

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins  
**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke  
**Band:** 64 (1973)  
**Heft:** 26

**Artikel:** Behandlung von Gleichstrommaschinen mit dem Poynting-Vektor  
**Autor:** Palit, B.B.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-915645>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Behandlung von Gleichstrommaschinen mit dem Poynting-Vektor

Von B. B. Palit

621.313.2 : 512.99

In dieser Arbeit werden die stationären Vorgänge in Gleichstrommaschinen unter Anwendung des Poynting-Vektors untersucht. In der Luftspaltmitte bzw. an der unmittelbaren Ankeroberfläche der Gleichstrommaschinen werden die verschiedenen Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärken ermittelt und aus diesen dann die Komponenten des Poynting-Vektors und seine Divergenz gebildet. Die gesamte Leistung, die durch die Ankeroberfläche bzw. durch den Luftspalt hindurchströmt, wird entweder aus dem Hüllenintegral der radialen Komponente des Poynting-Vektors oder aus dem Volumenintegral der Divergenz des Poynting-Vektors bestimmt. Verschiedene Betriebsfälle werden unter vereinfachten Bedingungen behandelt, wie z. B. der Leerlauf und die Belastung, die letztere unter besonderer Berücksichtigung der Ohmschen Verluste im Ankerkreis, der Ankerrückwirkung und der Kompensationswicklung. Weiterhin wird bei gesättigtem Eisen das elektromagnetisch entwickelte Drehmoment untersucht, wobei bei kompensierten Gleichstrommaschinen auch der Grad der Kompensation berücksichtigt wird.

L'auteur examine les processus stationnaires dans des machines à courant continu, en appliquant le vecteur de Poynting. Au centre de l'entrefer, à proximité immédiate de la surface de l'induit de ces machines, on détermine les différentes composantes des champs électriques et magnétiques, puis forme les composantes du vecteur de Poynting et sa divergence. La puissance globale qui traverse la surface de l'induit et l'entrefer est déterminée soit d'après l'intégrale de l'enveloppe des composantes radiales du vecteur de Poynting, soit d'après l'intégrale volumique de la divergence de ce vecteur. Divers cas de service sont traités dans des conditions simplifiées, par exemple de la marche à vide et de la charge, cette dernière en tenant particulièrement compte des pertes résistives dans le circuit d'induit, de la réaction d'induit et de l'enroulement de compensation. L'auteur examine en outre le couple développé électromagnétiquement, dans le cas de saturation du fer, compte tenu du degré de la compensation de machines à courant continu compensées.

## 1. Einleitung

Im allgemeinen geht man zur Untersuchung des stationären Verhaltens von elektrischen Maschinen von deren elektrischen und magnetischen Ersatzkreis aus. Zum gleichen Zweck können auch die Methoden der Feldtheorie angewendet werden [1]<sup>1)</sup>. Aus der Literatur [2] geht hervor, dass sich sämtliche aus der Feldtheorie herrührenden Betrachtungsweisen über elektrische Maschinen unter vier Methoden einordnen lassen. Eine von den vier Methoden befasst sich mit der Energieströmung durch verschiedene Bauteile der elektrischen Maschinen.

Der Vektor der Energieströmung, genannt nach dem englischen Physiker *J. H. Poynting*, gibt den Betrag der Leistungsdichte sowie die Richtung des Leistungsflusses an. Der Poynting-Vektor wird häufig in der Nachrichtentechnik angewendet, wo man besonders die Antennengröße und die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen bei Hochfrequenzen berechnen will.

Der Poynting-Vektor kann in elektrischen Maschinen definiert und berechnet werden, da zwischen dem Stator und Rotor die elektromagnetische Energie im Luftspalt hindurchströmen muss. In der vorliegenden Arbeit werden die Betrachtungen mit dem Poynting-Vektor nur auf Gleichstrommaschinen beschränkt. Über die Energieströmung in Gleichstrommaschinen ist bisher nur eine einzige Arbeit [3] veröffentlicht worden, die

sich einigermaßen ausführlich mit den Gleichstrommaschinen befasst. Wegen der nicht sehr einfachen Darstellung in dieser Arbeit, die mehrere unterschiedliche Koordinatensysteme benutzt, und wegen der fehlenden Berücksichtigung der Ankerrückwirkung sowie der Kompensation des Ankerfeldes, ist der Anlass gegeben, in einer analytischen Arbeit die Gleichstrommaschinen systematisch zu untersuchen, insbesondere ihre nichtbehandelten Themen unter besonderer Berücksichtigung des Poyntingschen Satzes der Feldtheorie.

## 2. Poynting-Vektor

Die Definition des Poynting-Vektors ist laut [4]:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1)$$

wobei  $\mathbf{E}$  die elektrische Feldstärke und  $\mathbf{H}$  magnetische Feldstärken sind. Der Vektor  $\mathbf{S}$  kann so gedeutet werden, dass er gerade diejenige Energie bestimmt, die pro Zeiteinheit durch die senkrecht zu  $\mathbf{S}$  stehende Einheitsfläche hindurchströmt, d. h., er wird in  $\text{W}/\text{m}^2$  gemessen. Dieser Vektor hat also die Dimension: Leistung/Fläche. Er wird Vektor der Energieströmungsdichte oder der Energiestrahlungsdichte oder einfach Poynting-Vektor genannt. Er steht also senkrecht sowohl zur Richtung von  $\mathbf{E}$  als auch zu der von  $\mathbf{H}$  (Fig. 1), sein Betrag ist nach der Regel der vektoriellen Multiplikation gegeben durch das Produkt aus den Absolutwerten von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  und dem Sinus des eingeschlossenen Zwischenwinkels  $\beta$  [5]:

$$|\mathbf{S}| = |\mathbf{E}| \cdot |\mathbf{H}| \cdot \sin \beta \quad (2)$$

Die durch das Flächenelement  $d\mathbf{A}$  hindurchströmende Leistung beträgt  $\mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$ . Die Existenz des Poynting-Vektors kann experimentell nur in der Integralform nachgewiesen werden. Nur das über eine geschlossene Fläche gebildete Hüllenintegral

$$\oint_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = \oint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{A} \quad (3)$$

hat einen physikalischen Sinn. Das Integral ergibt diejenige Leistung, die aus dem gegebenen Volumen, das die Hüllfläche umschliesst, herausströmt.

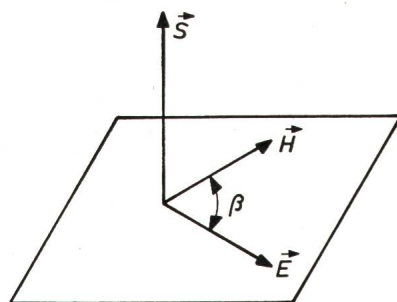


Fig. 1  
Dichte der Energieströme

<sup>1)</sup> Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

Die Energieströmung kann also in einfacher Weise berechnet werden, wenn die elektrischen und magnetischen Feldstärken bekannt sind.

### 3. Voraussetzungen

Es geht in dieser Arbeit in erster Linie um eine Betrachtungsweise mit analytisch geschlossenen Lösungen. Auf dem Wege zu den Lösungen musste eine Reihe von Annahmen und Vereinfachungen getroffen werden, die zu einer gewissen Idealisierung der Gleichstrommaschine geführt haben. Die folgenden Bedingungen wurden in der Arbeit vorausgesetzt:

3.1 Die Feldlinien von Erreger- und Ankernutzfluss sind stets radial gerichtet, auch bei magnetischer Sättigung des Eisens.

3.2 Die Ankerleiter sind sehr dünn und liegen nahe an der Ankeroberfläche.

3.3 Die Ankerwicklung besteht aus einer einfachen zweischichtigen ungesehnten Schleifenwicklung mit einem einzigen Leiter pro Spulenseite. Es gibt also zwei Leiter pro Nut. Die Kommutatorzahl ist gleich der Nutenzahl.

3.4 Die Kommutation ist linear. Die Wendepole werden nicht berücksichtigt.

3.5 Der Einfluss von Nuten und Kühlschlitzen auf den Feldverlauf wird nicht berücksichtigt.

3.6 Der magnetische Leitwert des ungesättigten Eisens ist sehr gross.

3.7 Die Kennlinie der Induktion in Abhängigkeit der Durchflutung im Luftspalt besteht aus zwei Geraden.

3.8 Der magnetische Widerstand des Luftspaltes ausserhalb von Polschuhen ist unendlich gross. Demzufolge spielen sich die elektromagnetischen Vorgänge nur im Luftspalt unterhalb der Polschuhe ab.

3.9 Die Luftspaltlänge ist im Vergleich zum Ankerdurchmesser sehr klein. Die in der Luftspaltmitte betrachteten Grössen in radialer Richtung sind also unabhängig vom Radius des Ankers.

3.10 Die Kenntnisse der Feldtheorie und der Wirkungsweise von Gleichstrommaschinen werden in dieser Arbeit vorausgesetzt.

Eventuelle weitere Annahmen werden im Text an den entsprechenden Stellen erwähnt.

### 4. Maxwell'sche Gleichungen und deren Anwendung in Gleichstrommaschinen

Die Maxwell'schen Hauptgleichungen der Elektrizitätstheorie lauten:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$\mathbf{E}$  in Gl. (4) ist die Feldstärke infolge des Spannungsabfalles pro Längeneinheit. Bei Vernachlässigung der Verschiebungs- und Raumladungsdichte sowie der zeitlichen Änderung der Induktion, also bei

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= 0 \\ \rho &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

gelten für das stationäre Verhalten der Gleichstrommaschinen die Maxwell'schen Gleichungen in folgender Form:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Aus den Gln. (5) wird in den nachfolgenden Abschnitten lediglich die erste Beziehung verwendet.

### 5. Leerlauf

Zur analytischen Behandlung der Gleichstrommaschinen soll das Zylinderkoordinatensystem verwendet werden. Unter Vernachlässigung der Eisensättigung lassen sich die magnetischen Grössen dann vektoriell wie folgt ausdrücken:

$$\mathbf{H} = H_{\varphi}^e = H_{\varphi}^e \mathbf{e}_{\varphi} \quad (6)$$

$$\mathbf{B} = B_{\varphi}^e = \mu_0 H_{\varphi}^e \mathbf{e}_{\varphi} \quad (7)$$

Dabei gilt:

$$H_{\varphi}^e = \frac{\Theta_e}{2\delta} \quad (8)$$

Die magnetischen Feldstärken und Flussdichten sind sowohl mit einem hoch- als auch mit einem tiefgestellten Index versehen. Der tiefgestellte Index deutet auf die Koordinate und der hochgestellte Index auf die das Feld erzeugende Wicklung hin. Die in Gl. (6), (7) und (8) verwendeten Buchstabensymbole haben folgende Bedeutung:

- $H_{\varphi}^e$  durch die Erregerwicklung erzeugte radiale magnetische Feldstärke im Luftspalt;
- $B_{\varphi}^e$  Luftspaltinduktion von der Erregung her;
- $\Theta_e$  Erregerdurchflutung pro Polpaar;
- $\delta$  Luftspaltlänge;
- $\mu_0$  magnetische Permeabilität des leeren Raumes.

Die Umfangsgeschwindigkeit des Ankers ist konstant und lautet:

$$\mathbf{v} = v_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi} \quad (9)$$

Aus der ersten Beziehung der Gl. (5) und unter Anwendung von Gl. (7) und (9) folgt für die elektrische Feldstärke

$$\mathbf{E} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mu_0 v_{\varphi} H_{\varphi}^e \mathbf{e}_z \quad (10)$$

Aus Gl. (10) entnimmt man dann für die elektrische Feldstärke in axialer Richtung:

$$E_z = \mu_0 v_{\varphi} H_{\varphi}^e \quad (11)$$

$E_z$  wird in den Ankerleitern induziert. Da die Ankerleiter am ganzen Umfang verteilt sind, entsteht auch ein elektrisches Feld zwischen den benachbarten Leitern. Diese in tangentialer Richtung wirkende Feldstärke lautet:

$$E_{\varphi} = E_z \frac{2l}{\tau_N} \quad (12)$$

wobei

- $l$  Länge der Ankerleiter
- $\tau_N$  Nutteilung

Aus Gl. (1) folgt für den Poynting-Vektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \\ &= (E_r \mathbf{e}_r + E_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi} + E_z \mathbf{e}_z) \times (H_r \mathbf{e}_r + H_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi} + H_z \mathbf{e}_z) = \\ &= (E_{\varphi} H_z - E_z H_{\varphi}) \mathbf{e}_r + (E_z H_r - E_r H_z) \mathbf{e}_{\varphi} + \\ &\quad + (E_r H_{\varphi} - E_{\varphi} H_r) \mathbf{e}_z = \\ &= S_r \mathbf{e}_r + S_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi} + S_z \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (13)$$

Nun gelten folgende Bedingungen bei einer idealen Gleichstrommaschine:

- $H_z = 0$ , weil der Ankerstrom in  $z$ -Richtung fliesst und infolgedessen keine magnetische Feldstärke in dieser Richtung erzeugen kann.

$H_\varphi = 0$  in der Luftspaltmitte. Dort wird, abgesehen vom letzten Abschnitt (Abschnitt Nr. 9), der Poynting-Vektor immer betrachtet.

$E_r = 0$ , da die Ankerleiter konstruktionsmässig nicht in radialer Richtung, sondern kreisförmig verteilt sind.

$H_r = H_\varphi$  beim Leerlauf.

Unter Berücksichtigung der obigen Bedingungen lassen sich die Komponenten des Poynting-Vektors in der Luftspaltmitte aus Gl. (13) herleiten:

$$\begin{aligned} S_r &= E_\varphi H_z - E_z H_\varphi = 0 \\ S_\varphi &= E_z H_r - E_r H_z = E_z H_\varphi \\ S_z &= E_r H_\varphi - E_\varphi H_r = -E_\varphi H_\varphi \end{aligned} \quad (14)$$

Der Poynting-Vektor lautet dann unter Anwendung von Gl. (12) und (14):

$$\mathbf{S} = S_\varphi \mathbf{e}_\varphi + S_z \mathbf{e}_z = \left( E_z \mathbf{e}_\varphi - E_\varphi \frac{2l}{\tau_N} \mathbf{e}_z \right) H_\varphi \quad (15)$$

Der Betrag des Poynting-Vektors ist nicht gleich Null, da beide Grössen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  existieren. Die beiden Terme der Gl. (15) sind aber von ihren Koordinaten unabhängig. Somit stellt auch  $\mathbf{S}$  eine konstante Grösse dar. Der Poynting-Vektor wird dann nicht existieren, wenn die Maschine entweder stillsteht oder nicht erregt wird.

Der Poynting-Vektor unter den beiden Polschuhen einer zweipoligen Gleichstrommaschine ist gleich gross und von gleicher Polarität, da die Vorzeichen von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  unter jedem Polschuh zugleich wechseln.

Die Existenz von  $\mathbf{S}$  im idealen Leerlauf von Gleichstrommaschinen stösst auf Widerspruch, da physikalisch keine Energie durch den Luftspalt hindurchströmt. Man erhält jedoch ein eindeutiges Ergebnis, sobald entweder  $\mathbf{S}$  über die geschlossene Ankeroberfläche oder  $\text{div } \mathbf{S}$  über das Luftspaltvolumen integriert wird. Die Divergenz von  $\mathbf{S}$  stellt physikalisch die Leistung pro Volumen dar, die in einer beliebigen Raumeinheit erzeugt bzw. verbraucht wird. Existiert die Divergenz in einem Raum, dann ist dieser Raum eine Quelle bzw. Senke, je nachdem, ob die Leistung erzeugt bzw. verbraucht wird.

$\text{div } \mathbf{S}$  wird im Zylinderkoordinatensystem durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\text{div } \mathbf{S} = \frac{S_r}{r} + \frac{\partial S_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial S_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_z}{\partial z} \quad (16)$$

Aus Gl. (8), (11), (12) und (14) lassen sich die Komponenten des Poynting-Vektors in der Luftspaltmitte wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} S_r &= 0 \\ S_\varphi &= E_z H_\varphi = \mu_0 v_\varphi \left( \frac{\Theta_e}{2\delta} \right)^2 = \text{konstant} \end{aligned} \quad (17)$$

$$S_z = -E_\varphi H_\varphi \frac{2l}{\tau_N} = -\mu_0 v_\varphi \left( \frac{\Theta_e}{2\delta} \right)^2 \frac{2l}{\tau_N} = \text{konstant}$$

Aus Gl. (17) ersieht man, dass  $S_\varphi$  und  $S_z$  konstant sind. Ihre Ableitungen nach  $\varphi$  bzw.  $z$  sind deshalb gleich Null. Entsprechend Gl. (16) ergibt sich dann:

$$\text{div } \mathbf{S} = 0 \quad (18)$$

Im idealen Leerlauf wird weder Leistung erzeugt noch verbraucht. Gl. (18) stimmt also mit der physikalischen Bedingung in Gleichstrommaschinen überein.

## 6. Belastung

Für die Betrachtung mit dem Poynting-Vektor wird in der vorliegenden Arbeit der Motorbetrieb der Gleichstrommaschinen vorausgesetzt (Fig. 2). Dies geht auch aus Fig. 3 hervor, wo man ersieht, dass das Feld an den auflaufenden Polkanten verstärkt und an den ablaufenden geschwächt wird. Bei der Belastung der Gleichstrommaschinen kommt nun im Luftspalt ausser der Erregerfeldstärke noch die Ankerfeldstärke hinzu (Fig. 3). In diesem Abschnitt wird die Eisensättigung und somit die Ankerrückwirkung nicht berücksichtigt. Die Flussdichte ist proportional zur resultierenden magnetischen Feldstärke, beide im Luftspalt unter dem Polschuh betrachtet. Es gilt dann:

$$\mathbf{H} = H_r(\varphi) \mathbf{e}_r \quad (19)$$

$$H_r(\varphi) = H_\varphi + H_r^a(\varphi) \quad (20)$$

Gemäss dem gewählten Koordinatenursprung in Fig. 3 gilt für die Ankerfeldstärke:

$$H_r^a(\varphi) = -\frac{2p}{\alpha\pi} \varphi \hat{H}_r^a \quad (21)$$

$\varphi$  ist der räumliche Winkel als unabhängige Variable. Der Winkel wird in Radians ausgedrückt.  $\hat{H}_r^a$  ist die Ankerfeldstärke an der Stelle

$$\varphi = \frac{\alpha\pi}{2p}$$

Der Betrag von  $\hat{H}_r^a$  ist:

$$\hat{H}_r^a = \frac{I_a \alpha Z}{8ap\delta} \quad (22)$$

- $I_a$  Ankerstrom
- $\alpha$  Polbedeckungsfaktor
- $a$  Ankerzweigpaar
- $p$  Polpaarzahl
- $Z$  gesamte Leiterzahl am Ankerumfang

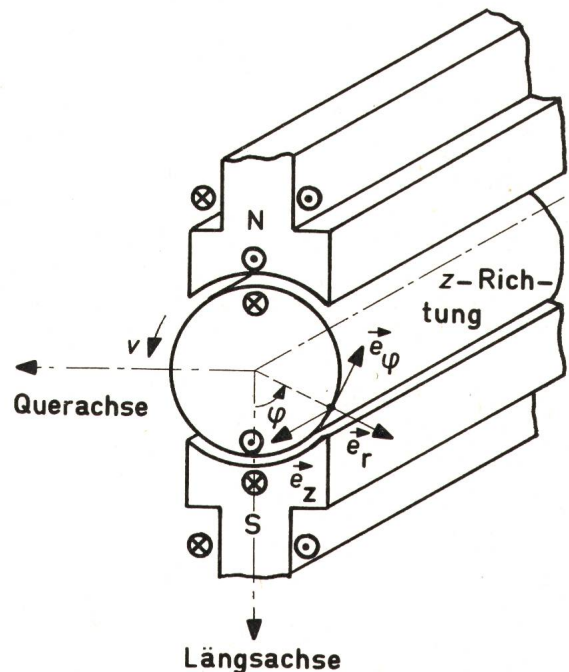


Fig. 2  
Schematische Darstellung einer zweipoligen Gleichstrommaschine im Zylinderkoordinatensystem, bei Motorbetrieb

Die resultierende magnetische Feldstärke in radialer Richtung lautet gemäss Gl. (20) und unter Anwendung von Gl. (21):

$$H_r(\varphi) = H_r^e - \frac{2p}{\alpha\pi} \varphi \hat{H}_r^a \quad (23)$$

Die elektrische Feldstärke  $E_z$  kann nun in Analogie zu Gl. (11) und unter Benützung von Gl. (23) bestimmt werden.

$$E_z(\varphi) = \mu_0 v_\varphi \left( H_r^e - \frac{2p}{\alpha\pi} \varphi \hat{H}_r^a \right) \quad (24)$$

Um die elektrische Feldstärke  $E_\varphi$  zwischen den benachbarten Leitern zu bestimmen, muss man zuerst die Spannungsdifferenz zwischen zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$  mit den Koordinaten  $\left(\frac{1}{2}D, \varphi, z\right)$  und  $\left(\frac{1}{2}D, \varphi + \frac{2\tau_N}{D}, z\right)$  bilden und dann diese Spannungsdifferenz durch die Nutteilung  $\tau_N$  dividieren.  $D$  ist dabei der Ankerdurchmesser (Fig. 4).

$$\begin{aligned} E_\varphi(\varphi, z) &= \frac{\Delta U}{\tau_N} = \\ &= \frac{(l-z)E_z(\varphi) + lE_z(\varphi + \pi) + zE_z\left(\varphi + \frac{2\tau_N}{D}\right)}{\tau_N} \end{aligned}$$

$$\text{Aber } E_z(\varphi + \pi) = E_z(\varphi),$$

$$\begin{aligned} \text{somit } E_\varphi(\varphi, z) &= \frac{2l}{\tau_N} E_z(\varphi) + z \frac{E_z\left(\varphi + \frac{2\tau_N}{D}\right) - E_z(\varphi)}{\tau_N} = \\ &= \frac{2l}{\tau_N} E_z(\varphi) + \frac{2z}{D} \cdot \frac{dE_z(\varphi)}{d\varphi} \end{aligned} \quad (25)$$

Setzt man Gl. (24) in Gl. (25) ein, so erhält man:

$$E_\varphi(\varphi, z) = 2\mu_0 v_\varphi \left[ \frac{l}{\tau_N} H_r^e - \frac{2p}{\alpha\pi} \hat{H}_r^a \left( \frac{l}{\tau_N} \varphi + \frac{z}{D} \right) \right] \quad (26)$$

Wie bereits bekannt, gelten:

$$\begin{aligned} H_\varphi &= H_z = E_r = 0 \\ H_r &= H_r(\varphi) \\ E_z &= E_z(\varphi) \\ E_\varphi &= E_\varphi(\varphi, z) \end{aligned} \quad (27)$$

Im folgenden wird zuerst Gl. (27) in Gl. (14) eingesetzt. Anschliessend lassen sich die Komponenten des Poynting-Vektors in der Luftspaltmitte unter Benützung von Gl. (23), (24) und (26) wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} S_r &= 0 \\ S_\varphi &= E_z(\varphi) \cdot H_r(\varphi) = \mu_0 v_\varphi \left( H_r^e - \frac{2p}{\alpha\pi} \varphi \hat{H}_r^a \right)^2 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} S_z &= -E_\varphi(\varphi, z) \cdot H_r(\varphi) = \\ &= -2\mu_0 v_\varphi \left( H_r^e - \frac{2p}{\alpha\pi} \varphi \hat{H}_r^a \right) \left[ \frac{l}{\tau_N} H_r^e - \frac{2p}{\alpha\pi} \hat{H}_r^a \left( \frac{l}{\tau_N} \varphi + \frac{z}{D} \right) \right] \end{aligned}$$

Die  $S_\varphi$ - und  $S_z$ -Komponenten des Poynting-Vektors bei Belastung der Maschine stellen im Gegensatz zum Leerlauf keine konstanten Grössen dar. Aus Gl. (16) lässt sich die Divergenz von  $\mathbf{S}$  unter Verwendung von Gl. (28) bestimmen.

$$\text{div } \mathbf{S} = -\frac{2\mu_0 v_\varphi}{D} \left( H_r^e - \frac{2p}{\alpha\pi} \varphi \hat{H}_r^a \right) \frac{2p}{\alpha\pi} \hat{H}_r^a \quad (29)$$

Bei Belastung der Maschine ist  $\text{div } \mathbf{S}$  ungleich Null. Setzt man  $\hat{H}_r^a = 0$  ein, so verschwindet  $\text{div } \mathbf{S}$ . Dieser Fall entspricht dann dem Leerlauf.

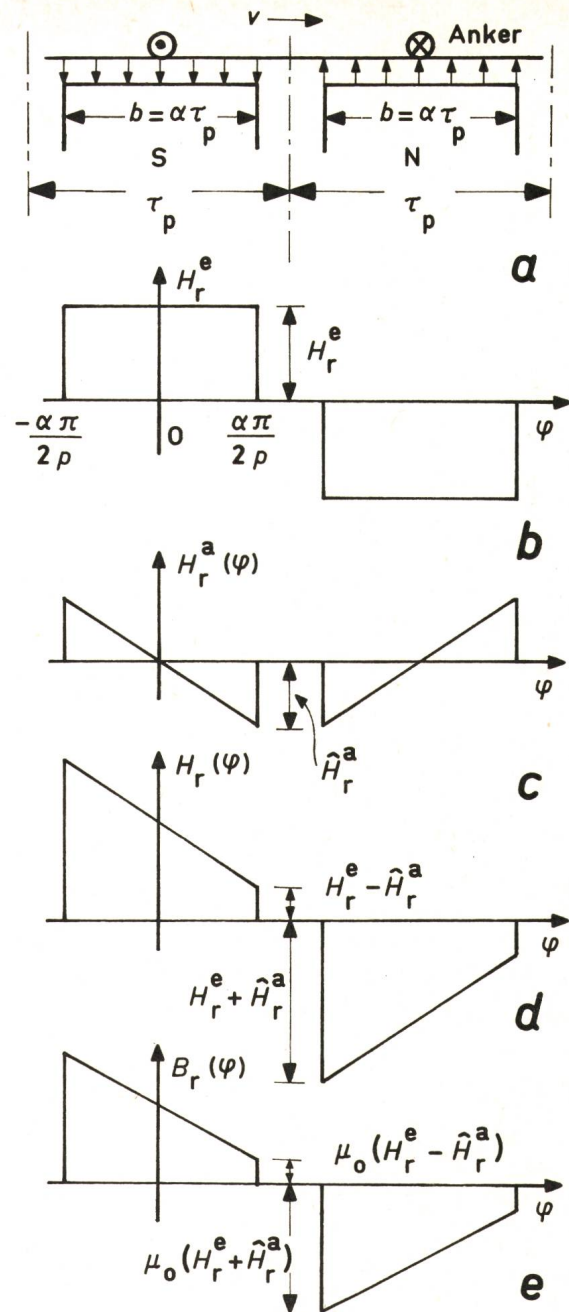


Fig. 3

Feldkurven im Luftspalt bei abgewickelter Maschine

- a Abwicklung der Maschine
  - b Verlauf der Erregerfeldstärke
  - c Verlauf der Ankerfeldstärke
  - d Verlauf der resultierenden magnetischen Feldstärke im Luftspalt
  - e Verlauf der resultierenden Flussdichte im Luftspalt
- Bezeichnungen siehe im Text

Der Poynting-Vektor ist das vektorielle Produkt der elektrischen mit der magnetischen Feldstärke. Aber die elektrische Feldstärke in Gleichstrommaschinen, wie in allen rotierenden elektrischen Maschinen, ist die Folge der magnetischen Feldstärke von der Erregung her. In den Ausdrücken der Komponenten von  $\mathbf{S}$  kommt also die Erregerfeldstärke wiederholt vor. Es wird im folgenden bewiesen, dass die Erregerfeldstärke, die schon als Ursache für die elektrische Feldstärke gilt, nicht mehr bei der Bestimmung des Poynting-Vektors berücksichtigt werden muss. Dies bedeutet, dass die Divergenz des vektoriellen Produktes aus der elektrischen Feldstärke  $\mathbf{E}$  und der magnetischen Feldstärke  $\mathbf{H}_r^e$  gleich Null ist, also

$$\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}_r^e) = 0$$

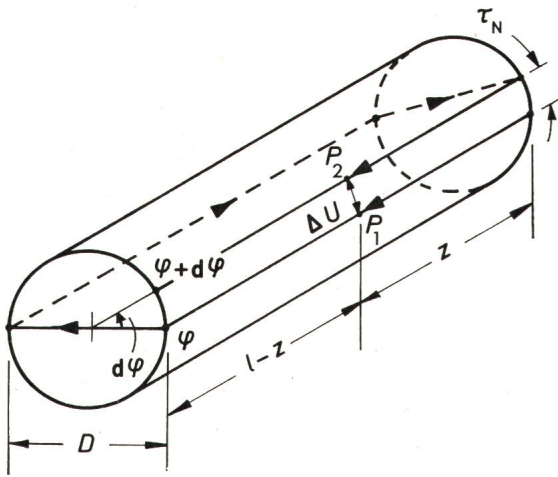


Fig. 4  
Bestimmung der  $E_\varphi$ -Komponente  
Bezeichnungen siehe im Text

Um dies zu beweisen, wird der Poynting-Vektor unter Anwendung von Gl. (20) wie folgt zerlegt:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{E} \times [\mathbf{H}_\varphi^e + \mathbf{H}_r^a(\varphi)] = \mathbf{E} \times \mathbf{H}_\varphi^e + \mathbf{E} \times \mathbf{H}_r^a(\varphi) \quad (30)$$

Somit gilt:

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = \operatorname{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}_\varphi^e] + \operatorname{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}_r^a(\varphi)] \quad (31)$$

Der erste Term der Gl. (31) muss nun gleich Null sein. Da  $H_\varphi^e$  konstant ist, kann  $H_\varphi^e$  ausgeklammert werden. Also,

$$\operatorname{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_\varphi^e) = H_\varphi^e \operatorname{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{e}_r) \quad (32)$$

Nun ist  $\mathbf{E} = E_\varphi \mathbf{e}_\varphi + E_z \mathbf{e}_z$  (33)

Gl. (33) wird in Gl. (32) eingesetzt:

$$\operatorname{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_\varphi^e) = H_\varphi^e \operatorname{div} [(E_\varphi \mathbf{e}_\varphi + E_z \mathbf{e}_z) \times \mathbf{e}_r] = H_\varphi^e \operatorname{div} (-E_\varphi \mathbf{e}_z + E_z \mathbf{e}_\varphi) \quad (34)$$

Gl. (34) hat zwei Terme. Die Divergenz von jedem Term wird im folgenden unter Gebrauch von Gl. (16) gebildet:

$$\operatorname{div} E_\varphi \mathbf{e}_z = \operatorname{div} \mathbf{E}'_z = \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \quad (35)$$

und

$$\operatorname{div} E_z \mathbf{e}_\varphi = \operatorname{div} \mathbf{E}'_\varphi = \frac{2}{D} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \quad (36)$$

Nach Einsetzen der Gl. (35) und (36) in Gl. (34) erhält man:

$$\operatorname{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_\varphi^e) = H_\varphi^e \cdot \left( \frac{2}{D} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) \quad (37)$$

Nun ist bekannt, dass das Linienintegral der elektrischen Feldstärke über einen geschlossenen Weg auf der Ankeroberfläche gleich Null ist. Bei der Integration ist die elektrische Feldstärke sowohl in axialer als auch in tangentialer Richtung zu berücksichtigen. Unter Anwendung von Gl. (24) und (26) gilt unter einem Pol (Fig. 5):

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_0^1 E_z(\varphi=0) dl + \frac{D}{2} \int_0^{\varphi_1} E_\varphi(z=l) d\varphi - \int_0^1 E_z(\varphi=\varphi_1) dl - \frac{D}{2} \int_0^{\varphi_1} E_\varphi(z=0) d\varphi = 0 \quad (38)$$

Gemäss der Definition der Rotation des Vektors  $\mathbf{E}$  [6] und der Bedingung in Gl. (38) ergibt sich folgendes:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ A \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{E} d\mathbf{l}}{A} = 0 \quad (39)$$

$A$  ist die Oberfläche, die vom Integrationsweg mit der Länge  $l$  umschlossen wird.  $l$  in Gl. (38) und (39) stellt beliebige Länge dar und hat unmittelbar nichts zu tun mit der Länge des Ankerleiters, der auch mit  $l$  bezeichnet wird. Hier sei es erwähnt, dass  $\mathbf{E}$  der Gl. (39) durch Gl. (33) definiert wird.  $\mathbf{E}$  in Gl. (39) ist somit nicht die gleiche elektrische Feldstärke  $\mathbf{E}$ , die in Gl. (4) und (5) auftritt. Im Zylinderkoordinatensystem lässt sich  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$  wie folgt ausdrücken:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \left( \frac{E_\varphi}{r} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z \quad (40)$$

Nach Gl. (39) ist  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$  gleich Null. Das bedeutet, dass jede Komponente der Gl. (40) einzeln gleich Null sein muss. Betrachtet man nur die radiale Komponente, so hat man:

$$\frac{2}{D} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = 0 \quad (41)$$

Setzt man Gl. (41) in Gl. (37) ein, so lässt sich beweisen, dass

$$\operatorname{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_\varphi^e) = 0 \quad (42)$$

ist.

Im folgenden wird also die Erregerfeldstärke nicht mehr bei der Bestimmung des Poynting-Vektors berücksichtigt. Die elektrische Feldstärke wird dagegen unverändert übernommen. Nebenbei sei gesagt, dass der Grund für den Widerspruch bei der Existenz von  $\mathbf{S}$  im Leerlauf jetzt erklärlich ist. Man hat in diesem Fall die Erregerfeldstärke berücksichtigt, die die elektrische Feldstärke erzeugt hat. Im Belastungsfall muss diejenige Komponente der magnetischen Feldstärke weiterhin berücksichtigt werden, die von der Ankerwicklung herrührt. Gl. (23) reduziert sich dann wie folgt:

$$H_r(\varphi) = H_r^a(\varphi) = -\frac{2p}{\alpha\pi} \varphi \hat{H}_r^a \quad (43)$$

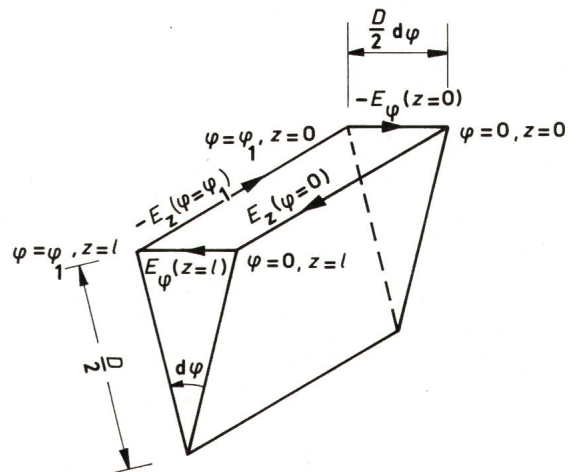


Fig. 5  
Bildung des Linienintegrals der elektrischen Feldstärke auf der Ankeroberfläche  
Bezeichnungen siehe im Text

Es wird ein neuer Poynting-Vektor  $\mathbf{T}$  definiert, dessen Divergenz gleich  $\text{div } \mathbf{S}$  ist. Die Komponenten des modifizierten Poynting-Vektors sind prinzipiell gleich wie die von Gl. (28). Der Unterschied liegt darin, dass für  $H_r(\varphi)$  nun Gl. (43) statt Gl. (23) gültig ist.

$$T_r = 0$$

$$T_\varphi = E_z(\varphi) H_r^a(\varphi) = -\mu_0 v_\varphi \frac{2p}{\alpha\pi} \varphi \hat{H}_r^a \left( H_r^e - \frac{2p}{\alpha\pi} \varphi \hat{H}_r^a \right) \quad (44)$$

$$T_z = -E_\varphi(\varphi, z) H_r^a(\varphi) = 2\mu_0 v_\varphi \frac{2p}{\alpha\pi} \varphi \hat{H}_r^a \left[ \frac{l}{\tau_N} H_r^e - \frac{2p}{\alpha\pi} \hat{H}_r^a \left( \frac{l}{\tau_N} \varphi + \frac{z}{D} \right) \right]$$

Da  $T_r$ ,  $T_\varphi$  und  $T_z$  bekannt sind, kann  $\text{div } \mathbf{T}$  gemäss Gl. (16) berechnet werden.

$$\text{div } \mathbf{T} = -\frac{2\mu_0 v_\varphi}{D} \left( H_r^e - \frac{2p}{\alpha\pi} \varphi \hat{H}_r^a \right) \frac{2p}{\alpha\pi} \hat{H}_r^a \quad (45)$$

Gl. (45) ist identisch mit der Gl. (29).

Die gesamte Leistung  $P$ , die durch den Luftspalt hindurchströmt, lässt sich wie folgt bestimmen:

$$P = \iiint \text{div } \mathbf{T} dV \quad (46)$$

Das Volumenelement des Luftspaltes ist gegeben durch:

$$dV = \delta l \frac{D}{2} d\varphi \quad (47)$$

Setzt man Gl. (45) und (47) in Gl. (46) ein, so bekommt man für die gesamte Leistung bei einer  $2p$ -poligen Maschine:

$$P = 2p \int_{-\frac{\alpha\pi}{2p}}^{\frac{\alpha\pi}{2p}} -\frac{2\mu_0 v_\varphi}{D} \left( H_r^e - \frac{2p}{\alpha\pi} \varphi \hat{H}_r^a \right) \frac{2p}{\alpha\pi} \hat{H}_r^a \delta l \frac{D}{2} d\varphi = -\frac{\alpha\pi}{2p} = -4 \mu_0 v_\varphi p \delta l H_r^e \hat{H}_r^a \quad (48)$$

Gl. (48) soll nun mit der induzierten Ankerspannung  $U_i$  und dem Ankerstrom  $I_a$  ausgedrückt werden.  $U_i$  lautet in ankerrückwirkungsfreier Maschine unter Anwendung von Gl. (11):

$$U_i = \frac{E_z l \alpha Z}{2a} = \frac{\mu_0 v_\varphi l \alpha Z}{2a} H_r^e \quad (49)$$

Gl. (49) kann nach  $v_\varphi$  aufgelöst werden.

$$v_\varphi = \frac{2a U_i}{\mu_0 H_r^e l \alpha Z} \quad (50)$$

Um den Ausdruck für die Leistung mit  $U_i$  und  $I_a$  zu erhalten, werden in Gl. (48)  $v_\varphi$  aus Gl. (50) und  $\hat{H}_r^a$  aus Gl. (22) eingesetzt. Man erhält das altbekannte Resultat:

$$P = -U_i I_a \quad (51)$$

Das negative Vorzeichen besagt, dass die Leistung verbraucht wird. Dies stimmt mit der Voraussetzung des Motorbetriebes der Gleichstrommaschine überein. Der Betrag des elektromagnetisch erzeugten Drehmoments lautet:

$$M_d = \frac{U_i I_a}{2\pi n} \quad (52)$$

wobei  $n$  die Drehzahl der Maschine ist. Unter Anwendung von Gl. (49) kann die Drehmomentgleichung weiter umgeformt werden. Das Drehmoment lautet:

$$M_d = \frac{\Phi I_a p Z}{2\pi a} \quad (53)$$

wobei für den Polfluss gilt:

$$\Phi = \frac{\mu_0 H_r^e \alpha \pi D l}{2p} \quad (54)$$

Gl. (53) stellt die bekannte Gleichung des elektromagnetisch entwickelten Drehmoments der Gleichstrommaschinen dar [1].

## 7. Belastung unter Berücksichtigung der Ohmschen Verluste

In diesem Abschnitt wird der bisher vernachlässigte Ohmsche Widerstand des Ankerkreises berücksichtigt. Die in diesem Abschnitt auftretenden elektromagnetischen Grössen werden mit dem Index 1 bezeichnet, um sie von denen der vorhergehenden Fälle zu unterscheiden. Die magnetische Feldstärke ist in diesem Fall unverändert geblieben. Sie lautet wie Gl. (43).

$$H_{r1}(\varphi) = H_r(\varphi) = -\frac{2p}{\alpha\pi} \varphi \hat{H}_r^a \quad (55)$$

Bei der elektrischen Feldstärke muss nun der Ohmsche Spannungsabfall berücksichtigt werden. Die axiale elektrische Feldstärke ist:

$$E_{z1}(\varphi) = \rho \frac{I_a}{2a} + E_z(\varphi) \quad (56)$$

wobei für  $E_z(\varphi)$  Gl. (24) gilt.  $\rho$  in Gl. (56) ist der Leiterwiderstand pro Längeneinheit. Die tangentielle Komponente der elektrischen Feldstärke ist dann:

$$E_{\varphi 1}(\varphi, z) = \rho \frac{I_a}{a} \cdot \frac{l}{\tau_N} + E_\varphi(\varphi, z) \quad (57)$$

wobei für  $E_\varphi(\varphi, z)$  Gl. (26) gilt.

Die Komponenten des Poynting-Vektors können nun mit Hilfe der Gl. (55), (56) und (57) bestimmt werden. Als Poynting-Vektor wird nicht mehr der Vektor  $\mathbf{S}$ , sondern der Vektor  $\mathbf{T}$  bezeichnet, da die Bedingung

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0$$

wie in Gl. (38) immer erfüllt ist. Gemäss Gl. (28) und (44) lauten nun die Komponenten des Poynting-Vektors in der Luftspaltmitte wie folgt:

$$T_{r1} = 0$$

$$T_{\varphi 1} = -\rho \frac{I_a}{a} \cdot \frac{p}{\alpha\pi} \varphi \hat{H}_r^a + T_\varphi \quad (58)$$

$$T_{z1} = \rho \frac{I_a}{a} \cdot \frac{l}{\tau_N} \frac{2p}{\alpha\pi} \cdot \hat{H}_r^a + T_z$$

Unter Gebrauch von Gl. (58) kann die Divergenz des Vektors  $\mathbf{T}_1$  gebildet werden.

$$\text{div } \mathbf{T}_1 = -\rho \frac{I_a}{Da} \cdot \frac{2p}{\alpha\pi} \hat{H}_r^a + \text{div } \mathbf{T} \quad (59)$$

wobei für  $\text{div } \mathbf{T}$  Gl. (45) gilt.

Wenn  $U$  die Speisespannung und  $U_i$  die induzierte Spannung sind, lautet die Spannungsgleichung für Gleichstrommaschinen beim Motorbetrieb wie folgt:

$$U = U_i + R_a I_a \quad (60)$$

wobei  $R_a$  der effektive Ohmsche Widerstand des Ankerkreises ist.  $R_a$  ist gegeben durch:

$$R_a = \rho \frac{Zl}{4a^2} \quad (61)$$

Der Leistungsfluss durch den Maschinenluftspalt kann durch Integration von  $\text{div } \mathbf{T}_1$  bestimmt werden. Unter Anwendung von Gl. (22), (47), (50), (51) und (59) folgt für die gesamte Leistung:

$$P = \int \int \int \text{div } \mathbf{T} dV - 2p \int_{-\frac{\pi}{2p}}^{\frac{\pi}{2p}} \rho \frac{I_a}{Da} \cdot \frac{2p}{\alpha\pi} \hat{H}_r^a \delta l \frac{D}{2} d\varphi = -U_i I_a - \rho \frac{Zl}{4a^2} I_a^2 \quad (62)$$

Wird Gl. (61) in den zweiten Term der Gl. (62) eingesetzt, so erhält man die bekannte Leistungsgleichung der Gleichstrommaschinen:

$$P = -(U_i I_a + R_a I_a^2) \quad (63)$$

Die Berücksichtigung des Ankerwiderstandes zeigt, dass in jeder Gleichung ein zusätzlicher Term mit dem Ankerwiderstand auftritt. Der Zusatzterm ändert an der prinzipiellen Bedeutung der Gleichungen nichts. Daher wird der Ohmsche Widerstand des Ankerkreises in den nachfolgenden Abschnitten besserer Übersicht wegen nicht weiter berücksichtigt.

### 8. Belastung unter Berücksichtigung der Ankerrückwirkung

Die Ankerrückwirkung wegen der Eisensättigung wird auf einfache Weise berücksichtigt. Man stelle sich vor, dass die Kennlinie der Luftspaltinduktion in Funktion der Erregerdurchflutung aus zwei Geraden besteht (Fig. 6). Es wird angenommen, dass die Luftspaltinduktion beim Leerlauf gleich der Induktion entsprechend dem Knickpunkt der obigen Kennlinie ist. Der Verlauf der magnetischen Feldstärke und Flussdichte im Luftspalt der Maschine besteht somit bei Belastung aus zwei Geraden (Fig. 7). Der Verlauf der Flussdichte ist dem Verlauf der magnetischen Feldstärke proportional. Aus Fig. 7 ist ersichtlich, dass das Eisen unter einer Polhälfte gesättigt wird. Die gesuchten Größen müssen nun für jede Polhälfte separat berechnet werden, wobei man für die Berechnungen bei ungesättigtem Eisen genau wie im Abschnitt 6 vorgehen muss. Deshalb gelten die Gleichungen (24), (26), (44) resp. (45) für  $E_z(\varphi)$ ,  $E_\varphi(\varphi, z)$ ,  $T_r$ ,  $T_\varphi$ ,  $T_z$  und  $\text{div } \mathbf{T}$  unter der rechten Polhälfte des Südpols, also im Bereich  $0 \leq \varphi \leq \frac{\alpha\pi}{2p}$ , wo das Eisen ungesättigt ist.

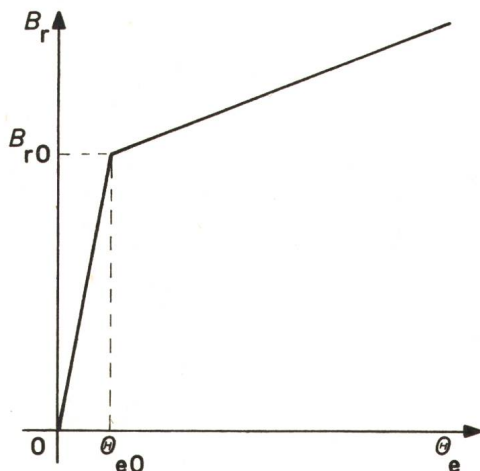


Fig. 6  
Luftspaltinduktion  $B_r$  in Abhängigkeit der Erregerdurchflutung  $\theta_e$  (schematisch)  
 $B_{r0}$  Luftspaltinduktion beim Leerlauf  
 $\theta_{e0}$  Erregerdurchflutung beim Leerlauf

In der linken Polhälfte des Südpols, also im Bereich  $-\frac{\alpha\pi}{2p} \leq \varphi \leq 0$ , ist das Eisen gesättigt. In diesem Bereich steigen die magnetische Feldstärke und Flussdichte mit einer weniger steilen Geraden an. Wird der Sättigungsgrad durch  $k$  bezeichnet, wobei  $k = c/d$  ist (Fig. 7), so ist  $k$  immer kleiner als eins. Die Ankerfeldstärke an der linken Polkante beträgt nicht mehr  $\hat{H}_r^a$ , sondern nur noch  $k\hat{H}_r^a$ . Gl. (43) muss nun entsprechend korrigiert werden.

$$H_r^a(\varphi) = -\frac{2p}{\alpha\pi} \varphi k \hat{H}_r^a \quad (64)$$

Die elektrischen Feldstärken  $E_z$  und  $E_\varphi$  lauten gemäss Gl. (24) und (26) sowie unter Berücksichtigung der Gl. (64) wie folgt:

$$E_z(\varphi) = \mu_0 v_\varphi \left( H_r^e - \frac{2p}{\alpha\pi} \varphi k \hat{H}_r^a \right) \quad (65)$$

$$E_\varphi(\varphi, z) = 2\mu_0 v_\varphi \left[ \frac{l}{\tau_N} H_r^e - \frac{2p}{\alpha\pi} \varphi k \hat{H}_r^a \left( \frac{l}{\tau_N} \varphi + \frac{z}{D} \right) \right]$$

Die Komponenten des Poynting-Vektors in der Luftspaltmitte können entsprechend Gl. (44) und unter Gebrauch von Gl. (64) und (65) hergeleitet werden.

$$T_r = 0$$

$$T_\varphi = -\mu_0 v_\varphi \frac{2p}{\alpha\pi} \varphi k \hat{H}_r^a \left[ H_r^e - \frac{2p}{\alpha\pi} \varphi k \hat{H}_r^a \right] \quad (66)$$

$$T_z = 2\mu_0 v_\varphi \frac{2p}{\alpha\pi} \varphi k \hat{H}_r^a \left[ \frac{l}{\tau_N} - \frac{2p}{\alpha\pi} k \hat{H}_r^a \left( \frac{l}{\tau_N} \varphi + \frac{z}{D} \right) \right]$$

Unter Benützung von Gl. (16) und (66) kann die Divergenz von  $\mathbf{T}$  bestimmt werden.

$$\text{div } \mathbf{T} = -\frac{2\mu_0 v_\varphi}{D} \left( H_r^e - \frac{2p}{\alpha\pi} \varphi k \hat{H}_r^a \right) \frac{2p}{\alpha\pi} k \hat{H}_r^a \quad (67)$$

Die induzierte Spannung geht infolge der Ankerrückwirkung zurück. Sie lässt sich durch die Integration der elektrischen Feldstärken der beiden Bereiche ermitteln. Unter Verwendung von Gl. (24) und (65) ergibt sich:

$$U_i = \frac{2p}{2a} \int_{-\frac{\alpha\pi}{2p}}^{\frac{\alpha\pi}{2p}} E_z(\varphi) l \frac{Z}{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 v_\varphi l \alpha Z}{2a} \left[ H_r^e - \frac{1-k}{4} \hat{H}_r^a \right] \quad (68)$$

Bei Berücksichtigung der Ankerrückwirkung wird ersichtlich, dass die induzierte Spannung  $U_i$  der Gl. (68) gegenüber der in Gl. (49) um den zweiten Term kleiner ist. Der zweite Term berücksichtigt den Einfluss der Eisensättigung, die die induzierte Spannung vermindert. Setzt man  $k = 1$ , so verschwindet der zweite Term. In diesem Fall stimmt Gl. (68) mit Gl. (49) überein. Aus Gl. (68) ist weiterhin zu erkennen, dass die induzierte Spannung mit abnehmendem Wert von  $k$ , d.h. mit zunehmender Eisensättigung, abnimmt.

Gl. (68) kann nach  $v_\varphi$  aufgelöst werden.

$$v_\varphi = \frac{2a U_i}{\mu_0 l \alpha Z \left( H_r^e - \frac{1-k}{4} \hat{H}_r^a \right)} \quad (69)$$

Die gesamte Leistung kann durch die Integration der Divergenz von  $\mathbf{T}$  über die beiden Bereiche erhalten werden. Unter Verwendung von Gl. (22), (45), (47), (67) und (69) lautet die Leistungsgleichung wie folgt:

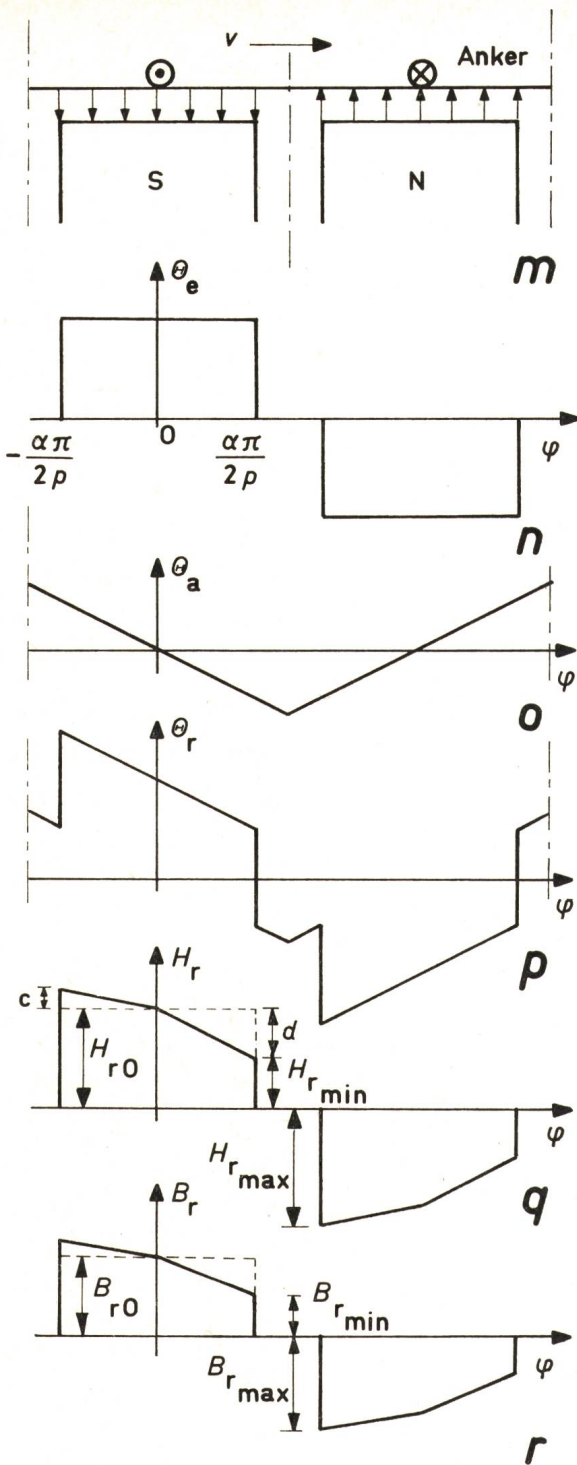


Fig. 7

Verlauf der Durchflutung magnetischer Feldstärke und Flussdichte im Luftspalt bei abgewickelter Maschine

- m Abwicklung der Maschine
- n Verlauf der Erregerdurchflutung
- o Verlauf der Ankerdurchflutung
- p Verlauf der resultierenden Durchflutung
- q Verlauf der resultierenden magnetischen Feldstärke im Luftspalt
- r Verlauf der resultierenden magnetischen Flussdichte im Luftspalt

Sättigungsfaktor  $k = \frac{c}{d} < 1$ , wobei (aus Fig. 3):

$$d = \text{magnetische Feldstärke an der Stelle } \varphi = \frac{\alpha\pi}{2p}; d = \hat{H}_r^a$$

$$c = \text{magnetische Feldstärke an der Stelle } \varphi = \frac{\alpha\pi}{2p}; c = k\hat{H}_r^a$$

$$H_{r0} = H_r^e, H_{r\max} = H_r^e + k\hat{H}_r^a, H_{r\min} = H_r^e - \hat{H}_r^a$$

$$B_{r0} = B_r^e, B_{r\max} = \mu_0 (H_r^e + k\hat{H}_r^a), B_{r\min} = \mu_0 (H_r^e - \hat{H}_r^a)$$

$$P = \iiint_{\text{Bereich 1}} \text{div } \mathbf{T} dV + \iiint_{\text{Bereich 2}} \text{div } \mathbf{T} dV = -U_i I_a \quad (70)$$

Für den gleichen Strom ist die Leistung gemäss Gl. (70) gegenüber der Gl. (51) entsprechend dem verminderten Wert der induzierten Spannung kleiner.

Das elektromagnetisch entwickelte Drehmoment  $M_d$  kann gemäss Gl. (52) berechnet werden, wobei  $U_i$  aus Gl. (68) eingesetzt werden muss. Unter Anwendung von Gl. (22) lässt sich das Drehmoment wie folgt ausdrücken:

$$M_d = \frac{\Phi I_a p Z}{2\pi a} - \frac{\mu_0 (\alpha I_a Z)^2 l D (1-k)}{128 a^2 p \delta} \quad (71)$$

Der erste Term ist identisch mit Gl. (53), der zweite berücksichtigt die Eisensättigung. Das Drehmoment bei der Sättigung wird gegenüber dem Drehmoment ohne Sättigung um den zweiten Term kleiner. Wird  $k = 1$  in Gl. (71) eingesetzt, so verschwindet der zweite Term. Weiterhin lässt sich aus Gl. (71) feststellen, dass das Drehmoment mit abnehmendem Wert von  $k$ , d.h. mit zunehmender Eisensättigung, abnimmt.

### 9. Belastung unter Berücksichtigung der Kompensation des Ankerfeldes

In diesem Abschnitt wird die Wirkung der Kompensationswicklung auf den Poynting-Vektor betrachtet. Die Eisensättigung wird zunächst nicht berücksichtigt. Der Kompensationsgrad sei mit  $b$  bezeichnet (Fig. 8). Der höchste Wert des nicht-kompensierten Anteiles der Ankerfeldstärke beträgt  $(1-b)\hat{H}_r^a$ . Die resultierende magnetische Feldstärke im Luftspalt lautet dann gemäss Gl. (23):

$$H_r(\varphi) = H_r^e - \frac{2p}{\alpha\pi} \varphi (1-b) \hat{H}_r^a \quad (72)$$

Die Komponenten der elektrischen Feldstärke sind ähnlich wie in Gl. (65). Der Unterschied ist dabei, dass im vorliegenden Fall  $k$  durch  $1-b$  ersetzt werden muss. Demnach:

$$E_z(\varphi) = \mu_0 v_\varphi \left[ H_r^e - \frac{2p}{\alpha\pi} \varphi (1-b) \hat{H}_r^a \right] \quad (73)$$

$$E_\varphi(\varphi, z) = 2\mu_0 v_\varphi \left[ \frac{l}{\tau_N} H_r^e - \frac{2p}{\alpha\pi} (1-b) \hat{H}_r^a \left( \frac{l}{\tau_N} \varphi + \frac{2z}{D} \right) \right] \quad (74)$$

Die Komponenten des Poynting-Vektors in der Luftspaltmitte können nun bestimmt werden, da die magnetischen und elektrischen Feldstärken bekannt sind. Sie sind ähnlich wie die Ausdrücke der Gl. (66). Der Unterschied besteht nur darin, dass innerhalb der rechteckigen Klammern  $k$  durch  $1-b$  und ausserhalb der rechteckigen Klammern  $\hat{H}_r^a$  durch  $(1-b)\hat{H}_r^a$  ersetzt werden müssen.

$$T_r = 0$$

$$T_\varphi = -\mu_0 v_\varphi \frac{2p}{\alpha\pi} \varphi (1-b) \hat{H}_r^a \left[ H_r^e - \frac{2p}{\alpha\pi} (1-b) \hat{H}_r^a \right]$$

$$T_z = 2\mu_0 v_\varphi \frac{2p}{\alpha\pi} \varphi (1-b) \hat{H}_r^a \left[ \frac{l}{\tau_N} H_r^e - \frac{2p}{\alpha\pi} (1-b) \hat{H}_r^a \left( \frac{l}{\tau_N} \varphi + \frac{z}{D} \right) \right] \quad (75)$$

Unter Verwendung von Gl. (16) und (75) lautet die Divergenz von  $\mathbf{T}$  wie folgt:

$$\text{div } \mathbf{T} = -\frac{2\mu_0 v_\varphi}{D} \left[ H_r^e - \frac{2p}{\alpha\pi} \varphi (1-b) \hat{H}_r^a \right] \frac{2p}{\alpha\pi} (1-b) \hat{H}_r^a \quad (76)$$

Zur Ermittlung der Energieströmung kann Gl. (76) nicht verwendet werden, da diese Gleichung bei  $b = 1$  nicht existiert. Bei vollständiger Kompensation des Ankerfeldes gleicht also der vorliegende Fall dem idealen Leerlauf. Die Divergenz von  $\mathbf{T}$  und demzufolge die Volumenintegration von  $\text{div } \mathbf{T}$  sind gleich Null. Das mathematische Ergebnis steht also im Widerspruch zum physikalischen Geschehnis. Man muss in diesem Fall auf andere Weise vorgehen. Die Energieströmung soll jetzt nicht in der Luftspaltmitte, sondern an der Ankeroberfläche betrachtet werden. Es wird also nur der Poynting-Vektor berücksichtigt, der zur Ankeroberfläche senkrecht gerichtet ist, d.h. die radiale Komponente des Poynting-Vektors. Wegen der tangentialen Komponente des Ankerfeldes existiert die radiale Komponente des Poynting-Vektors. Die erstere ist:

$$H_{\phi}^a = \frac{I_a Z}{2\pi a D} \quad (77)$$

Zur Bildung der radialen Komponente des Poynting-Vektors muss noch die elektrische Feldstärke in axialer Richtung berücksichtigt werden. Diese ist gegeben durch Gl. (73). Der gesuchte Poynting-Vektor lautet dann gemäss Gl. (14) unter der Bedingung  $H_z = 0$ :

$$T_r = -E_z H_{\phi} = -\mu_0 v_{\phi} \left[ H_r^e - \frac{2p}{\alpha\pi} \varphi (1-b) \hat{H}_r^a \right] \frac{I_a Z}{2\pi a D} \quad (78)$$

Das Minuszeichen bedeutet, dass der Poynting-Vektor der Ankeroberfläche, also von aussen nach innen, gerichtet ist. Die Energie strömt vom Luftspalt durch die Ankeroberfläche hindurch. Die gesamte Leistung  $P$  kann durch die Integration von  $T_r$  über die Ankeroberfläche ermittelt werden.

$$P = \iint T_r dA \quad (79)$$

wobei das Oberflächenelement des Ankers lautet:

$$dA = l \frac{D}{2} d\varphi \quad (80)$$

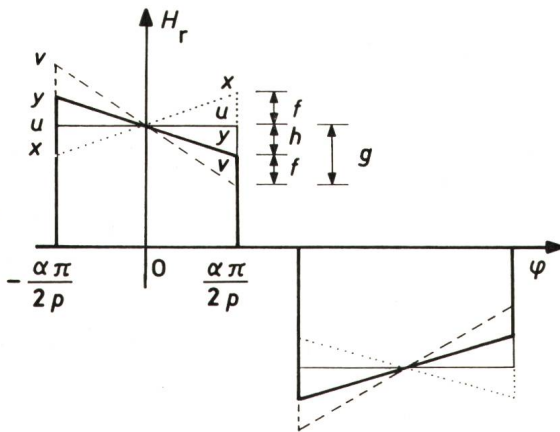


Fig. 8

Verteilung der magnetischen Feldstärke im Luftspalt bei Kompensation des Ankerfeldes und Vernachlässigung der Eisensättigung

uu Erregerfeld; vv Ankerfeld; xx Kompensationsfeld  
yy resultierendes Luftspaltfeld

$g$  Ankerfeldstärke an der Stelle  $\varphi = \frac{\alpha\pi}{2p}$

$f$  Kompensationsfeldstärke an der Stelle  $\varphi = \frac{\alpha\pi}{2p}$

$h$  nichtkompensierte Ankerfeldstärke an der Stelle  $\varphi = \frac{\alpha\pi}{2p}$

$\frac{f}{g} = b, \quad \frac{h}{g} = \frac{g-f}{g} = 1 - \frac{f}{g} = 1 - b$

Da  $T_r$  und  $dA$  aus Gl. (78) und (80) bekannt sind, kann  $P$  aus Gl. (79) berechnet werden. Vorläufig wird eine ankerrückwirkungsfreie Maschine betrachtet. Deshalb kann die Leistungsberechnung wie im Abschnitt 6 erfolgen.  $P$  lautet dann:

$$P = -\frac{\mu_0 v_{\phi} l \alpha Z I_a}{2a} H_r^e \quad (81)$$

Setzt man für  $v_{\phi}$  Gl. (50) aus Abschnitt 6 in Gl. (81) ein, so erhält man, wie erwartet:

$$P = -U_i I_a \quad (82)$$

$U_i$  ist gegeben durch Gl. (49). Die induzierte Spannung ist also bei ankerrückwirkungsfreier Maschine unabhängig vom Kompensationsgrad.

Für das elektromagnetisch erzeugte Drehmoment gilt Gl. (53), wobei auch das Drehmoment unabhängig vom Kompensationsgrad ist.

Im Falle der Berücksichtigung der Ankerrückwirkung soll man wie im Abschnitt 8 vorgehen. Für die elektrische Feldstärke  $E_z$  im Bereich der nichtgesättigten Polhälfte gilt Gl. (24). Die elektrische Feldstärke  $E_z$  im Bereich der gesättigten Polhälfte kann ähnlich wie Gl. (64) sowie (73) wie folgt ausgedrückt werden:

$$E_z(\varphi) = \mu_0 v_{\phi} \left[ H_r^e - \frac{2p}{\alpha\pi} \varphi m \hat{H}_r^a \right] \quad (83)$$

wobei

$$m = k(1-b) \quad (84)$$

Der Sättigungsgrad  $k$  ist auch eine Funktion von  $b$ . Das heisst:

$$k = f(b) \quad (85)$$

Ist  $b = 0$ , so bedeutet dies, dass die Maschine ohne Kompensationswicklung arbeitet. In diesem Fall ist  $m = k$ . Gl. (83) stimmt dann mit Gl. (64) des 8. Abschnittes überein. Ist  $b = 1$ , dann ist die Kompensation vollständig. In diesem Fall ist  $m = 0$ . Dabei verschwindet der zweite Term der Gl. (83). Der erste Term der Gl. (83) stellt die elektrische Feldstärke beim Leerlauf dar. Gl. (83) ohne den zweiten Term ist dann auch identisch mit Gl. (11).

Die induzierte Spannung  $U_i$  kann wie im vorhergehenden Abschnitt in zwei Bereichen berechnet werden.  $U_i$  lautet ähnlich wie Gl. (68):

$$U_i = \frac{\mu_0 v_{\phi} l \alpha Z}{2a} \left[ H_r^e - \frac{(1-b)(1-k)}{4} \hat{H}_r^a \right] \quad (86)$$

Ist entweder  $b = 1$  oder  $k = 1$ , so verschwindet der zweite Term der Gl. (86). Der erste Term reduziert sich nach Einsetzen der Gl. (54) wie folgt:

$$U_i = \frac{Z n \Phi p}{a} \quad (87)$$

Gl. (87) stellt die induzierte Spannung beim Leerlauf dar [1]. Gl. (86) aufgelöst nach  $v_{\phi}$  ergibt:

$$v_{\phi} = \frac{2a U_i}{\mu_0 l \alpha Z \left[ H_r^e - \frac{(1-b)(1-k)}{4} \hat{H}_r^a \right]} \quad (88)$$

Die gesamte Leistung kann ähnlich wie im vorhergehenden Abschnitt in zwei Bereichen berechnet werden.  $P$  lautet wie immer:

$$P = -U_i I_a \quad (89)$$

Das elektromagnetisch entwickelte Drehmoment lautet ähnlich wie in Gl. (71)

$$M_d = \frac{\Phi I_a p Z}{2\pi a} - \frac{\mu_0 (\alpha I_a Z)^2 l D (1-b)(1-k)}{128 a^2 p \delta} \quad (90)$$

Bei vollständiger Kompensation des Ankerfeldes ( $b = 1$ ) oder bei Vernachlässigung der Eisensättigung ( $k = 1$ ) verschwindet der zweite Term der Gl. (90). Der erste Term der Gl. (90) ist identisch mit Gl. (53) und stellt die allgemeine Drehmomentgleichung der Gleichstrommaschine ohne Kompensation und ohne Sättigung dar.

### 10. Schlussbemerkungen

In der ganzen Behandlung wurde der Motorbetrieb einer Gleichstrommaschine angenommen. Im Generatorbetrieb kehrt sich lediglich die Stromrichtung um. Demzufolge müssen die Polarität des Ankerfeldes und das Vorzeichen des Poynting-Vektors gewechselt werden. Sonst ändert sich an der Analyse nichts.

Die Betrachtungsweise der Gleichstrommaschinen mit dem Poynting-Vektor ist nicht nur interessant vom didaktischen

Standpunkt, sondern auch nützlich für das Verständnis der elektromagnetischen Vorgänge in elektrischen Maschinen aus der Sicht der Feldtheorie.

Der Verfasser dankt Dipl. Ing. ETH Lorenz Kleiner, dem wissenschaftlichen Mitarbeiter am Institut für Elektrische Maschinen der ETH-Zürich, für manche nützliche Diskussion und für die Durchsicht des Manuskriptes.

### Literatur

- [1] B. B. Palit: Direkte Herleitung von zwei charakteristischen Gleichungen der Gleichstrommaschinen aus der Feldtheorie. Bull. SEV 63(1972)23, S. 1335...1337.
- [2] S. A. Nasar: Electromagnetic theory of electrical machines. Proc. IEE 111(1964)6, p. 1123...1131.
- [3] E. I. Hawthorne: Flow of energy in D-C machines. Trans. AIEE Part I: Communication and Electronics 72(1953)-, p. 438...445.
- [4] K. Simonyi: Theoretische Elektrotechnik. 4. Auflage. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1971.
- [5] K. Küpfmüller: Einführung in die theoretische Elektrotechnik. 6. Auflage. Berlin, Springer-Verlag, 1959.
- [6] M. J. O. Strutt: Vorlesung über Feldtheorie. Zürich, Juris-Verlag, 1964.

### Adresse des Autors:

Dr.-Ing. B. B. Palit, Institut für Elektrische Maschinen der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, Elektrotechnik-Laborgebäude, Physikstrasse 3, 8006 Zürich.

## Middle East Power Conference

Getragen von akademischer Tradition und Würde, fand in der Zeit von 26. bis 29. September 1973 im Campus der American University of Beirut (AUB) die erste Middle East Power Conference statt, die etwa 50 Fachkollegen aus der arabischen Welt zu Referaten und Diskussionen über aktuelle Themen der Energietechnik zusammenführte. Nach begrüssenden Worten durch Prof. R. Ghosn als dem derzeit amtierenden Dekan der Ingenieur fakultät, unterstrich der libanesische Minister für hydroelektrische Energiequellen, Joseph Skaf, die Bedeutung dieser Konferenz für die zukünftige Elektrizitätsversorgung der Nahost-Länder und wünschte ihr einen erfolgreichen Verlauf.

Die vorgelegten 29 Berichte wurden in den folgenden 6 Themengruppen abgehandelt und in zwei Proceedings-Bänden zusammengefasst.

### Verbundbetrieb

In der ersten Themengruppe (3 Referate) wurde ein Überblick über das Grundlegende eines überregionalen Verbundbetriebes unter Würdigung der in der BRD vorliegenden Erfahrungen gegeben. Dann wurde über den bestehenden und zukünftigen Verbundbetrieb innerhalb der arabischen Staaten berichtet, der vor allem durch das erfolgreiche Wirken von Vereinbarungen und Empfehlungen verschiedener Konferenzen sowie auch durch den Einfluss der Federation of Arab Engineers zustande gekommen ist. Wie aus Fig. 1 hervorgeht, erstreckt sich das davon betroffene Territorium, in dem etwa 100 Millionen Menschen leben, rund 6000 km in Ost-West-Richtung und rund 2000 km in Nord-Süd-Richtung. Für eine betont verbundwirtschaftliche Orientierung ist daran gedacht, die drei bestehenden grenzüberschreitenden Kuppelleitungen durch vier weitere Systeme mit erhöhter Austauschleistung zu ergänzen und die Hochspannungsebenen in den einzelnen Ländern soweit wie möglich einander anzugleichen. In diesem Bestreben wird Ägypten, dank seiner zentralen Lage, eine besonders wichtige Rolle zufallen, zumal es sowohl in seinen beiden 500-kV-Assuanleitungen zusammen mit dem anspeisenden 2100-MW-Kraftwerk als auch durch das weitverzweigte 220-kV- und 132-kV-Netz eine wirkungsvolle Basis für einen sich weiter entwickelnden Verbundbetrieb besitzt. Dazu kommen noch bedeutsame Energiereserven vor allem in Form solarer Energie, die in der westlich von Kairo gelegenen Katara-Senke in

einem Kraftwerk von 8000 MW ausgenutzt werden soll. Dazu müsste allerdings das 134 m unter dem Mittelmeerspiegel gelegene Katarabecken über einen Kanal mit dem Meer verbunden werden – der übrigens mit Nuklearenergie ausgepumpt werden soll –, damit Meerwasser dem Kraftwerk zufließen und dann in dem riesigen Becken von rund 20 000 km<sup>2</sup> Fläche verdampfen kann. Diese Anlage, die zugleich zur Gewinnung von Salz genutzt werden soll, würde ausserdem zu einer Veränderung der dortigen klimatischen Verhältnisse führen und eine wünschenswerte stärkere Beregnung zu Folge haben.

In Ergänzung dazu wurden Informationen über die technischen Probleme eines allarabischen Verbundbetriebes gegeben mit Hinweisen über den elektrischen Energieverbrauch, der zwischen 150 und 600 kWh/Kopf und Jahr zu liegen scheint und nur in Kuwait, das zusammen mit Saudi-Arabien rund 60 % der Weltölproduktion abdeckt, die erstaunlich hohe Quote von 4000 kWh/Kopf und Jahr erreicht hat.

### Versorgungsnetze

In der zweiten Themengruppe (6 Referate) wurde über Betriebserfahrungen der letzten 5 Jahre mit dem bestehenden ägyptischen Hochspannungsnetz berichtet, das im Norden des Landes auf die beiden Spannungsebenen von 220 kV und 66 kV und im Süden auf 132 kV und 33 kV ausgerichtet ist. Dabei wurde darauf hingewiesen, dass auch die ländlichen Bezirke Ägyptens mit ihren 30 Millionen Menschen in den Genuss der am Assuanhochdamm erzeugten elektrischen Energie kommen sollten, die sich jährlich auf 8 bis 9 Milliarden kWh beläuft, wozu der forcierte Ausbau eines leistungsfähigen Mittelspannungsnetzes unerlässliche Voraussetzung ist.

Danach ist zusammenfassend über die Elektrizitätsversorgung im Libanon berichtet worden, die sich mit 60 % auf thermische Energie und mit den verbleibenden 40 % auf hydraulische Energie abstützen kann. Für eine Zukunft der nächsten 10 Jahre soll das bestehende 150/66-kV-Netz durch den Bau von Gasturbinen-Kraftwerken sowie auch durch den Ausbau von Pumpspeicherreserven verstärkt werden. Des weiteren ist an die Errichtung eines 21-MW-Mühlkraftwerkes in Beirut gedacht, dessen gesamte Energie für die Entsalzung von Meerwasser verwendet werden soll.