

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins  
**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke  
**Band:** 64 (1973)  
**Heft:** 7

**Artikel:** Berechnung und Anwendung von symmetrischen Multipolfeldern in zylindrischer Bohrung erzeugt durch Sektorwicklungen konstanter Stromdichte  
**Autor:** Asmer, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-915535>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Berechnung und Anwendung von symmetrischen Multipolfeldern in zylindrischer Bohrung, erzeugt durch Sektorwicklungen konstanter Stromdichte

Von A. Asner

Für Beschleuniger- und Strahltransportmagnete in der Hochenergiephysik sind neuartige 2n-polige Magnetfeldanordnungen entwickelt worden, die bereits breite Anwendung gefunden haben. Durch entsprechende Anordnung von Sektorwicklungen konstanter Stromdichte werden in einer zylindrischen Bohrung symmetrische Dipol-, Quadrupol-, Sextupol- usw. -magnetfelder hoher Genauigkeit erzeugt.

Als Anwendungsbeispiele sind die erste supraleitende 1 m lange 5-T-Quadrupollinse und die Korrekturmagneten des neuen 800-MeV-Booster-Synchrotrons der CERN in Genf angegeben.

621.384.6:621.3.013

Pour les aimants d'accélérateurs et de transport re rayons en physique des particules de haute énergie, on a mis au point des dispositions de champ magnétique à 2n pôles d'un nouveau genre, qui ont déjà maintes fois été appliquées. Par une disposition appropriée d'enroulements sectoriaux à densité de courant constante, on produit dans un alésage cylindrique des champs magnétiques symétriques dipolaires, quadripolaires, hexapolaires, etc., d'une haute précision.

Des exemples décrits sont la première lentille quadripolaire supraconductrice de 1 m de longueur et d'un poids de 5 t, ainsi que les aimants correcteurs, du nouveau synchrotron de 800 MeV du CERN, à Genève.

## 1. Berechnung von magnetischen Multipolfeldern in einer zylindrischen Bohrung, erzeugt durch Sektorwicklungen konstanter Stromdichte

Magnetische Multipole dieser Bauart weisen folgende Vorteile auf:

a) Das nützliche konstante Feld  $B$  [T], der Feldgradient  $G$   $\left[\frac{T}{m}\right]$  usw. und deren Fehler sind durch übersichtliche analytische Gleichungen gegeben. Aus diesen ist leicht ersichtlich, wie die Wicklungsanordnung zu modifizieren ist, um die Multipolfehler auf den gewünschten Betrag zu reduzieren.

b) Die Anordnung ist insbesondere dann vorteilhaft, wenn es notwendig erscheint, mehrere Multipolfelder in der gleichen Bohrung zu erzeugen, indem die entsprechenden Sektorwicklungen einfach konzentrisch überlagert werden.

c) Die Multipolfelder können durch das Anbringen einer koaxialen magnetischen Abschirmung wirksam abgeschirmt werden, wobei gleichzeitig eine verzerrungsfreie Erhöhung der Multipolfelder in der Bohrung erreicht wird.

Fig. 1 zeigt eine (unendlich lang angenommene) zylindrische Sektorwicklung konstanter Stromdichte  $j$   $\left[\frac{A}{m^2}\right]$ ; (die Winkel seien  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ , die Radien  $R_1, R_2$ ). Das Vektorpotential  $A$  im Punkte  $P(\varrho, \varphi)$  für das Stromelement  $dI$  im Punkte  $Q(r, \alpha)$  ist dann:

$$dA = \frac{j r dr d\alpha \mu_0}{4\pi} \ln [r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos(\alpha - \varphi)] \left[\frac{Vs}{m}\right] \quad (1)$$

Daraus ergeben sich die radiale und die azimutale Komponente des Magnetfeldes  $B_\varrho$  und  $B_\varphi$  zu:

$$dB_\varrho = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial(dA)}{\partial \varphi} \quad [T] \quad (2)$$

$$dB_\varphi = -\frac{\partial(dA)}{\partial \varrho} \quad [T] \quad (3)$$

Für die auf Fig. 1 gezeigte Anordnung erhält man für  $B_\varrho$  und  $B_\varphi$ :

$$B_\varrho = \frac{\mu_0 j}{2\pi} \left\{ \int_{R_1}^{R_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{r^2 dr d\alpha \sin(\alpha - \varphi)}{r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos(\alpha - \varphi)} \right\} \quad (4)$$

$$B_\varphi = -\frac{\mu_0 j}{2\pi} \left\{ \int_{R_1}^{R_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dr d\alpha \frac{r^2 \cos(\alpha - \varphi) - r\varrho}{r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos(\alpha - \varphi)} \right\} \quad (5)$$

Führt man folgende Reihen [1] <sup>1)</sup> ein:

$$\frac{\sin \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = \sin \theta + a \sin 2\theta + \dots a^{n-1} \sin n\theta \quad (6)$$

mit  $a^2 < 1$  und

$$\frac{-a + \cos \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = \cos \theta + a \cos 2\theta + \dots a^{n-1} \cos n\theta \quad (7)$$

so können für  $\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 < 1$  Gl. (4) und (5) wie folgt geschrieben werden:

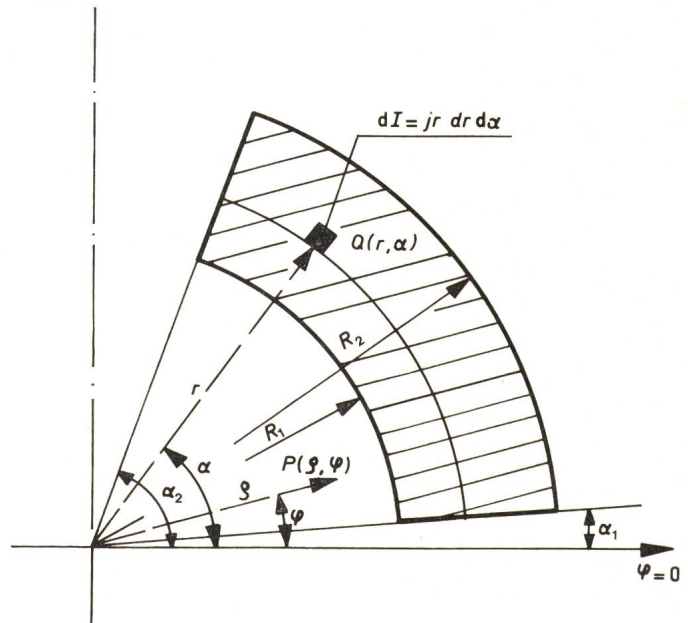


Fig. 1

Zum Vektorpotential  $dA$  eines unendlich langen Stromelementes  $dI$   
Bezeichnungen siehe im Text

<sup>1)</sup> Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

$$B_{\varrho} = \frac{\mu_0 j}{2\pi} \left\{ \int_{R_1}^{R_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dr d\alpha [\sin(\alpha - \varphi) + \frac{\varrho}{r} \sin 2(\alpha - \varphi) + \dots] \right\} \quad (8)$$

$$B_{\varphi} = -\frac{\mu_0 j}{2\pi} \left\{ \int_{R_1}^{R_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dr d\alpha [\cos(\alpha - \varphi) + \frac{\varrho}{r} \cos 2(\alpha - \varphi) + \dots] \right\} \quad (9)$$

Für  $\varrho > r$ ,  $\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 < 1$  erhält man:

$$B_{\varrho} = \frac{\mu_0 j}{2\pi} \left\{ \int_{R_1}^{R_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dr d\alpha \frac{r^2}{\varrho^2} [\sin(\alpha - \varphi) + \frac{r}{\varrho} \sin 2(\alpha - \varphi) + \dots] \right\} \quad (10)$$

$$B_{\varphi} = -\frac{\mu_0 j}{2\pi} \left\{ \int_{R_1}^{R_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dr d\alpha \frac{r^2}{\varrho^2} [\cos(\alpha - \varphi) + \frac{r}{\varrho} \cos 2(\alpha - \varphi) + \dots] \right\} \quad (11)$$

Wird nun ein konzentrischer coaxialer Zylinder mit dem Innenradius  $R_s$  und mit unendlicher relativer Permeabilität  $\mu_r$  um die Wicklung gelegt, so wird die gespiegelte Sektorwicklung durch  $\alpha_1' = \alpha_1$ ,  $\alpha_2' = \alpha_2$  und durch  $R_1'$ ,  $R_2'$  begrenzt sein. Für  $R_1'$  und  $R_2'$  sowie für die gespiegelte Stromdichte  $j' \left[ \frac{A}{m^2} \right]$  erhält man dann (Fig. 2):

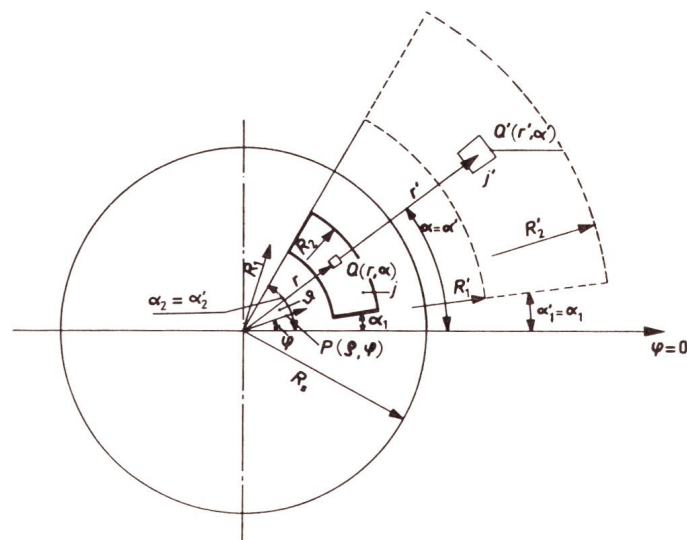


Fig. 2  
Strombelagsspiegelung  
Bezeichnungen siehe im Text

Mit Hilfe von Gl. (1) bis (16) können nun sämtliche Parameter der magnetischen Multipolen berechnet werden.

### 1.1 Der Dipol

Für einen Dipol mit konstantem Feld  $B_{\varrho 0}$  [T] erhält man für die Feldkomponenten in der Bohrung ( $0 < \varrho < R_1$ ):

$$B_{\varrho} [T] = \frac{2\mu_0 j}{\pi} \left\{ (R_2 - R_1) \cos \alpha_0 \cos \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^{2n}}{(2n+1)(2n-1)} \left[ \frac{1}{R_1^{2n-1}} - \frac{1}{R_2^{2n-1}} \right] \cos(2n+1)\alpha_0 \cos(2n+1)\varphi \right\} \quad (17)$$

$$B_{\varphi} [T] = -\frac{2\mu_0 j}{\pi} \left\{ (R_2 - R_1) \cos \alpha_0 \sin \varphi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^{2n}}{(2n+1)(2n-1)} \cdot \left[ \frac{1}{R_1^{2n-1}} - \frac{1}{R_2^{2n-1}} \right] \cos(2n+1)\alpha_0 \sin(2n+1)\varphi \right\} \quad (18)$$

$$r' = \frac{R_s^2}{r}$$

$$R_1' = \frac{R_s^2}{R_1} \quad (12)$$

$$R_2' = \frac{R_s^2}{R_2}$$

$$j' = j \left( \frac{R_s}{r'} \right)^4 \quad (13)$$

$$dr = -\frac{1}{r'^2} R_s^2 dr' \quad (14)$$

Die Feldkomponenten des gespiegelten Teils sind folglich:

$$(B_{\varrho})_{im} = \frac{\mu_0 j}{2\pi} \left\{ \int_{R_2'}^{R_1'} \int_{\alpha_1'}^{\alpha_2'} \left( \frac{R_s}{r'} \right)^4 dr' d\alpha [\sin(\alpha - \varphi) + \frac{\varrho}{r'} \sin 2(\alpha - \varphi) + \dots] \right\} \quad (15)$$

$$(B_{\varphi})_{im} = -\frac{\mu_0 j}{2\pi} \left\{ \int_{R_2'}^{R_1'} \int_{\alpha_1'}^{\alpha_2'} \left( \frac{R_s}{r'} \right)^4 dr' d\alpha [\cos(\alpha - \varphi) + \frac{\varrho}{r'} \cos 2(\alpha - \varphi) + \dots] \right\} \quad (16)$$

Für  $\varphi = 0$  erhält man das gesuchte Feld  $B_{\varrho 0}$ . Wird  $\alpha = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$  gewählt, so wird das erste Glied der rechtseitigen Summe gleich Null und der Feldfehler durch die nächste fünfte Harmonische bestimmt. Das Dipolfeld ist dann annähernd:

$$B_{\varrho 0} [T] \approx \frac{2\mu_0 j}{\pi} \left[ (R_2 - R_1) \cos \frac{\pi}{6} + \frac{\varrho^4}{5 \cdot 3} \left( \frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3} \right) \cos \frac{5}{6} \pi \right] \quad (19)$$

Für sehr genaue Teilchenbeschleuniger-Dipolmagnete mag dieser Fehler zu hoch sein. Folgende Methoden können dann angewandt werden, um die Feldgenauigkeit durch Eliminierung weiterer Harmonischen zu erhöhen:

Der Wicklungssektor wird in 2...n Teile unterteilt (die entsprechenden Winkel seien  $\alpha_1 \dots \alpha_{n+3}$ ). Es können dann die Fehlerkomponenten des Magnetfeldes  $B_3$ ,  $B_5$  bis einschliesslich  $B_{2n+1}$  gleich Null gemacht werden (Fig. 3a).

Ähnlich können Wicklungen mit mehreren Sektoren jeweils konstanter Stromdichte  $j_1$ ,  $j_2 \dots$  usw. derart ausgelegt werden,



dass nach Gl. (18) die erforderliche Anzahl der Feldharmonischen gleich Null wird (Fig. 3b).

Zur Berechnung der gespeicherten Energie und der Wicklungskräfte ist es insbesondere bei supraleitenden Magneten erforderlich die Feldverteilung nach Richtung und Betrag innerhalb der Wicklung zu bestimmen. Diese Komponenten  $B_{\varrho w}$  und  $B_{\varphi w}$  sind durch Gl. (20) und (21) gegeben:

$$B_{\varrho w} [T] = \frac{2 \mu_0 j}{\pi} \left\{ (R_2 - \varrho) \cos \alpha_0 \cos \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho}{(2n+1)(2n-1)} \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\varrho}{R_2} \right)^{2n-1} \right] \cdot \cos(2n+1) \alpha_0 \cos(2n+1) \varphi + \left[ 1 - \left( \frac{R_1}{\varrho} \right)^{2n+1} \right] \cos(2n-1) \alpha_0 \cos(2n-1) \varphi \right\} \right\} \quad (20)$$

$$B_{\varphi w} [T] = -\frac{2 \mu_0 j}{\pi} \left\{ (R_2 - \varrho) \cos \alpha_0 \sin \varphi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho}{(2n+1)(2n-1)} \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\varrho}{R_2} \right)^{2n-1} \right] \cdot \cos(2n+1) \alpha_0 \sin(2n+1) \varphi + \left[ 1 - \left( \frac{R_1}{\varrho} \right)^{2n+1} \right] \cos(2n-1) \alpha_0 \sin(2n-1) \varphi \right\} \right\} \quad (21)$$

Desgleichen sind die Feldkomponenten ausserhalb der Wicklung – ohne Berücksichtigung der Abschirmung – durch Gl. (22) und (23) gegeben.

$$B_{\varrho \text{ aus}} [T] = \frac{2 \mu_0 j}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho}{(2n-1)(2n+1)} \cdot \left[ \left( \frac{R_2}{\varrho} \right)^{2n+1} - \left( \frac{R_1}{\varrho} \right)^{2n+1} \right] \cos(2n-1) \alpha_0 \cdot \cos(2n-1) \varphi \quad (22)$$

$$B_{\varphi \text{ aus}} [T] = -\frac{2 \mu_0 j}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho}{(2n-1)(2n+1)} \cdot \left[ \left( \frac{R_2}{\varrho} \right)^{2n+1} - \left( \frac{R_1}{\varrho} \right)^{2n+1} \right] \cos(2n-1) \alpha_0 \cdot \sin(2n-1) \varphi \quad (23)$$

Die auf die konzentrische Abschirmung zurückzuführenden Feldkomponenten sind:

$$B_{\varrho \text{ im}}' [T] = \frac{2 \mu_0 j}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^{2n-2}}{R_s^{4n-2} (2n+1)(2n-1)} (R_2^{2n+1} - R_1^{2n+1}) \cos(2n-1) \alpha_0 \cdot \cos(2n-1) \varphi \quad (24)$$

$$B_{\varphi \text{ im}} [T] = -\frac{2 \mu_0 j}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^{2n-2}}{R_s^{4n-2} (2n+1)(2n-1)} (R_2^{2n+1} - R_1^{2n+1}) \cos(2n-1) \alpha_0 \cdot \sin(2n-1) \varphi \quad (25)$$

wobei sich  $\varrho, \varphi$  auf einen beliebigen Punkt in der Bohrung beziehen. Eine Näherungsformel für das Dipolfeld eines zylindrischen 30°-Sektor-Magneten mit konzentrischer Abschirmung ist somit durch Gl. (26) gegeben:

$$B_{\varrho 0} [T] \approx \frac{2 \mu_0 j}{\pi} \cdot 0,866 \left\{ (R_2 - R_1) + \frac{1}{3} R_s \left[ \left( \frac{R_2}{R_s} \right)^3 - \left( \frac{R_1}{R_s} \right)^3 \right] - \frac{\varrho}{5 \cdot 3} \left[ \left( \frac{\varrho}{R_1} \right)^3 - \left( \frac{\varrho}{R_2} \right)^3 \right] \right\} \quad (26)$$

## 2.2 Der Quadrupol

Nach Fig. 4 sind die vier Quadrupolsektor-Wicklungen durch die Winkel  $\alpha_0, \frac{\pi}{2} - \alpha_0, \frac{\pi}{2} + \alpha_0$ , usw. begrenzt. Die Feldkomponenten  $B_{\varrho}$ ,  $B_{\varphi}$  und der Feldgradient  $\frac{\partial B_0}{\partial \varrho}$  in der Bohrung sind durch Gl. (27), (28) und (29) gegeben:

$$B_{\varrho} [T] = \frac{2 \mu_0 j}{\pi} \left\{ \varrho \left( \ln \frac{R_2}{R_1} \cdot \cos 2 \alpha_0 \cos 2 \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho}{2n(4n+2)} \left[ \left( \frac{\varrho}{R_1} \right)^{4n} - \left( \frac{\varrho}{R_2} \right)^{4n} \right] \cdot \cos(4n+2) \alpha_0 \cos(4n+2) \varphi \right\} \quad (27)$$

$$B_{\varphi} [T] = -\frac{2 \mu_0 j}{\pi} \left\{ \varrho \left( \ln \frac{R_2}{R_1} \right) \cos 2 \alpha_0 \sin 2 \varphi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho}{2n(4n+2)} \cdot \left[ \left( \frac{\varrho}{R_1} \right)^{4n} - \left( \frac{\varrho}{R_2} \right)^{4n} \right] \cdot \cos(4n+2) \alpha_0 \sin(4n+2) \varphi \right\} \quad (28)$$

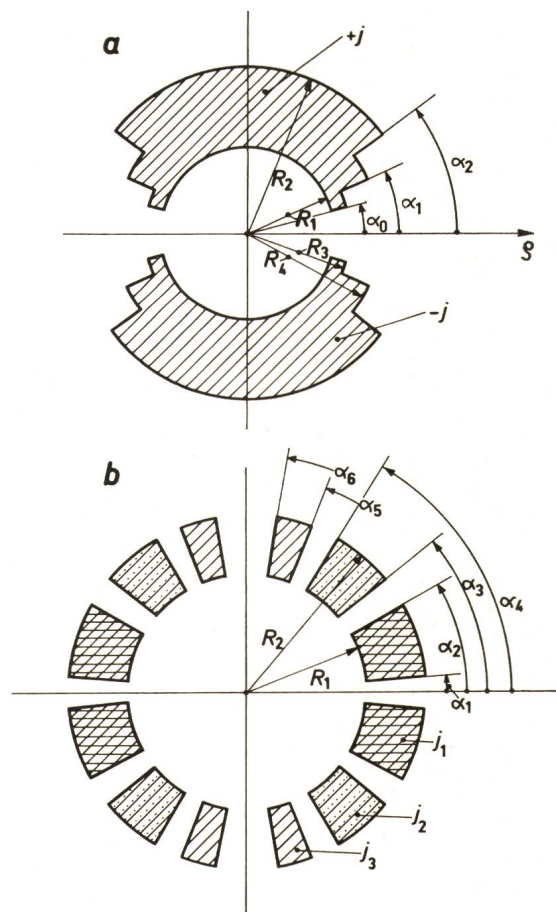


Fig. 3

Zur Kompensation höherer Feldharmonischen

- a verschiedene Radien; gleiche Stromdichte
- b gleiche Radien; verschiedene Stromdichten  $j_1, j_2, j_3$
- $\alpha_1 \dots \alpha_6$  Winkel der Sektorwicklungen

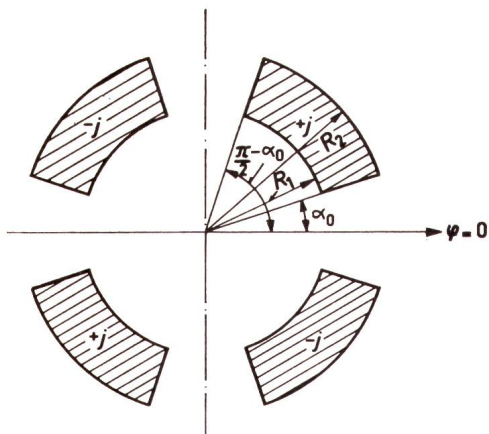


Fig. 4  
Quadrupol-Sektorwicklung

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} = G \left[ \frac{T}{m} \right] = \frac{2 \mu_0 j}{\pi} \left\{ \cos 2 \alpha_0 \cos 2 \varphi \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{2n(4n+2)} \left[ \left( \frac{\varrho}{R_1} \right)^{4n} - \left( \frac{\varrho}{R_2} \right)^{4n} \right] \cdot \cos(4n+2) \alpha_0 \cos(4n+2) \varphi \right\} \quad (29)$$

Wird  $2\alpha_0 = 30^\circ$  gewählt, so wird die erste Fehlerkomponente des Zwölfpols gleich Null. Feld und Feldgradient sind dann in guter Annäherung:

$$B_{\varphi_0} [T] \approx \frac{2 \mu_0 j}{\pi} \cdot 0,866 \left\{ \varrho \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{40} \varrho \left[ \left( \frac{\varrho}{R_1} \right)^8 - \left( \frac{\varrho}{R_2} \right)^8 \right] \right\} \quad (30)$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} = G \left[ \frac{T}{m} \right] \approx \frac{2 \mu_0 j}{\pi} \cdot 0,866 \left\{ \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{9}{40} \left[ \left( \frac{\varrho}{R_1} \right)^8 - \left( \frac{\varrho}{R_2} \right)^8 \right] \right\} \quad (31)$$

Die Feldkomponenten in der Wicklung sind:

$$B_{\varphi_w} [T] = \frac{2 \mu_0 j}{\pi} \left\{ \cos 2 \alpha_0 \cos 2 \varphi \ln \frac{R_2}{\varrho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho}{2n(4n+2)} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{\varrho}{R_2} \right)^{4n} \right] \cdot \cos(4n+2) \alpha_0 \cos(4n+2) \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho}{2n(4n-2)} \left[ 1 - \left( \frac{R_1}{\varrho} \right)^{4n} \right] \cdot \cos(4n-2) \alpha_0 \cdot \cos(4n-2) \varphi \right\} \quad (32)$$

Für  $B_{\varphi_w}$  ist  $\sin(4n-2)\varphi$  anstelle von  $\cos(4n-2)\varphi$  zu setzen.

Die Feldkomponente ausserhalb der Wicklung sind:

$$B_{\varphi_{aus}} [T] = \frac{2 \mu_0 j}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \varrho \left[ \left( \frac{R_2}{\varrho} \right)^{4n} - \left( \frac{R_1}{\varrho} \right)^{4n} \right] \frac{1}{2n(4n-2)} \cdot \cos(4n-2) \alpha_0 \cdot \cos(4n-2) \varphi \quad (33)$$

$$B_{\varphi_{aus}} [T] = - \frac{2 \mu_0 j}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \varrho \left[ \left( \frac{R_2}{\varrho} \right)^{4n} - \left( \frac{R_1}{\varrho} \right)^{4n} \right] \frac{1}{2n(4n-2)} \cdot \cos(4n-2) \alpha_0 \cdot \sin(4n-2) \varphi \quad (34)$$

Die auf die Abschirmung zurückzuführenden Feldkomponenten und der Feldgradient sind:

$$B_{e_{im}} [T] = \frac{\mu_0 j}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(4n+2)} \cdot \frac{\varrho^{4n+1}}{R_s^{4(2n+1)}} \cdot [R_2^{4(n+1)} - R_1^{4(n+1)}] \cdot \cos(4n+2) \alpha_0 \cos(4n+2) \varphi \quad (35)$$

$$B_{\varphi_{im}} [T] = - \frac{\mu_0 j}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(4n+2)} \cdot \frac{\varrho^{4n+1}}{R_s^{4(2n+1)}} [R_2^{4(n+1)} - R_1^{4(n+1)}] \cdot \cos(4n+2) \alpha_0 \sin(4n+2) \varphi \quad (36)$$

$$G_{im} \left[ \frac{T}{m} \right] = \frac{\partial B_{e_{im}}}{\partial \varphi} = \frac{\mu_0 j}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+1}{(n+1)(4n+2)} \varrho^{4n} \cdot \frac{1}{R_s^{4(2n+1)}} [R_2^{4n+4} - R_1^{4n+4}] \cdot \cos(4n+2) \alpha_0 \cos(4n+2) \varphi \quad (37)$$

Für einen Quadrupol mit  $2\alpha = 30^\circ$  und Abschirmung ist der Feldgradient in der Bohrung in guter Annäherung durch:

$$G_0 \left[ \frac{T}{m} \right] \approx 0,866 \frac{2 \mu_0 j}{\pi} \left\{ \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{R_2}{R_s} \right)^4 - \left( \frac{R_1}{R_s} \right)^4 \right] - \frac{9}{40} \left[ \left( \frac{\varrho}{R_1} \right)^8 - \left( \frac{\varrho}{R_2} \right)^8 \right] \right\} \quad (38)$$

gegeben.

### 1.3 Der Sextupol

Wie aus Fig. 5 ersichtlich, sind die Sektorwicklungen jetzt durch die Winkel  $\alpha_0, \frac{\pi}{3} - \alpha_0, \frac{\pi}{3} + \alpha_0$  usw. begrenzt.

Die Feldkomponenten  $B_\varphi, B_\varphi$  und die zweite Feldableitung  $\frac{\partial^2 B}{\partial \varphi^2}$ , die ja für einen idealen Sextupol konstant sein soll, ergeben sich in der Bohrung zu:

$$B_\varphi [T] = \frac{2 \mu_0 j}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(6n+1)} \varrho^{6n+2} \cdot \left[ \frac{1}{R_1^{6n+1}} - \frac{1}{R_2^{6n+1}} \right] \cos(6n+3) \alpha_0 \cdot \cos(6n+3) \varphi \quad (39)$$

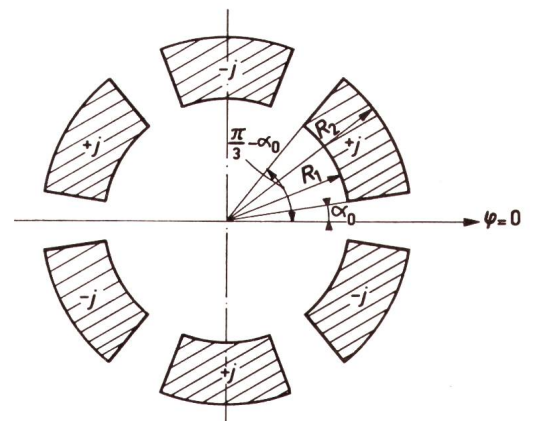


Fig. 5  
Sextupol-Sektorwicklung



$$B_{\varphi} = -\frac{2\mu_0 j}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(6n+1)} \varrho^{6n+2} \cdot \left[ \frac{1}{R_1^{6n+1}} - \frac{1}{R_2^{6n+1}} \right] \sin(6n+3)\varphi \cdot \cos(6n+3)\alpha_0 \quad (40)$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \varrho^2} \left[ \frac{T}{m^3} \right] = \frac{2\mu_0 j}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6n+2}{2n+1} \varrho^{6n} \cdot \left[ \frac{1}{R_1^{6n+1}} - \frac{1}{R_2^{6n+1}} \right] \cos(6n+3)\varphi \cdot \cos(6n+3)\alpha_0 \quad (41)$$

Die Feldkomponenten in der Wicklung sind:

$$B_{\varrho_w} [T] = \frac{2\mu_0 j}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2n+1)(6n+1)} \varrho \left[ 1 - \left( \frac{\varrho}{R_2} \right)^{6n+1} \right] + \frac{1}{(2n+1)(6n+5)} \cdot \varrho \left[ 1 - \left( \frac{R_1}{\varrho} \right)^{6n+5} \right] \right\} \cos(6n+3)\alpha_0 \cos(6n+3)\varphi \quad (42)$$

$$B_{\varphi_w} [T] = -\frac{2\mu_0 j}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2n+1)(6n+1)} \varrho \left[ 1 - \left( \frac{\varrho}{R_2} \right)^{6n+1} \right] - \frac{1}{(2n+1)(6n+5)} \varrho \cdot \left[ 1 - \left( \frac{R_1}{\varrho} \right)^{6n+5} \right] \right\} \cos(6n+3)\alpha_0 \sin(6n+3)\varphi \quad (43)$$

Die Feldkomponenten ausserhalb der Wicklung sind:

$$B_{\varrho_{aus}} [T] = \frac{2\mu_0 j}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(6n+5)} \cdot \frac{1}{\varrho^{6n+4}} [R_2^{6n+5} - R_1^{6n+5}] \cdot \cos(6n+3)\alpha_0 \cos(6n+3)\varphi \quad (44)$$

$$B_{\varphi_{aus}} [T] = -\frac{2\mu_0 j}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(6n+5)} \cdot \frac{1}{\varrho^{6n+4}} [R_2^{6n+5} - R_1^{6n+5}] \cdot \cos(6n+3)\alpha_0 \sin(6n+3)\varphi \quad (45)$$

Die auf die Abschirmung zurückzuführenden Komponenten sind:

$$B_{\varrho_{im}} [T] = \frac{2\mu_0 j}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(6n+5)} \cdot \frac{\varrho^{6n+2}}{R_s^{6n+1}} \left[ \left( \frac{R_2}{R_s} \right)^{6n+5} - \left( \frac{R_1}{R_s} \right)^{6n+5} \right] \cdot \cos(6n+3)\alpha_0 \cos(6n+3)\varphi \quad (46)$$

$$B_{\varphi_{im}} = -\frac{2\mu_0 j}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(6n+5)} \cdot \frac{\varrho^{6n+2}}{R_s^{6n+1}} \left[ \left( \frac{R_2}{R_s} \right)^{6n+5} - \left( \frac{R_1}{R_s} \right)^{6n+5} \right] \cdot \cos(6n+3)\alpha_0 \sin(6n+3)\varphi \quad (47)$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \varrho^2} \left[ \frac{T}{m^2} \right] = \frac{2\mu_0 j}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n+2)(6n+1)}{(2n+1)(6n+5)} \cdot \frac{\varrho^{6n}}{R_s^{6n+1}} \left[ \left( \frac{R_2}{R_s} \right)^{6n+5} - \left( \frac{R_1}{R_s} \right)^{6n+5} \right] \cdot \cos(6n+3)\alpha_0 \cos(6n+3)\varphi \quad (48)$$

Für eine Sektorwicklung mit  $3\alpha_0 = 30^\circ$  und mit magnetischer Abschirmung wird für  $\frac{\partial^2 B}{\partial \varrho^2}$  folgende Näherungsgleichung erhalten:

$$\frac{\partial^2 B_{\varrho}}{\partial \varrho^2} \left[ \frac{T}{m^2} \right] = 0,866 \frac{4\mu_0 j}{\pi} \left\{ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{5R_s} \left[ \left( \frac{R_2}{R_s} \right)^5 - \left( \frac{R_1}{R_s} \right)^5 \right] - \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{\varrho} \left[ \left( \frac{\varrho}{R_1} \right)^{13} - \left( \frac{\varrho}{R_2} \right)^{13} \right] \right\} \quad (49)$$

Ähnliche Gleichungen können für weitere, höhere Multipole abgeleitet werden.

Für einen Oktupol mit  $4\alpha_0 = 30^\circ$  und magnetischer Abschirmung ist die dritte Feldableitung in guter Näherung durch Gl. (50) gegeben (Fig. 6):

$$\frac{\partial^3 B_{\varrho}}{\partial \varrho^3} \left[ \frac{T}{m^3} \right] \approx 0,866 \frac{6\mu_0 j}{\pi} \left\{ \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) + \frac{1}{3R_s^2} \left[ \left( \frac{R_2}{R_s} \right)^6 - \left( \frac{R_1}{R_s} \right)^6 \right] - \frac{19 \cdot 17}{15} \cdot \frac{1}{\varrho^2} \left[ \left( \frac{\varrho}{R_1} \right)^{18} - \left( \frac{\varrho}{R_2} \right)^{18} \right] \right\} \quad (50)$$

## 2. Anwendung

Als Beispiel für die Anwendung von zylindrischen Multipolmagneten mit Sektorwicklungen kann das Korrektursystem des neuen 800-MeV-Booster-Synchrotrons und die erste supraleitende Strahltransport-Quadrupollinse der CERN in Genf angegeben werden.

Das Booster-Synchrotron ist ein Vierring-Beschleuniger, der die Strahlintensität des bestehenden 28-GeV-Protonen-Synchrotrons und später des neuen 300-GeV-Synchrotrons beträchtlich erhöhen wird. Als Teil des Booster-Magnetsystems sind auch 16 konzentrische Multipole mit jeweils 3 überlagerten Sektorwicklungen gebaut worden. Fig. 7 zeigt einen Schnitt durch den Aktivteil eines Multipols: die Oktupolwicklung ist

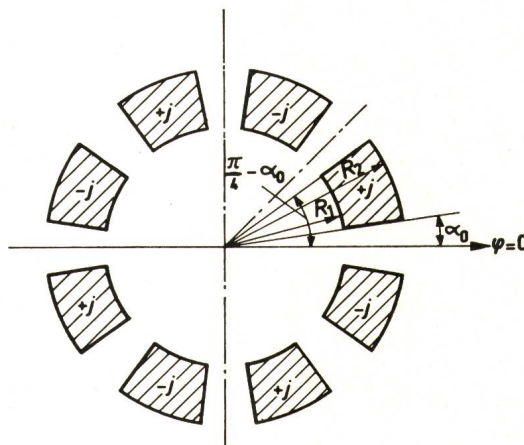


Fig. 6  
Oktupol-Sektorwicklung



Element	Innenradius m	Aussenradius m	Feldabteilung
Oktupol	0,083	0,097	$\frac{\partial^3 B}{\partial \varrho^3} = 200 \left[ \frac{T}{m^3} \right]$
Sextupol	0,103	0,120	$\frac{\partial^2 B}{\partial \varrho^2} = 5,2 \left[ \frac{T}{m^2} \right]$
Quadrupol	0,125	0,135	$\frac{\partial B}{\partial \varrho} = 0,17 \left[ \frac{T}{m} \right]$

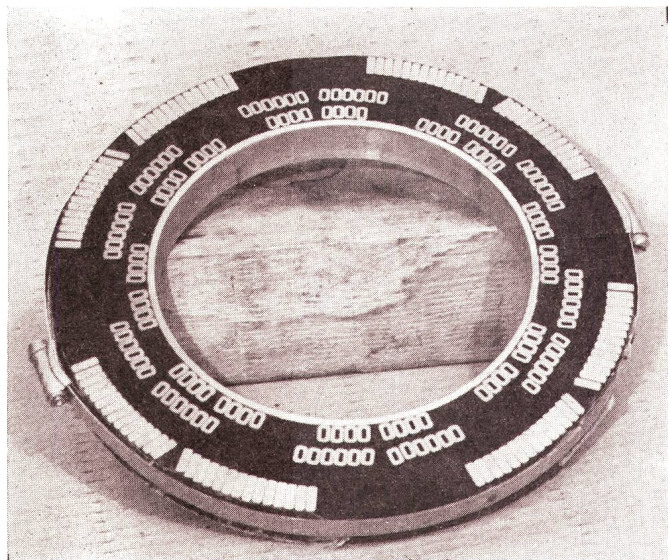


Fig. 7

Schnitt durch den Multipolmagneten des 800-MeV-Booster Synchrotrons der CERN

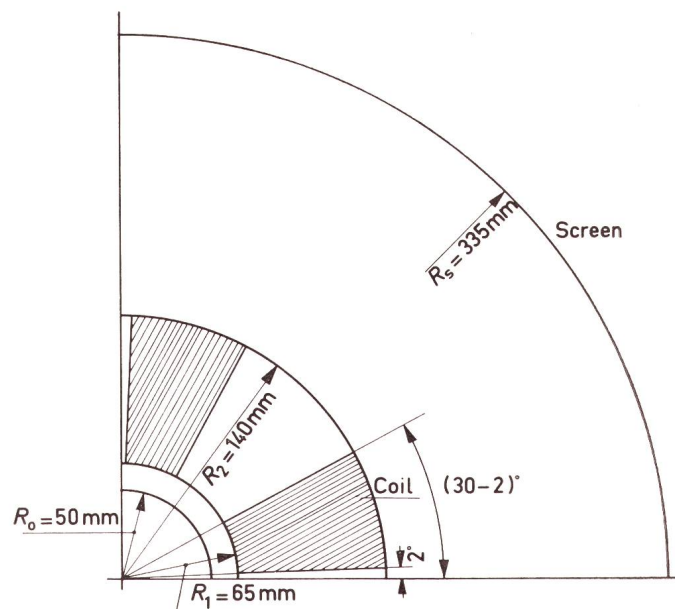


Fig. 9

Wicklungsanordnung des supraleitenden Quadrupolmagneten der CERN

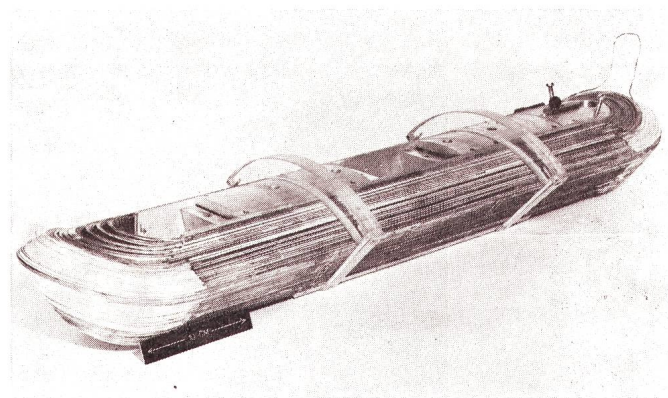


Fig. 10

Sektorwicklung eines Poles

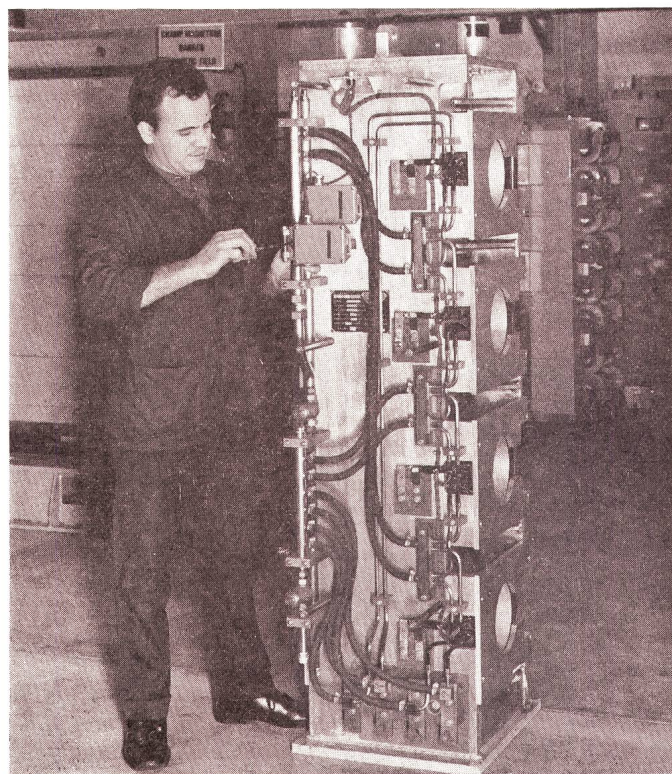


Fig. 8

Kompletter vierfacher Multipol

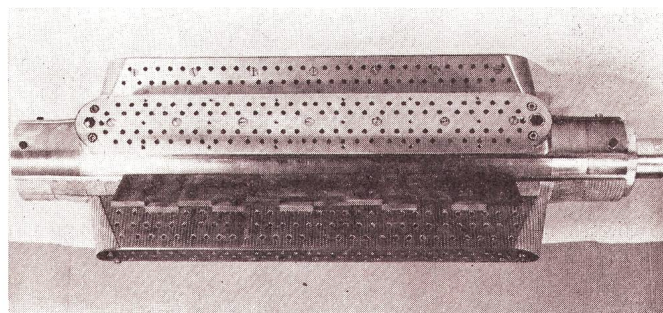


Fig. 11

Halter für Polwicklungen

Hauptparameter des Quadrupoles

Tabelle II

Parameter	Wert
Quadrupollänge	0,75 m
Innenradius der Wicklung	0,065 m
Aussenradius der Wicklung	0,148 m
Bohrungsradius	0,05 m
Abschirmungsradius	0,335 m
Stromdichte	$1,25 \cdot 10^8 \text{ Am}^{-2}$
Nennstrom	800,0 A
Feldgradient	$54,0 \text{ Tm}^{-1}$
Höchstfeld in der Wicklung	5,1 T
Gespeicherte Energie	200 kWs



unmittelbar um das innere Rohr gewickelt; es folgt die Sextupolwicklung; die beiden haben wassergekühlte Leiter. Die Quadrupolwicklung hat den grössten Radius und ist unmittelbar an die magnetische Abschirmung gelegt. Die ganze Einheit ist in Epoxydharz vergossen (Fig. 8). Die Multipolparameter sind in Tabelle I angegeben.

Fig. 9 zeigt das Wicklungsschema der ersten supraleitenden Strahltransport-Quadrupollinse der CERN. Die Sektorwicklung ist um 4 Blöcke (Fig. 10 und 11) aus unmagnetischem Stahl gewickelt. Der zusammengebaute Aktivteil ist durch entsprechende Schellen gegen elektromagnetische Kräfte geschützt (Fig. 12) und in den Kryostaten eingebaut (Fig. 13). Der konzentrisch um die Wicklung angeordnete Vakuumtank ist zugleich die magnetische Abschirmung.

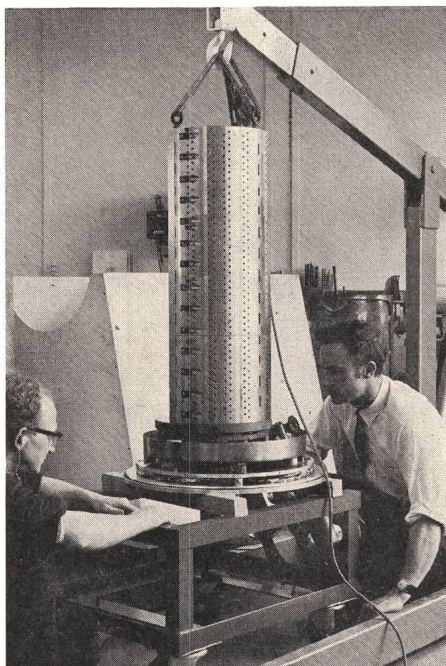


Fig. 12  
Aktivteil des Quadrupoles vor dem Einbau in den Kryostaten

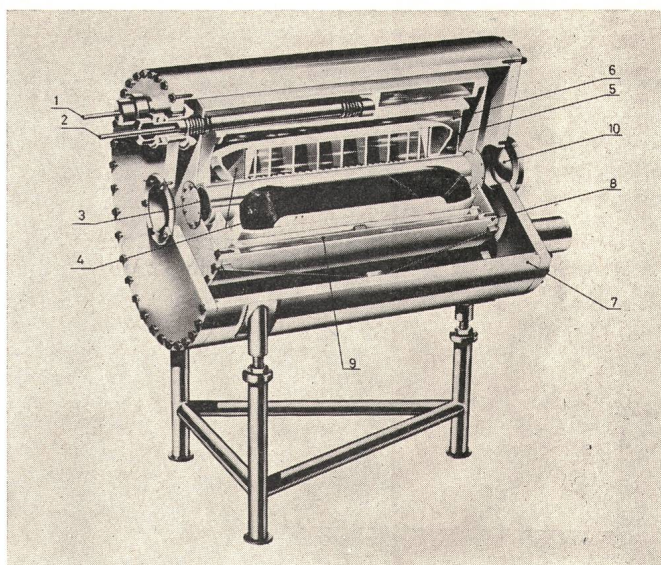


Fig. 13  
Der Kryostat

- |                    |                            |
|--------------------|----------------------------|
| 1 He-Eingang       | 6 Helium                   |
| 2 Stromzuführungen | 7 Vakuumtank               |
| 3 Bohrung          | 8 N <sub>2</sub> -Tank     |
| 4 Wicklung         | 9 flüssiger N <sub>2</sub> |
| 5 He-Tank          | 10 Strahlfenster           |

Die Hauptparameter des Quadrupoles sind in Tabelle II angegeben.

Der Quadrupol ist 1970 und 1971 mit Erfolg erprobt worden. Erregerströme über 900 A bei einem Höchstfeld in der Wicklung von 5,1 T sind dabei erreicht worden.

#### Literatur

- [1] H. B. Dwight: Tables of integrals and other mathematical data. Second edition. New York, MacMillan, 1955.

#### Adresse des Autors:

Dr. A. Asner, Organisation Européenne pour la Recherche Nucléaire (CERN), 1211 Genève 23.