F_{v^-}$  und  $F_{v^+}$  nach Gl. (16) für eine gekoppelte Streifenleitung angegeben.

## 5. Feldberechnung

Über die Kapazitätsberechnung hinaus ist es oft auch interessant, bei einer Leiteranordnung Aufschluss über die Feld- und Potentialverteilung zu erlangen. Es wurde hier ein Zeichenprogramm zum direkten Zeichnen der Feld- und Potentiallinien erstellt.

Eine Potentialalline ist der geometrische Ort aller Punkte  $P(x, y)$ , für die  $V(x, y) = V_i = \text{konstant}$  gilt, wobei  $V(x, y)$  das Potential im Punkt  $P(x, y)$  bedeutet. Eine Feldlinie ist die Lösungskurve der Differentialgleichung  $y' = E_y/E_x$ , wobei  $y' = dy/dx$ ,

$$E_y = -\frac{\partial}{\partial y} V(x, y), \quad E_x = -\frac{\partial}{\partial x} V(x, y)$$

sind. Als Anfangswerte für die Lösung der Differentialgleichung dienen die Koordinaten eines Punktes dieser Kurve. Die Berechnung des Potentials erfolgt über die Teilflächenmethode nach Gl. (7). Die Lösung wurde numerisch durchgeführt.

Die Berechnung der Feldstärke erfolgt ebenfalls numerisch. Parameter sind die Koordinaten des Punktes  $P(x, y)$ ; geliefert werden die Komponenten der Feldstärke in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung. Die Differentiation  $E = -\text{grad } V$  wird analytisch durch partielle Differenzierung der Ladungskoeffizienten durchgeführt.

Zur Integration der Differentialgleichung für die Feldlinien wird das Runge-Kutta-Verfahren gewählt, weil es im Gegen-

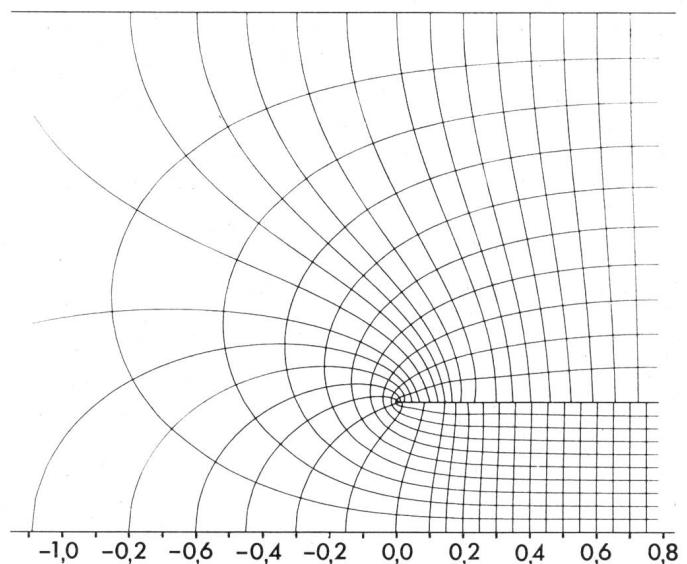


Fig. 7 Potential- und Feldlinien bei der einfachen unsymmetrischen Streifenleitung

satz zum Romberg-Verfahren Kriterien für die Wahl der Schrittweite und damit zur Fehlverminderung liefert. Die Schrittweite wird durch die Schrittzahl [17] überwacht und der Krümmung der Kurve angepasst. In Fig. 7 sind die Potential- und Feldlinien bei einer einfachen Streifenleitung mit unsymmetrisch angeordnetem Innenleiter als Beispiel aufgetragen.

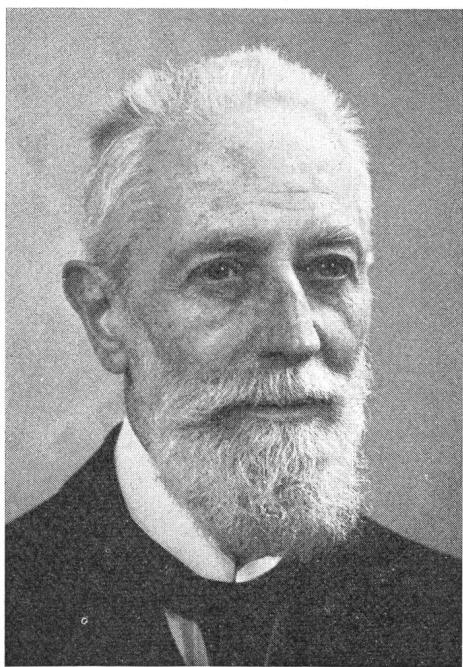
## Literatur

- [1] *J. C. Maxwell*: The electrical researches of the honourable Henry Cavendish. London, Cambridge University Press, 1879.
- [2] *D. K. Reitan* and *T. J. Higgins*: Calculation of the electrical capacitance of a cube. *Journal of Applied Physics* 22(1951)2, p. 223...226.
- [3] *A. Kessler*, *A. Vlcek* und *O. Zinke*: Methoden zur Bestimmung von Kapazitäten unter besonderer Berücksichtigung der Teilstächenmethode. *AEÜ* 16(1962)8, S. 365...380.
- [4] *D. Pflügel*: Über die Teilstächenmethode zur Bestimmung der Kapazität beliebiger Leiter. *Zeitschrift für Angewandte Physik* 23(1967)2, S. 89...94.
- [5] *R. F. Harrington*: Field computation by moment methods. New York, Macmillan, 1968.
- [6] *D. W. Kammler*: Calculation of characteristic admittances and coupling coefficients for strip transmission lines. *Trans. IEEE MTT* 16(1968)11, p. 925...937.
- [7] *W. T. Weeks*: Calculation of coefficients of capacitance of multiconductor transmission lines in the presence of a dielectric interface. *Trans. IEEE MTT* 18(1970)1, p. 35...43.
- [8] *A. Farrar* and *A. T. Adams*: Matrix methods for microstrip three-dimensional problems. *Trans. IEEE MTT* 20(1972)8, p. 497...504.
- [9] *H. Singer*: Flächenladungen zur Feldberechnung von Hochspannungssystemen. *Bull. SEV/VSE* 65(1974)10, S. 739...746.
- [10] *K. Simonyi*: Theoretische Elektronik. 4. Auflage. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1971.
- [11] *H. Buchholz*: Elektrische und magnetische Potentialfelder. Berlin/Göttingen/Heidelberg, Springer Verlag, 1957.
- [12] *L. Krauss*: Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Unterprogramme für Fortran IV, Blatt 8, Darmstadt, Rechenzentrum der Technischen Hochschule, 1970.
- [13] *R. Hooke* and *T. A. Jeeves*: Direct search solution of numerical and statistical problems. *Journal of the Association for Computing Machinery* 8(1961), p. 212...229.
- [14] *H. J. Greenberg*: The determination of upper and lower bounds for the solution of the Dirichlet problem. *Journal of Mathematics and Physics* 27(1948), p. 161...182.
- [15] *R. Courant* and *D. Hilbert*: Methoden der mathematischen Physik II. 2. Auflage. Berlin/Heidelberg/New York, Springer-Verlag, 1968.
- [16] *S. B. Cohn*: Characteristic impedance of the shielded-strip transmission line. *IRE Trans. MTT* 2(1954)2, p. 52...57.
- [17] *R. Zurmühle*: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Berlin/Heidelberg, Springer-Verlag, 1965.
- [18] *P. C. Chestnut*: On determining the capacitances of shielded multi-conductor transmission lines. *Trans. IEEE MTT* 17(1969)10, p. 734...745.

## Adresse des Autors:

Prof. Dr.-Ing. F. Arndt, Fachgebiet Hochfrequenztechnik der Universität Bremen, Achterstrasse, D-28 Bremen.

## Walter Kummer 1875–1962



Bildquelle: Ringier Bilderdienst

Wer alt wird, sieht seine Freunde sterben, wird oft einsam und vergessen. So ging es auch Walter Kummer. Sein 100. Geburtstag am 10. August 1975 soll daher zum Anlass genommen werden, sein Leben kurz nachzuzeichnen.

Sein Vater, ursprünglich Pfarrer, bekleidete nacheinander die Ämter eines bernischen Regierungsrates, des Direktors des eidg. Statistischen Amtes und des Versicherungsamtes. Nach dem Besuch des humanistischen Gymnasiums Bern studierte Kummer am Eidg. Polytechnikum in Zürich, das er 1897 mit dem Diplom eines Maschineningenieurs verliess. Während er bei Professor F. Weber Physikassistent war, schrieb er seine Dissertation, auf Grund deren ihm die Universität Zürich den Titel Dr. phil. verlieh, denn am Poly war es damals noch nicht möglich zu doktorieren.

Nach einer kurzen Tätigkeit bei BBC trat er 1899 in den Dienst der MFO, für die er einige Jahre in Belgien arbeitete. In die Schweiz zurückgekehrt, installierte er sich 1907 als Ingenieurkonsulent in Zürich, eine Tätigkeit, die er bis 1940 ausübe. 1908 habilitierte er sich als Privatdozent an der ETH, die ihn 4 Jahre später zum ordentlichen Professor ernannte. Er las bis 1940 über Maschinenlehre und über Probleme der elektrischen Traktions.

Auf diesem Gebiet hat sich Kummer sehr verdient gemacht. Als Mitarbeiter der 1904 gegründeten «Schweizerischen Studienkommission für elektrischen Bahnbetrieb» hatte er teils in Zusammenarbeit mit den Professoren Thormann und Wyssling, später auch allein verschiedene Berichte zu erstatten. Die beiden wichtigsten sind: Grundlagen und Bedingungen des Fahrdienstes für den elektrischen Betrieb der Schweizerischen Bundesbahnen sowie Wahl der Periodenzahl für Wechselstromtraktion. Der Schweizer Vorschlag für 15000 Volt, 15 Hz führte 1912 zum internationalen Übereinkommen zwischen Preussen, Bayern, Baden und der Schweiz (15 kV, 16 1/2 Hz), dem später auch Österreich, Schweden und Norwegen beitraten.

In seiner Eigenschaft als Mitglied der eidg. Wasserwirtschaftskommission beantragte Kummer die Errichtung des Amtes für Elektrizitätswirtschaft. Sein Postulat wurde 1930 verwirklicht.

Ausser den vier Büchern über die Maschinenlehre der elektrischen Zugförderung, die Wahl der Stromart für grössere elektrische Bahnen, die wissenschaftlichen Grundlagen für die Preisbildung für elektrische Arbeit und das physikalische Verhalten der Maschinen im Betrieb verfasste Kummer zahlreiche Aufsätze, die vorab in der Schweizerischen Bauzeitung erschienen; sie waren stets originell, geistreich und zeugten von hoher Gesinnung. Bis ins hohe Alter blieb er dem Fortschritt offen; sein letzter, 1961 veröffentlichter Aufsatz handelte vom Einphasenbahnbetrieb mit 50 Hz. Nach seiner Emeritierung im Jahre 1940 beschäftigte er sich am liebsten mit historischen und archäologischen Studien, bei denen ihm seine humanistische Bildung, auf die er stolz war, sehr zu statten kam. Er starb am 9. März 1962 in Zürich. H. Wüger