Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen = Bulletin de l'Association suisse des électriciens, de l'Association des entreprises électriques suisses

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen

Band: 65 (1974)

Heft: 10

Artikel: Flächenladungen zur Feldberechnung von Hochspannungssystemen

Autor: Singer, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-915406

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Flächenladungen zur Feldberechnung von Hochspannungssystemen

Von H. Singer

537.212:621.3.027.3:621.3.015.53

Die Arbeit umfasst Untersuchungen über die Verwendung von Flächenladungen zur Berechnung des elektrischen Feldes von Hochspannungssystemen. Der Aufsatz geht aus von einer kurzen Darstellung des Ladungsverfahrens mit diskreten Ladungen und einigen damit verbundenen Schwierigkeiten und zeigt als Ausweg eine kontinuierliche Belegung der Randflächen mit Flächenladungen.

Wegen der Einschränkungen, die durch eine analytische Integration der Ladungsflächen bedingt sind, zielten die Bemühungen der Arbeit auf eine numerische Integration ab. Um günstige Rechenzeiten zu erreichen, wurde allerdings die analytische Lösung der Integrale soweit wie möglich damit kombiniert; weiterhin wurden Polynome zweiten Grades anstelle trigonometrischer Funktionen benutzt. Ausserdem kam für Aufpunkte auf Ladungsflächen eine schnelle Approximation zur Verwendung.

Bei der Schilderung der Berechnung einiger Beispiele wurde betont, dass Flächenladungen gegenüber diskreten Ladungen vorteilhaft einzusetzen sind bei Elektroden, bei denen die Ausdehnung in einer Richtung sehr klein ist. Ausserdem wurden dielektrische Grenzflächen als günstige Anwendungsmöglichkeit für Flächenladungen herausgestellt, und schliesslich deutlich gemacht, dass Flächenladungen in manchen Fällen ein kleineres Gleichungssystem und damit weniger Speicherplatz im Rechner erfordern als diskrete Ladungen.

Exposé concernant une étude de l'emploi de charges superficielles pour le calcul du champ électrique de systèmes à haute tension. On décrit tout d'abord brièvement le procédé de charges discrètes et quelques difficultés qu'il présente, puis montre le moyen d'obtenir des charges continues dans les parties marginales.

En raison des limitations de l'intégration analytique des surfaces chargées, le travail consistait à prévoir une intégration numérique. Afin de réduire le temps nécessaire pour le calcul, la solution analytique des intégrales a toutefois été combinée dans la mesure du possible; en outre, on a eu recours à des polynômes de second degré, au lieu de fonctions trigonométriques, et à une approximation rapide pour les points considérés des surfaces chargées.

Lors de la description du calcul pour quelques exemples, on montre que des charges superficielles sont préférables à des charges discrètes, dans le cas d'électrodes dont l'extension dans un sens est très faible. Des surfaces diélectriques marginales permettent une application plus avantageuse pour des décharges superficielles. Enfin, l'auteur indique que, dans certains cas, ces charges n'exigent qu'un système d'équations plus restreint, c'est-à-dire moins de place dans la mémoire du calculateur électronique.

1. Einführung

Die gegenwärtige Entwicklung der Hochspannungstechnik ist gekennzeichnet durch eine überaus rasche Steigerung des Spannungsniveaus in allen Anwendungsbereichen. Zur Untersuchung der dabei auftretenden Probleme werden aufwendige Höchstspannungslaboratorien gebaut [1][1]), die experimentell fundierte Unterlagen für die Planung von Anlagen in den höchsten Spannungsebenen liefern sollen. Parallel dazu sind theoretische Untersuchungen nötig, um eine gute Verlässlichkeit der Ergebnisse zu erreichen. Eine Voraussetzung zur Optimierung in dieser Richtung bildet die Berechnung des elektrischen Feldes – auch komplizierter Elektrodenanordnungen.

Wie die Literatur der vergangenen Jahre erkennen lässt, wurden für die Berechnung des elektrischen Feldes verschiedene Rechenverfahren entwickelt. Nach den rein analytischen Lösungsverfahren haben mit der Entwicklung der Rechenmaschinentechnik numerische Verfahren mehr und mehr an Bedeutung gewonnen. Bei der Aufzählung solcher Verfahren sind das Differenzenverfahren zu nennen [2...8] und das Verfahren der finiten Elemente [9; 10]. Daneben wurde in den letzten Jahren ein numerisches Verfahren entwickelt, das mit diskreten Ladungen arbeitet [11...13], und damit eine Vielzahl von Feldsystemen der Hochspannungstechnik untersucht [14...19].

Gegenüber dem Differenzenverfahren und dem Verfahren der finiten Elemente weist das Ladungsverfahren grundsätzlich eine Reihe von Vorzügen auf, so beispielsweise die Möglichkeit, auch offene, unbegrenzte Anordnungen berechnen zu können, deren Feld sich bis ins Unendliche erstreckt. Weiterhin erlaubt das Ladungsverfahren, auch dreidimensionale Felder beliebiger Feldkonfigurationen mit vertretbarem Aufwand zu berechnen. Ausserdem garantiert dieses Verfahren neben einer hohen Genauigkeit eine vergleichsweise geringe Rechenzeit.

Das Ladungsverfahren ist allerdings bisher nicht so weit entwickelt, dass damit alle zu erwartenden Feldanordnungen berechnet werden können. Eine Schwierigkeit für das Ladungsverfahren mit diskreten Ladungen bieten sehr flache, abgeplattete Elektroden und Bleche, etwa Polycon-Elektroden [16] oder Rogowski-Profile. Dünne Stege und flache, bandförmige Zuleitungen, beispielsweise an Abschirmelektroden, sind hier ebenfalls zu nennen. Der Grund liegt darin, dass beim Ladungsverfahren der Abstand zwischen Konturpunkt und zugehöriger Ladung in derselben Grössenordnung liegen muss wie der Abstand zwischen zwei benachbarten Konturpunkten. Diese Forderung lässt sich aber bei Elektroden, bei denen die Ausdehnung in einer Richtung sehr klein wird, mit den diskreten Ladungen nur mit Schwierigkeiten verwirklichen. Gänzlich unmöglich zu berechnen ist mit dem Ladungsverfahren in der bisherigen Form beispielsweise das Feld an Steuerbelägen von Durchführungen oder Kabelendverschlüssen.

Auf Grund der oben beschriebenen Vorzüge des Ladungsverfahrens erschien es sinnvoll, das Verfahren so zu entwickeln und zu erweitern, dass es für möglichst alle auftretenden Feldprobleme universell angewendet werden kann. Einen Ansatz zur Lösung des Problems bietet eine kontinuierliche Belegung der Randflächen mit Flächenladungen. Da dieser Weg erfolgversprechend erschien, wurden die weiteren Arbeiten darauf ausgerichtet.

2. Bisher bekannte Rechenverfahren mit Flächenladungen

Verfahren mit Flächenladungen wurden bisher von verschiedenen Autoren bekannt [20...27], vor allem die «Method of Moments» und die «Teilflächenmethode». Diese Methoden bauen auf denselben mathematischen Grundlagen auf wie das Ladungsverfahren mit diskreten Ladungen, benutzen also Partikulärlösungen der Laplaceschen Potentialgleichung.

Den engsten Bezug zum oben erwähnten Ladungsverfahren hat die «Method of Moments» von *R. F. Harrington* [26; 27], die sowohl mit Flächenladungen als auch mit diskreten Ladungen arbeitet. Im Gegensatz zum erstgenannten Verfahren werden hier aber die Ladungen nicht in ein nicht interessierendes Feldgebiet gelegt, sondern auf die Berandungen des Feldes,

[1]) Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

also beispielsweise auf eine Elektrodenoberfläche. Dafür werden fast ausschliesslich Punktladungen verwendet. Flächenladungen werden dazu benutzt, um Diskontinuitätsstellen zu vermeiden, wenn das Potential oder die Feldstärke in einem Punkt berechnet werden soll, in dem sich eine Punktladung befindet. Diese wird dann durch eine Flächenladung ersetzt. Da hauptsächlich Potentiale von Punktladungen berechnet werden müssen, ist das Verfahren sehr schnell. Ein weiterer Vorzug des Verfahrens liegt darin, dass die entstehende Matrix symmetrisch ist, also nur zur Hälfte im Rechner gespeichert zu werden braucht. Allerdings ist die Anzahl der Ladungen und Konturpunkte sehr gross, so dass der Vorteil der Matrixsymmetrie wieder kompensiert wird. Der grosse Nachteil der «Method of Moments» besteht darin, dass wegen der Diskretisierung der Ladungen auf Elektrodenoberflächen die Feldstärke an den Elektroden nur höchst ungenau bestimmt werden kann, obwohl in den meisten Fällen das Feld gerade dort am stärksten interessiert.

Unter dem Begriff «Teilflächenmethode» wurde ein Verfahren bekannt [20...25], das ausschliesslich mit Flächenladungen arbeitet. Hierbei wird die Berandung des Feldgebietes in einzelne Teilflächen zerlegt, die mit Flächenladungen, vorzugsweise mit konstanter Ladungsdichte, belegt werden. Die Berechnung der Grösse der Ladungen erfolgt wie bei Verwendung diskreter Ladungen, also durch Vorgabe von Konturpunkten und Lösung eines linearen Gleichungssystems. Die Methode wurde in einfacher Form zum erstenmal von *H. Cavendish* [20] vorgestellt. In den fünfziger Jahren griffen *D.K. Reitan* und *T.J. Higgins* [21; 22] das Verfahren auf. Während sie die Elektroden in gleichgrosse Teilflächen zerlegten, passten *A. Kessler, A. Vlcek, O. Zinke* [23] die Grösse der einzelnen Teilflächen der Geometrie der Elektrodenanordnung an, verwendeten also verschieden grosse Teilflächen. *F.J. Berle* [24] und *D. Pflügel* [25] bauten das Verfahren weiter aus und veröffentlichten vor allem Kapazitätsberechnungen von zylindrischen Systemen und rotationssymmetrischen Feldanordnungen. Die zitierten Beispiele sind auf Anordnungen mit verhältnismässig einfachen Konturen beschränkt, wie z. B. parallele Platten, flache Ringe oder quaderförmige Elektroden oder Dielektrika. Wie sich dabei zeigte, eignet sich die «Teilflächenmethode» gut für Kapazitätsberechnungen. Feldstärkeberechnungen mit der «Teilflächenmethode» sind nur in begrenztem Umfang bekannt geworden.

Da die «Teilflächenmethode» die grössten Aussichten bietet, die in der Einführung genannten Aufgaben zu lösen, wurde sie im Hinblick auf diese Zielsetzung näher untersucht.

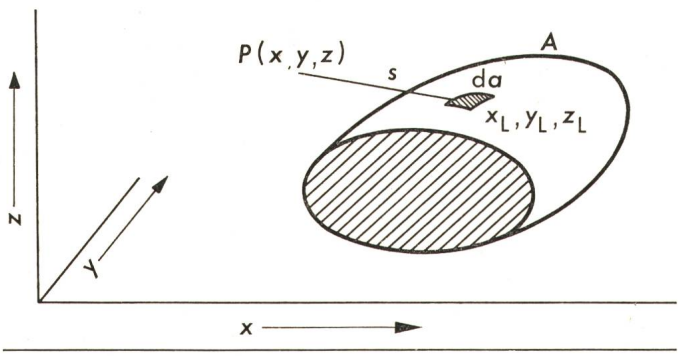

Fig. 1 Flächenladungselement da mit den Koordinaten x_L, y_L, z_L auf der Fläche A und Aufpunkt $P(x, y, z)$ in einem kartesischen Koordinatensystem

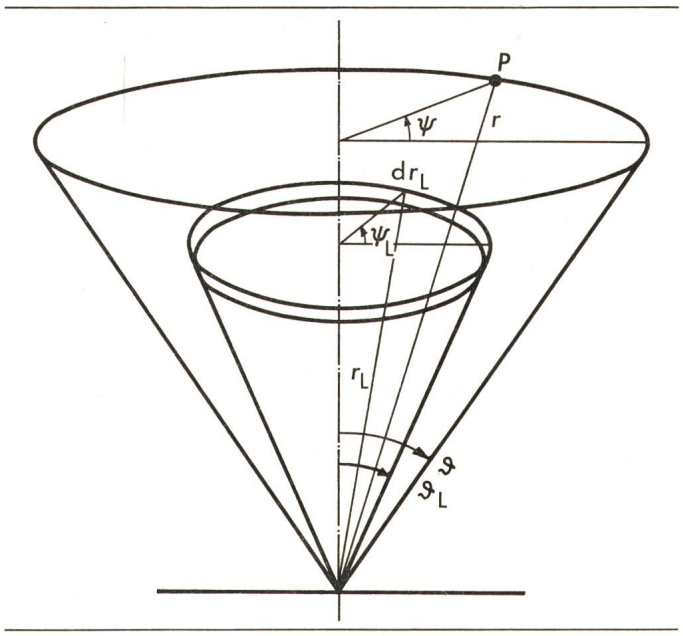

Fig. 2 Kugelkoordinatensystem mit Ladungselement r_L, ϑ_L, ψ_L und Aufpunkt r, ϑ, ψ

3. Potential von Flächenladungen in einigen wichtigen Koordinatensystemen mit Hilfe analytischer Integration

Bei der Teilflächenmethode wird eine Ladungsfläche A in eine Anzahl von T Teilflächen zerlegt, über die bei der Berechnung des Potentials zu summieren ist. Im allgemeinen wurden bisher die Teilflächenladungen σ_j als konstant vorausgesetzt. Wenn x_L, y_L, z_L die Koordinaten des jeweils betrachteten Ladungsflächenelementes da und s den Abstand zwischen diesem Flächenelement und einem Aufpunkt P mit den Koordinaten x, y, z bezeichnen (Fig. 1), lautet das Potential Φ in diesem Aufpunkt:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_{j=1}^{T} \left[\sigma_j \int_{Aj} \frac{da}{s(x, y, z; x_L, y_L, z_L)} \right]$$

Wird das Kugelkoordinatensystem r, ϑ, ψ (Fig. 2) zur Berechnung herangezogen, so können die Flächen ϑ = konstant, also Kegelflächen, mit Ladungen belegt werden. Die Teilflächen stellen dann also Teile von Kegelflächen dar.

Um auch nichtrotationssymmetrische Felder berechnen zu können, soll im folgenden eine Ladungsverteilung angesetzt werden, die in Abhängigkeit des Rotationswinkels periodisch veränderlich ist, nämlich

$$\sigma = \sum_{n=0}^{N} \left[\sigma_n \cos n\psi_L \right]$$

wobei n die Ordnungszahl der jeweiligen Welle und N die Maximalzahl der Oberwellen angeben. Um auch die Möglichkeit zu haben, stetige, nicht sprunghafte Ladungsübergänge zwischen den einzelnen Teilflächen zu erreichen, ist eine Ladungsbelegung vorzusehen, die von der Koordinate r abhängt, und zwar in Form einer Polynom-Verteilung. Damit ergibt sich

$$\sigma = \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} \left[\sigma_{mn} \left(\frac{r_L}{R_0} \right)^m \cos n\psi_L \right]$$

R_0 ist ein beliebiger Bezugsradius, M der höchste Grad der Polynome. Die zunächst unbekannten Koeffizienten σ_{mn}, deren

Anzahl sich für jede Teilfläche j auf $(N+1)\cdot(M+1)$ beläuft, werden, wie beim Ladungsverfahren und bei der «Teilflächenmethode» üblich, über ein lineares Gleichungssystem durch Erfüllung der Randbedingungen in ebenso vielen Konturpunkten ermittelt. Für insgesamt T Teilflächen ergeben sich also $T\cdot(N+1)\cdot(M+1)$ unbekannte Koeffizienten bzw. Konturpunkte.

Die Potentiale für die obige Ladungsverteilung wurden in der Habilitationsschrift des Autors abgeleitet. Sie werden durch unendliche Reihen von zugeordneten Kugelfunktionen dargestellt. Bei der Berechnung dieser Potentiale stellte sich heraus, dass die Reihen zwar konvergieren, jedoch zum Teil sehr langsam. Die Rechnungen, die an der Rechenanlage TR 440 des Leibniz-Rechenzentrums der Bayerischen Akademie der Wissenschaften durchgeführt wurden, benötigten für den Potentialwert aus einem einzigen Ladungsanteil σ_{mn} bis zu 1 s[2]). Mit einer Konvergenzbeschleunigung über Zusatzreihen wurde eine Reduzierung der Rechenzeit auf ein Drittel der ursprünglichen Zeit erzielt.

Mit Hilfe der beschriebenen Methodik wurde ein Testbeispiel durchgerechnet, und zwar die Elektrodenanordnung Kugel–Ebene (Fig. 3). Diese Anordnung wurde einerseits gewählt, weil sie ein Beispiel für den in der Hochspannungstechnik meist gebräuchlichen Fall einer allseits abgerundeten Elektrode ohne Kanten darstellt, anderseits, um einen Vergleich mit der rein analytischen Lösung und mit dem Verfahren der diskreten Ladungen zu erhalten. Wegen der längeren Rechenzeiten, die sich mit Flächenladungen ergeben, wird diese Anordnung normalerweise analytisch oder mit diskreten Ladungen berechnet. Die Kegelflächen werden hier so an die Elektrode angelehnt, dass sie, im Schnitt gesehen, als Sehnen innerhalb der Kreiskontur liegen. Hier zeigt sich neben der langen Rechenzeit der weitere Nachteil, dass sich bei gekrümmten Flächen die Kegelflächen nicht mit der Oberfläche decken können und deshalb an den Übergangsstellen zwischen den einzelnen Teilflächen Knicklinien entstehen, die eine falsche Überhöhung der Feldstärke um maximal 50 bis 100 % an diesen Stellen zur Folge haben. Die Kugel wurde dabei mit 12 Flächen konstanter und linear veränderlicher Ladungsdichte und ebenso vielen Konturpunkten nachgebildet, die Ebene durch Spiegelung der Ladungen an ihr.

Ein weiterer gravierender Nachteil der Kegelflächen besteht darin, dass Stücke von Kreiszylindern damit nicht nachgebildet werden können, also beispielsweise kein kreiszylindrischer Stab, da eine Kegelfläche für $\vartheta = 0$ zu einer Linie wird. Für kreiszylindrische Flächen ist also eine andere Lösung notwendig, die aus dem Kreiszylinder-Koordinatensystem ableitbar ist. Das Potential einer kreiszylindrischen Fläche lässt sich nach [28] durch eine Reihe von Kugelfunktionen angeben.

Um falsche Feldstärkeerhöhungen bei dreidimensional gekrümmten Elektrodenflächen, beispielsweise Kugeln oder Ringen, zu vermeiden, sind dreidimensional gekrümmte Ladungsflächen vorzuziehen. Solche Ladungsflächen sind ableitbar beispielsweise aus dem Kugelkoordinatensystem in Form von Kugelabschnitten. Sie wären aber nur brauchbar für rotationssymmetrische Elektrodenteile, deren Krümmungsmittelpunkt auf der Rotationsachse liegt. Für andere Elektroden müsste beispielsweise das Toroidkoordinatensystem mit Abschnitten von Ringflächen herangezogen werden. Diese Ladungen sind aber mit beliebiger Ladungsverteilung nicht analytisch integrierbar. Aus diesem Grund ist das Toroidkoordinatensystem nur für wenige Fälle geeignet.

[2]) Die Rechenanlage TR 440 kann im Mittel etwa 830 000 Operationen/s oder 2 000 000 Festkomma-Additionen/s durchführen.

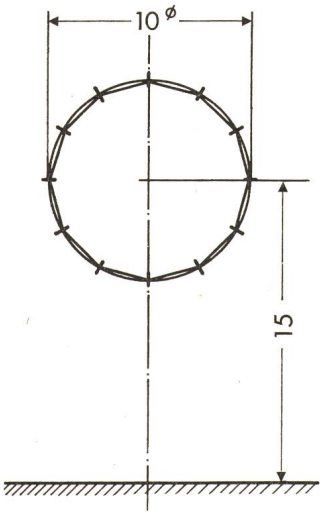

Fig. 3
Feldberechnung für das Testbeispiel Kugel–Ebene
Ladungen auf Kegelflächen an der Kreiskontur
Abmessungen in cm

4. Potential von Flächenladungen mit Hilfe numerischer Integration

Nachdem sich zeigte, dass eine analytische Integration nur in einfachen Fällen zur Potentialberechnung dienen kann, wurde untersucht, welche Ergebnisse eine numerische Integration von Flächenladungen bringt. Die numerische Integration erlaubt es generell, mit Oberflächen beliebiger Form zu rechnen und die Ladungsbelegung frei wählen zu können, so dass sich die Ladungen den Oberflächenkrümmungen und der Geometrie der Elektrodenanordnung anpassen lassen. Da in der Hochspannungstechnik in der Hauptsache Elektrodensysteme mit rotationssymmetrischen Elektrodenteilen auftreten, die allerdings im allgemeinen so gegeneinander angeordnet sind, dass das entstehende Feld nicht mehr rotationssymmetrisch ist, sind die weiteren Überlegungen auf diesen Fall abgestimmt.

4.1 Vorversuche mit einfachen, analytisch lösbaren Integralen

Um Rechenzeit und Genauigkeit der numerischen Integration mit der analytischen Rechenweise vergleichen zu können, wurden Vorversuche mit einfachen, auch auf analytischem Weg lösbaren Integralen gestartet. Dazu diente eine Ringladung nach Fig. 4 mit periodischer Ladungsverteilung. Wenn der Ring mit der Ladungsdichte

$$\lambda = \lambda_n \cos n\psi_L$$

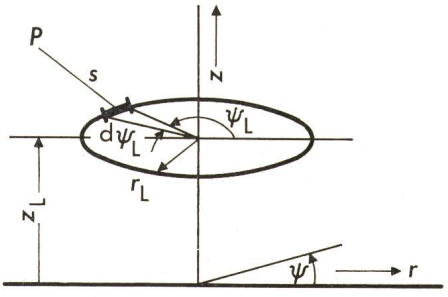

Fig. 4 Ladungselement unter dem Winkel ψ_L auf einer Ringladung auf der Höhe z_L mit dem Radius r_L
Aufpunkt P im Abstand s

belegt wird, berechnet sich das Potential im Punkt $P(r, \psi, z)$ nach [12] aus

$$\Phi(r, \psi, z) = \frac{\lambda_n}{2\pi\varepsilon} \sqrt{\frac{r_L}{r}}\, Q_{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{(z - z_L)^2 + r^2 + r^2{}_L}{2 r r_L}\right) \cos n\psi$$

Die analytische Berechnung dieses Potentials über die Torusfunktion $Q_{n-\frac{1}{2}}$ dauerte an der TR 440 im Mittel 2 ms. Die numerische Integration wurde u. a. durchgeführt mit Hilfe von Gauss-Quadraturen und nach der Simpson-Regel. Da die letztgenannte Methode flexibler ist, wurde sie bevorzugt. Es stellte sich dabei heraus, dass sich damit sehr genaue Ergebnisse für die Potentialwerte erzielen lassen, wenn der Abstand h zwischen zwei Stützstellen nicht konstant gehalten wird, sondern proportional dem Abstand s zwischen jeweiliger Stützstelle und dem interessierenden Aufpunkt gemacht wird. Gute Ergebnisse wurden erzielt mit $h = 0{,}2$ s. Die obere Grenze für h wurde so festgelegt, dass mindestens 21 Stützstellen in einem Ringteilstück π/n lagen. Bei dieser Integration muss vermieden werden, den Aufpunkt auf die Ringladung selbst zu legen, da dieser Fall zu $\Phi \to \infty$ führen würde.

Mit der zuletzt beschriebenen numerischen Integrationsmethode benötigte der Rechner für die Ermittlung eines Potentialwertes im Mittel 20 ms. Im Verhältnis zur analytischen Integration ist hier also für die numerische Integration die zehnfache Rechenzeit erforderlich. Da es zur Berechnung von Flächenladungen aber einer doppelten Integration bedarf und für die numerische Integration die hundertfache Zeit der analytischen Integration zu erwarten ist, wurde für die Berechnung der Potentiale von Flächenladungen ein etwas anderer Weg eingeschlagen.

4.2 Doppelte Integration von Flächenladungen

Für Flächenladungen erweist es sich als vorteilhaft, analytische und numerische Integration zu kombinieren. Dazu werden Ringladungen verwendet, die in einem ersten Schritt analytisch integriert werden und in einem zweiten Schritt koaxial auf der Elektrodenoberfläche aneinandergereiht und numerisch zum Potential von Flächenladungen aufintegriert werden. Auf diese Weise ergibt sich nur eine einzige numerische Integration über die Kurve C_L (Fig. 5), die sich mit Hilfe der Simpson-Regel durchführen lässt. Diese Integration lautet:

$$\Phi(r, \psi, z) = \frac{\cos n\psi}{2\pi\varepsilon} \int_{C_L} \sigma(C_L) \sqrt{\frac{r_L}{r}} \cdot Q_{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{(z - z_L)^2 + r^2 + r_L^2}{2 r r_L}\right) \mathrm{d}C_L$$

Für Konturen C_L mit Kreisbögen sind r_L und z_L trigonometrische Funktionen eines Winkels. Die Funktionen sin und cos erfordern auf dem Rechner verhältnismässig viel Zeit, nämlich rund 90 µs. Da sie bei der numerischen Integration

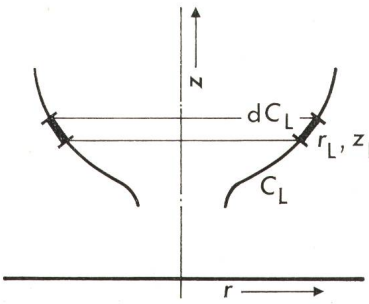

Fig. 5
Numerische Integration über eine Kurve C_L
Ladungselement $\mathrm{d}C_L$ mit den Koordinaten r_L und z_L

mit der Simpson-Regel sehr oft berechnet werden müssen, empfiehlt es sich, diese Berechnungen nach Möglichkeit zu umgehen. Das lässt sich durch Beschreibung der Kontur mit Polynomen zweiten Grades erreichen, indem also ein Kreis durch Parabelstücke ersetzt wird, und zwar für jede Teilkontur, die im Schnitt einer Teilfläche entspricht, eine Parabel. Auf diese Weise ist nur

$$z_L = A + B r_L + C r_L^2$$

zu integrieren mit den Konstanten A, B, C, die sich aus der geometrischen Form der Teilkontur bestimmen. Der Wert von z_L ergibt sich also aus 3 Multiplikationen und 2 Additionen, woraus für die TR 440 ein Rechenaufwand von rund 14 µs folgt. Damit wird aus dem obigen Integral:

$$\Phi(r, \psi, z) = \frac{\cos n\psi}{2\pi\varepsilon} \int_{r_L} \sigma(r_L) \sqrt{\frac{r_L}{r}} \sqrt{1 + (B + 2 C r_L)^2} \cdot Q_{n-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{(z - A - B r_L - C r_L^2)^2 + (r - r_L)^2}{2 r r_L}\right) \mathrm{d}r_L$$

Während für Konturen mit flacher Neigung vorzugsweise $z_L = f(r_L)$ zu setzen ist, erweist sich für stark gegen die z-Ebene geneigte Konturen $r_L = f(z_L)$ günstiger. Die Potentialformel errechnet sich ähnlich wie im Fall $z_L = f(r_L)$.

Wenn in einem Aufpunkt, der auf der Ladungsfläche selbst liegt, das Potential berechnet werden soll, wird es zwar nicht unendlich wie im Fall von Linien- oder Ringladungen, jedoch wächst $Q_{n-\frac{1}{2}}$ über alle Grenzen, so dass eine numerische Integration mit der bisher beschriebenen Methode nicht mehr möglich ist. Für diesen Fall, bei dem das Argument von $Q_{n-\frac{1}{2}}$ nahe 1 liegt, gilt der Näherungsansatz [29]

$$Q_{n-\frac{1}{2}}(1 + \delta) \approx -\gamma + \Psi(n + 0{,}5) + 0{,}5 \cdot \ln 2 - 0{,}5 \cdot \ln \delta$$

mit δ als sehr kleiner Zahl, γ als Eulerscher Konstante und der Funktion Ψ als logarithmischer Ableitung der Gammafunktion. Mit diesem Ansatz kann eine analytische Integration über $\ln \delta$ durchgeführt werden, so dass auch für einen Aufpunkt auf der Ladungsfläche eine Potentialberechnung möglich ist.

Diese analytische Näherungsmethode ist allerdings mit dem Nachteil verbunden, dass viele Sonderfälle zu unterscheiden sind, die grossen Aufwand erfordern. Als schnellerer Weg bot sich ein numerisches Näherungsverfahren an: Es wurde festgestellt, dass bei der Integration nach der Simpson-Regel mit Ladungsintervallen $h \sim s$ die Potentialanteile I_n der einzelnen Intervalle bei Annäherung an den Aufpunkt abnehmen wie Glieder einer geometrischen Reihe:

$$I_i / I_{i-1} = f < 1$$

f ist ein praktisch konstanter Wert und stets < 1. Die numerische Integration nach der Simpson-Regel kann also bei einem Ladungsintervall nahe dem Aufpunkt abgebrochen werden und die Summe der restlichen Potentialanteile bis zum Aufpunkt aus der Summenformel der geometrischen Reihe bestimmt werden. Dieses Näherungsverfahren konnte ohne Schwierigkeit bis auf eine relative Ungenauigkeit von 10^{-5} an die Ergebnisse der analytischen Näherungsmethode mit der Integration über δ herangebracht werden.

Mit den drei Massnahmen

- nur einfache Integration auf numerischem Weg;
- Ersatz der trigonometrischen Funktionen durch Polynome zweiten Grades;
- Verwendung der Summenformel der geometrischen Reihe für Aufpunkte auf den Ladungsflächen

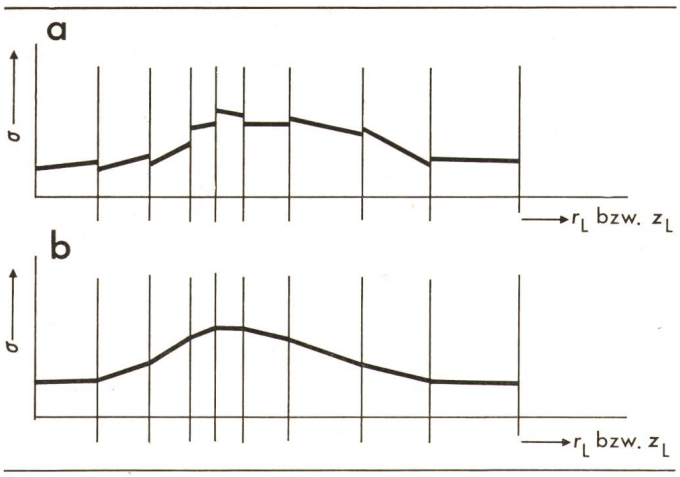

Fig. 6 Qualitatives Beispiel für Ladungsbelegung entlang der numerisch zu integrierenden Kontur

a Überlagerung von konstanter und linearer Ladungsverteilung

b Überlagerung von konstanter und linearer Ladungsverteilung mit der Zusatzbedingung der Stetigkeit

σ Flächenladungsdichte

r_L, z_L Ladungskoordinaten

betrug die Rechenzeit für einen Potentialwert im Mittel nur 6 bis 8 ms, also nur das drei- bis vierfache der Rechenzeit der diskreten Ladungen. Diese Zeit ist durchaus tragbar, da Flächenladungen einen grösseren Bereich überstreichen als diskrete Ladungen und die Berechnung unter Umständen mit einer geringeren Anzahl von Flächenladungen als von diskreten Ladungen durchgeführt werden kann.

4.3 Varianten der Ladungsverteilung auf den Teilflächen

Wie bereits angeklungen ist, wird die Ladungsbelegung entlang der numerisch zu integrierenden Kontur zweckmässigerweise in Form einer Polynom-Verteilung angesetzt. Allerdings ist damit der Ladungsverlauf nicht stetig: An den Übergangsstellen zwischen den einzelnen Teilflächen treten Ladungssprünge auf (Fig. 6a), die die Feldstärkewerte an der Oberfläche verfälschen können, und zwar um so mehr, je grösser die Ladungssprünge sind. Durch die zusätzliche Bedingung, dass die Ladungsdichte am Ende einer Teilfläche gleich der Ladungsdichte am Anfang der folgenden Teilfläche sein soll, kann jedoch die Ladungsstetigkeit erreicht werden. Damit ergeben sich beim Matrixaufbau zwei verschiedene Arten von Bedingungsgleichungen, und zwar Bedingungsgleichungen für die Randbedingungen (meistens Einhaltung vorgegebener Potentiale in den Konturpunkten) und die zuletzt genannten Bedingungsgleichungen für die Ladungsstetigkeit. Da diese Bedingung mathematisch sehr einfach formulierbar ist und auf Grund dessen im entsprechenden Teil der Matrix nur Nullen, Einsen und einige wenige Potenzen von Koordinaten stehen, verkleinert sich die durchschnittliche Rechenzeit für ein Matrixelement erheblich. Für eine lineare Ladungsverteilung ($M = 1$) mit Ladungsstetigkeit ergaben sich an einem Beispiel Rechenzeiten von etwa 3,5 ms für ein Matrixelement.

Fig. 7 zeigt als Beispiel eines Ergebnisses den Verlauf der Ladungsdichte auf der Kugel der Anordnung Kugel–Ebene nach Fig. 3. Die Ladungsflächen, verifiziert durch Parabelgleichungen, schmiegen sich an die Kugeloberfläche an. Der Kurvenzug dieser Figur, der aus Geraden besteht, ist aus 12 gleich grossen Teilstücken zusammengesetzt und hat einen stetigen Verlauf. Die Neigung der $d\sigma/d\alpha$-Ladung im untersten Punkt der Kugel ($\alpha = 0^0$) ist nicht gleich Null, wie es in Wirklichkeit sein müsste. Eine diesbezügliche Verbesserung kann aber leicht erreicht werden durch feinere Einteilung der ersten Teilfläche $0^0 \leqq \alpha \leqq 15^0$. Ansonsten approximiert der Linienzug gut die Wirklichkeit. Eine Steigerung des Grades der Polynome über $M = 1$ hinaus brachte keine spürbare Verbesserung.

4.4 Lage der Konturpunkte

Im Rahmen der Variation der Ladungsverteilung wurde auch die Lage der Konturpunkte auf den Teilflächen geändert. Wie schon aus [25] ersichtlich ist, lassen sich die besten Ergebnisse mit Konturpunkten erzielen, die in der Mitte der jeweiligen Teilkontur liegen. Bei kantigen und eckigen Elektroden, beispielsweise bei Bändern, rückt die optimale Lage der Konturpunkte in Richtung der Kante oder Ecke.

4.5 Feldstärkeberechnung

Während diskrete Ladungen die Potential- und Feldstärkeverteilung nur in einem bestimmten Bereich des Feldes wiedergeben und in unmittelbarer Nähe der Ladungen infolge der Diskretisierung ein der Wirklichkeit nicht entsprechendes Bild erzeugen, bieten Flächenladungen die Möglichkeit, in allen Bereichen der Anordnung ein wirklichkeitsgetreues Feld zu erreichen. Da für die beiden Seiten der Flächenladungen keine getrennten Potentialformeln existieren und eine Differentiation des Potentials in der gewünschten Richtung einen hohen Rechenaufwand fordern würde, wird hier zweckmässigerweise die Feldstärke mit Hilfe einer Differenzenbildung von Potentialen ermittelt. Mit Hilfe dieses Vorgehens ergeben sich automatisch auf den beiden Seiten einer Ladung voneinander ver-

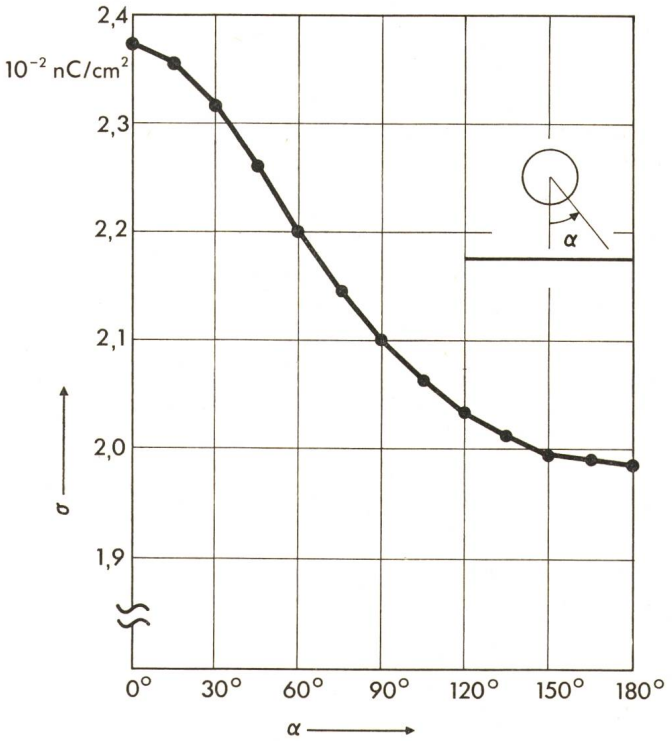

Fig. 7 Errechnete Ladungsverteilung auf den Teilflächen der Anordnung Kugel–Ebene bei Überlagerung von konstanter und linearer Ladungsverteilung mit der Zusatzbedingung der Stetigkeit

σ Flächenladungsdichte

α Umlaufwinkel

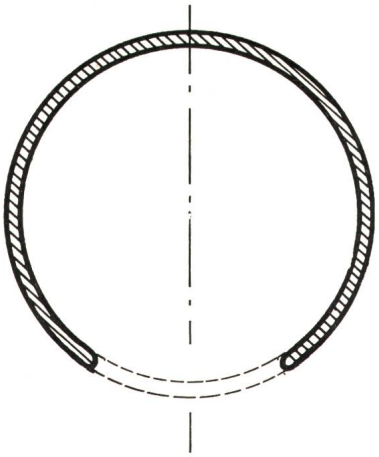

Fig. 8
Kugelförmige Abschirmhaube als Beispiel für eine halboffene Elektrode

schiedene Feldstärken. Im Innern einer Elektrode wird die Feldstärke zu Null, im Gegensatz zur Rechnung mit diskreten Ladungen.

5. Anwendung des Verfahrens zur Feldberechnung

Im Prinzip können Flächenladungen zur Berechnung beliebiger Anordnungen dienen und stellen eine gute Alternative zu diskreten Ladungen dar. Mit den folgenden Anwendungsmöglichkeiten und Beispielen sollen einige Anhaltspunkte gegeben werden, um beide Ladungsarten gegeneinander abwägen zu können.

5.1 Anwendungsmöglichkeiten

Wie in der Einführung bereits erwähnt wurde, sind Flächenladungen vor allem zur feldmässigen Simulation von Elektroden notwendig, die in einer Richtung nur eine geringe Ausdehnung haben. Flächenladungen sind also erforderlich vor allem bei bandförmigen Leitern, bei flachen, abgeplatteten Elektroden und bei Blechen und Metallfolien, beispielsweise bei Belägen von Durchführungen. Da sich bei der Nachbildung von Elektrodenoberflächen mit Flächenladungen auf beiden Seiten der Oberfläche automatisch verschiedene Feldstärken ergeben, kann mit Flächenladungen ohne Schwierigkeiten das Feld einer halboffenen Elektrode, beispielsweise einer Abschirmelektrode (Fig. 8), gleichzeitig in allen Bereichen der Anordnung untersucht werden. Ausserdem ist es möglich, Flächenladungen vorteilhaft bei Feldern mit mehreren Dielektrika einzusetzen.

5.2 Erfassung von dielektrischen Grenzflächen mit Flächenladungen

Zur Erfassung von Dielektrikumssprüngen werden auf die dielektrischen Grenzflächen Flächenladungen gelegt. Die Bedingung, die für die dielektrischen Grenzflächen anzusetzen ist, ergibt sich aus der Konstanz der elektrischen Flussdichte senkrecht zur Grenzfläche oder dementsprechend aus der Relation der Normalfeldstärken im Verhältnis der Dielektrizitätskonstanten der Dielektrika I und II:

$$\frac{E_{\mathrm{IIn}}}{E_{\mathrm{In}}} = \frac{\varepsilon_{\mathrm{I}}}{\varepsilon_{\mathrm{II}}}$$

Im Gegensatz zum Verfahren mit diskreten Ladungen [13] enthält das hier beschriebene Verfahren automatisch die Bedingung der Potentialstetigkeit auf beiden Seiten der dielektrischen Grenzfläche, identisch mit der Stetigkeit der Tangentialfeldstärke an der Grenzfläche [13; 28]. Deshalb ist im Fall der Flächenladungen für jeden Konturpunkt, auch auf den dielektrischen Grenzflächen, nur eine einzige Bedingungsgleichung erforderlich, und die Matrix des Gleichungssystems ist entsprechend kleiner als bei Verwendung diskreter Ladungen.

Die Berechnung von Feldern mit mehreren Dielektrika wurde getestet am Beispiel einer Anordnung aus [13], nämlich einer spannungsführenden Kugelelektrode mit Stabzuführung in einem gasförmigen Medium mit $\varepsilon_r = 1$ über einer geerdeten Ebene. Im Feld befindet sich ein halbkugelförmiges Dielektrikum mit $\varepsilon_r = 4$ (Fig. 9). Die Kugel und der Stab wurden durch 20 diskrete Punkt-, Linien- und Ringladungen nachgebildet, während die dielektrische Grenzfläche durch 12 Flächenladungen simuliert wurde. Bei der Spannung von 1 kV an der Kugel ergaben sich für den Scheitelpunkt der Kugel eine Feldstärke von 0,142 75 kV/cm und für den Scheitelpunkt der dielektrischen Grenzfläche 0,077 54 kV/cm. Die Rechenzeit für dieses Testbeispiel an der Rechenanlage TR 440 betrug 9,5 s.

5.3 Weitere Anwendungsbeispiele

Neben diesem Beispiel wurden weitere Anordnungen berechnet. Dabei kamen diskrete Ladungen zur Verwendung, und wo diese Ladungen nicht sinnvoll waren, wurden Flächenladungen herangezogen. Nach dem Testbeispiel wurde das Feld einer Tellerelektrode untersucht, eine Ringelektrode (Fig. 10) und eine flache Scheibenelektrode (Fig. 11). Ausserdem umfassten die Berechnungen eine gesteuerte Durchführung und einen gesteuerten Kabelendverschluss.

Mit dem Beispiel von Fig. 10 wurde berechnet, welchen Einfluss eine an den spannungsführenden Ring angesetzte Platte auf das Feld in der Umgebung des Ringes hat. Der Ring wurde durch 17 diskrete Ringladungen, die Platte durch 10

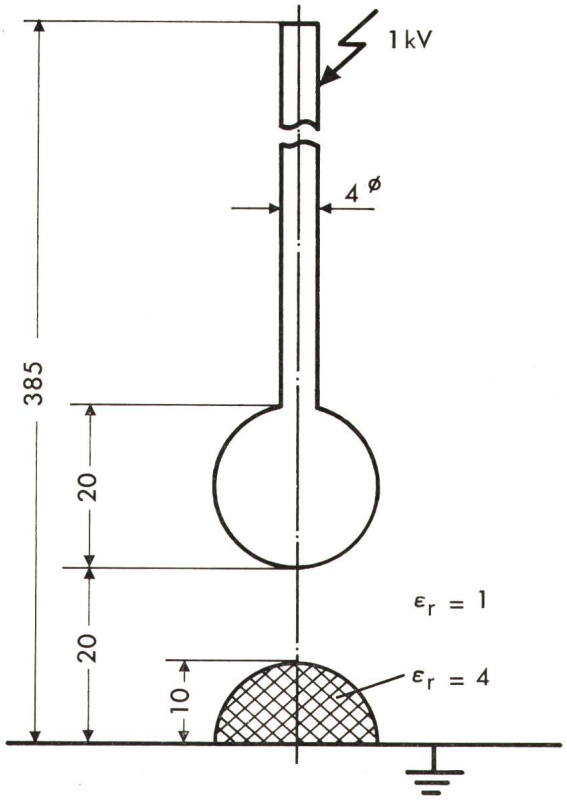

Fig. 9 Testbeispiel Kugel–Ebene mit Stabzuführung und halbkugelförmigem Dielektrikum nach [13]
ε_r Dielektrizitätszahl
Masse in cm

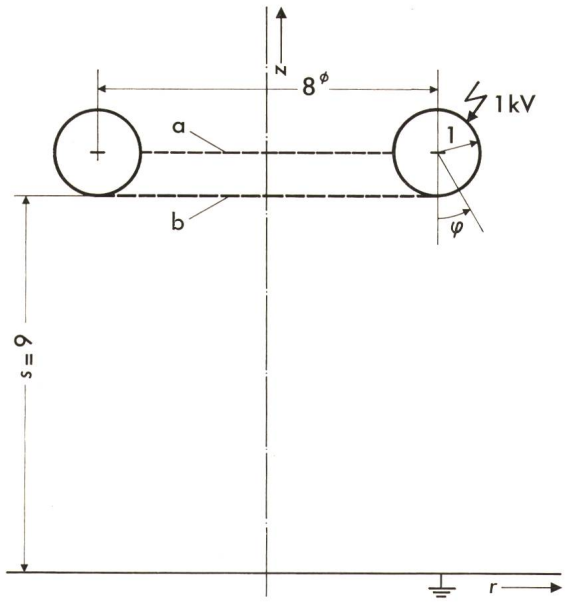

Fig. 10 Ringelektrode gegen Ebene
a Platte in der Mitte angesetzt
b Platte unten angesetzt
r, z Koordinaten
s Elektrodenabstand
φ Umlaufwinkel
Masse in cm

Flächenladungen nachgebildet. In der Nähe des Ansatzpunktes der Platte am Ring wurden die Ladungen jeweils verdichtet. Die Ergebnisse der Feldstärkeberechnung zeigt die Tabelle I. Dabei wurden die Anordnungen

- Ring;
- Ring mit in der Mitte angesetzter Platte;
- Ring mit unten angesetzter Platte

gegen Erde miteinander verglichen. Der Ring hat gegenüber der geerdeten Ebene die Spannung von 1 kV. Wie die Ergebnisse zeigen, werden die Maximalfeldstärken am Ring durch die Platte nur unwesentlich verringert, jedoch ändert sich der Feldverlauf um den Ring ($\varphi = 0...360^0$) grundlegend. Im Fall der in der Mitte angesetzten Platte können die realen Werte $E = 0$ im Ansatzpunkt der Platte ($\varphi = 270^0$) durch das vorliegende numerische Verfahren nicht exakt erreicht werden; die errechneten Werte liegen bei etwa 1% der Maximalfeldstärke. Bei höherer Verdichtung der Ladungen in der Nähe dieses Punktes könnten diese Feldstärken jedoch verringert werden und damit der Wirklichkeit noch näher kommen. Die Feldstärken an der Plattenober- und -unterseite sind gleichzeitig berechenbar; sie unterscheiden sich deutlich voneinander. Die Rechenzeit für diese Anordnung betrug an der TR 440 rund 23 s für den Ring mit Platte und 6,5 s für den Ring ohne Platte.

Das Beispiel von Fig. 11, die Scheibenelektrode, stellt einen Grenzfall dar, bei dem von Fall zu Fall abzuwägen ist, ob sinnvollerweise Flächenladungen oder diskrete Ladungen zu verwenden sind. Am effektivsten erwies sich bei der Berechnung dieser Anordnung eine Überlagerung von 16 Flächenladungen in den beiden ebenen Teilen der Scheibe und 9 Ringladungen im Bereich der Krümmung. Mit diesen insgesamt 25 Ladungen betrug die Rechenzeit 27 s. In Fig. 11 sind einige errechnete Feldstärkenwerte eingetragen. Dieses Beispiel liesse sich auch mit diskreten Ladungen ohne Verwendung von Flächenladungen berechnen. Allerdings läge dann die Zahl der Ladungen mindestens bei 40. Die Matrix des Gleichungssystems und der Speicherplatz im Rechner wären dann entsprechend umfangreicher. Eine Verwendung von multiplen diskreten Ladungen [13] würde zwar diesen Nachteil vermeiden, diese könnten aber bei extrem flachen Elektroden nicht mehr zum Ziel führen.

6. Zusammenfassung

Nach einer Recherche der verschiedenen Methoden, die mit Flächenladungen rechnen, werden in der vorliegenden Arbeit Systeme untersucht, die eine analytische Integration über die Ladungsflächen zur Potentialberechnung erlauben. Auf Grund der mit einer analytischen Integration verbundenen Einschränkungen zielten die weiteren Bemühungen auf eine numerische Integration ab. Um günstige Rechenzeiten zu erreichen, wurde dennoch die analytische Lösung soweit wie möglich mit herangezogen; weiterhin wurden Polynome zweiten Grades anstelle trigonometrischer Funktionen benutzt, und ausserdem kam für Aufpunkte auf Ladungsflächen eine schnelle Approximation zur Verwendung.

Bei der Schilderung der Berechnung einiger Beispiele wurde betont, dass Flächenladungen gegenüber diskreten Ladungen vorteilhaft einzusetzen sind bei den in der Einführung als Zielsetzung genannten Elektroden, bei denen die Ausdehnung in einer Richtung sehr klein ist. Ausserdem wurden dielektrische Grenzflächen als günstige Anwendungsmöglichkeit für Flächenladungen herausgestellt, und schliesslich wurde deutlich gemacht, dass Flächenladungen in manchen Fällen ein kleineres Gleichungssystem und damit weniger Speicherplatz im Rechner erfordern als diskrete Ladungen.

Literatur

[1] *H. Prinz:* Warum Höchstspannungsprüffelder? ETZ-B 21(1969)4, S. 73...78.
[2] *G. Shortley* a. o.: Numerical solutions of axisymmetrical problem, with application to electrostatics and torsion. J. Applied Physics 18(1947)1, p. 116...129.
[3] *R. V. Southwell:* Relaxation methods in engineering science. A treatise on approximate computation. Oxford, Oxford University Press, 1949.
[4] *R. S. Varga:* Matrix iterative analysis. Englewood Cliffs N. J., Prentice Hall, 1962.
[5] *K. J. Binns* and *P. J. Lawrenson:* Analysis and computation of electric and magnetic field problems. Oxford, Pergamon Press, 1963.
[6] *G. E. Forsythe* and *W. R. Wasow:* Finite-difference methods for partial differential equations. New York, John Wiley, 1960.
[7] *D. F. Binns:* Calculation of field factor for a vertical sphere gap, taking account of surrounding earthed surfaces. Proc. IEE 112(1965)8, p. 1575...1582.

Feldstärken in kV/cm für die Anordnung nach Fig. 10 mit und ohne Platte Tabelle I

Stelle	O O	O-O	O-O
Ring			
$\varphi = 0^0$	0,379	0,368	0,310
30^0	0,450	0,445	0,428
60^0	0,488	0,485	0,479
90^0	0,493	0,490	0,487
190^0	0,309	0,295	0,299
270^0	0,150	0,007	0,056
300^0	0,193	0,129	0,010
320^0	0,250	0,216	0,004
340^0	0,316	0,297	0,002
Maximum	0,494	0,492	0,487
Platte r = 0			
Unterseite	–	0,115	0,163
Oberseite	–	0,097	0,055

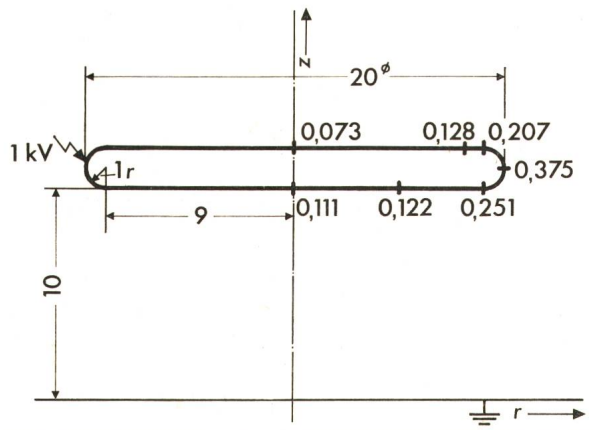

Fig. 11 Scheibenelektrode gegen Ebene

Feldstärkenwerte in kV/cm an die Elektrode angeschrieben
r, *z* Koordinaten
Masse in cm

[8] *R. H. Galloway, H. M. Ryan* and *M. F. Scott:* Calculation of electric fields by digital computer. Proc. IEE 114(1967)6, p. 824...829.

[9] *O. C. Zienkiewicz* and *Y. K. Cheung:* The finite element method in structural and continuum mechanics. Numerical solution of problems in structural and continuum mechanics. London a. o., McGraw-Hill, 1967.

[10] *H. Böcker* und *K. K. Reichert:* Digitale Berechnung von elektrischen Feldern in metallgekapselten Anlagen. ETZ-A 94(1973)7, S. 374...377.

[11] *H. Steinbigler:* Anfangsfeldstärken und Ausnutzungsfaktoren rotationssymmetrischer Elektrodenanordnungen in Luft. Dissertation der Technischen Hochschule München, 1969.

[12] *H. Singer:* Das Hochspannungsfeld von Gitterelektroden. Dissertation der Technischen Hochschule München, 1969.

[13] *P. Weiss:* Rotationssymmetrische Zweistoffdielektrika. Dissertation der Technischen Universität München, 1972.

[14] *H. Steinbigler:* Digitale Berechnung elektrischer Felder. ETZ-A 90(1969)25, S. 663...666.

[15] *H. Singer:* Die Berechnung des elektrostatischen Feldes von Gittern. ETZ-A 91(1970)5, S. 249...253.

[16] *H. Singer:* Das elektrische Feld von Polycon-Elektroden. Bull. SEV 63(1972)11, S. 579...583.

[17] *J. Moeller, H. Steinbigler* und *P. Weiss:* Feldstärkeverlauf auf Abschirmelektroden für ultrahohe Wechselspannungen. Bull. SEV 63(1972)11, S. 574...578.

[18] *P. Weiss:* Feldstärkeeffekte bei Zweistoffdielektrika. Bull. SEV 63(1972)11, S. 584...588.

[19] *H. Steinbigler, H. Singer* und *S. Berger:* Berechnung der Randfeldstärken von Bündelleitern in Drehstromsystemen. ETZ-A 92(1971)11, S. 612...617.

[20] *H. Cavendish:* Electrical researches. Edited by J. C. Maxwell. Cambridge, University Press, 1879.

[21] *T. J. Higgins* and *D. K. Reitan:* Calculation of the capacitance of a circular annulus by the method of subareas. Trans. AIEE Part I, Communications and Electronics 70(1951)-, p. 926...933.

[22] *D. K. Reitan:* Accurate determination of the capacitance of rectangular parallel-plate capacitors. J. Applied Physics 30(1959)2, p. 172...176.

[23] *A. Kessler, A. Vlcek* und *O. Zinke:* Methoden zur Bestimmung von Kapazitäten unter besonderer Berücksichtigung der Teilflächenmethode. AEÜ 16(1962)8, S. 365...380.

[24] *F. J. Berle:* Untersuchung der Teilflächenmethode bei der Kapazitätsberechnung von geschlitzten koaxialen Leitungen. Z. Schwing- und Schwachstromtechnik 21(1967)11, S. 333...343.

[25] *D. Pflügel:* Über die Teilflächenmethode zur Bestimmung der Kapazität beliebiger Leiter. Z. Angew. Physik 23(1967)-, S. 89...94.

[26] *R. F. Harrington:* Field computation by moment methods. New York, Macmillan, 1968.

[27] *R. F. Harrington* a. o.: Computation of Laplacian potentials by an equivalentsource method. Proc. IEE 116(1969)10, p. 1715...1720.

[28] *E. Durand:* Electrostatique. 3 volumes. Paris, Masson, 1964...1966.

[29] *W. Magnus, F. Oberhettinger* and *R. P. Soni:* Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics. Third edition. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 52. Berlin a. o., Springer, 1966.

Adresse des Autors:

Priv.-Doz. Dr.-Ing. *H. Singer,* Institut für Hochspannungs- und Anlagentechnik der TU München, Arcisstrasse 21, D-8 München 2.