

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

**Band:** 64 (1973)

**Heft:** 6

**Artikel:** Stationäres Betriebsverhalten der Zweiwicklungsmaschine

**Autor:** Altenbernd, G. / Jordan, H. / Teichgräber, U.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-915526>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 19.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Stationäres Betriebsverhalten der Zweiwicklungsmaschine

Von G. Altenbernd, H. Jordan und U. Teichgräber

621.3.016.1:621.313.32.045.5-114

Mit Hilfe der Drehfeldtheorie werden die allgemeinen Spannungsgleichungen der Zweiwicklungsmaschine hergeleitet. Infolge der Modulation des Luftspaltfeldes über den Leitwert und der gegenseitigen Kopplung der Felder zwischen Ständer- und Läuferwicklung entsteht in den beiden Wicklungen eine Vielzahl von Strömen mit unterschiedlichen Kreisfrequenzen. Das Zustandekommen dieser Kreisfrequenzen wird in einem sog. Modulationsschema angegeben. Für die in den Stromfrequenzen beschränkte Maschine wird das zeitlich konstante Drehmoment berechnet und getrennt in Reluktanzmoment und Moment für konstanten mittleren Luftspalt angegeben.

Les équations générales des tensions de la machine à deux enroulements sont établies à l'aide de la théorie du champ tournant. Du fait de la modulation du champ d'entrefer par la conductance et le couplage réciproque des champs entre enroulement statorique et enroulement rotorique, il en résulte dans les deux enroulements un grand nombre de courants de pulsations différentes. L'établissement de ces pulsations est indiqué dans un schéma de modulation. Pour la machine limitée à des fréquences de courants, on calcule le couple constant dans le temps et on l'indique, séparément en couple de réluctance et en couple pour entrefer moyen constant.

## 1. Einleitung

Als allgemeinste Ausführung der elektrischen Induktionsmaschinen kann die Zweiwicklungsmaschine mit einer Primärwicklung 1 im Ständer und einer Sekundärwicklung 2 im Läufer angesehen werden [1; 2]<sup>1)</sup>. Der Luftspalt zwischen Ständer und Läufer ist für diesen allgemeinen Fall als nicht konstant vorauszusetzen. Fig. 1 zeigt schematisch die Anordnung von Ständer und Läufer dieser Maschine. Die Ständerwicklung wird von der Spannung  $u_1$ , die Läuferwicklung von der Spannung  $u_2$  gespeist. Mit  $i_1$  und  $i_2$  werden die Momentanwerte der Ständer- und Läuferströme bezeichnet,  $\omega_m$  ist die mechanische Winkelgeschwindigkeit des Läufers.

Das Betriebsverhalten der Zweiwicklungsmaschine soll mit Hilfe der Drehfeldtheorie erfasst werden. Nach dieser Methode erhält man ein beschreibendes Spannungsgleichungssystem, das ohne Transformation direkt gelöst werden kann. Die Koeffizienten des Systems sind konstant und berechnen sich in bekannter Weise aus den Schnitt- und Wickeldaten der Maschine [3; 4]. Die Anwendung der Drehfeldtheorie lässt sofort die Besonderheiten im Betriebsverhalten der Zweiwicklungsmaschine erkennen:

- a) Auftreten von netzfremdfrequenten Strömen;
- b) Asynchronmomente, hervorgerufen durch den veränderlichen Luftspalt (Reluktanzmoment) und durch die stromführende Läuferwicklung;
- c) Pendelmomente.

Für die Durchführung der Berechnung werden die folgenden Voraussetzungen eingeführt.

Die an der Ständerwicklung 1 anliegende Netzspannung lautet:

$$u_1(t) = \sqrt{2} U_1 \cos \omega t, \quad (1)$$

wobei  $U_1$  den Effektivwert der Netzspannung und  $\omega = 2\pi f_N$  die Netzkreisfrequenz bedeuten. Oberschwingungen der Netzspannung werden nicht zugelassen.

Für netzfremde Frequenzen stellt das Netz einen Kurzschluss dar. Die Läuferwicklung ist an ihren Klemmen kurzgeschlossen:  $u_2 = 0$ . Eisen- und Reibungsverluste sowie der Einfluss der Sättigung des magnetischen Kreises werden vernachlässigt. Die Wirbelströme im Ständer- und Läufereisen beeinflussen nicht das Betriebsverhalten.

Die Ständerwicklung ist aus Einloch-Durchmesserspulen aufgebaut. Die Nutschlitze sind sehr schmal. Der Läufer besteht aus einem weich-magnetisch und zentrisch gelagerten Eisenkern mit ausgeprägten Polen, deren Anzahl mit der doppelten Maschinenpolpaarzahl  $2p$  übereinstimmt. Die Leiter der Läuferwicklung werden zweckmässigerweise in die Mitte der Pollücken gelegt. Man erhält damit auch Durchmesserspulen für die Läuferwicklung. In Fig. 2 ist die abgewickelte Zweiwicklungsmaschine mit den Koordinatenbeziehungen zwischen Ständer und Läufer dargestellt.

## 2. Luftspaltfelder

Ohne die Ströme und deren Frequenzen in den beiden Wicklungen von vornherein zu kennen, werden zunächst  $\sigma_1$  Ständerströme und  $\varrho_2$  Läuferströme vorgesehen. Die Summe der Ständerströme lautet:

$$i_1 = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\sigma_1} \sqrt{2} I_\sigma \cos(\omega_\sigma t + \varphi_\sigma) \quad (2)$$

und die der Läuferströme:

$$i_2 = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\varrho_2} \sqrt{2} I_\varrho \cos(\omega_\varrho t + \varphi_\varrho) \quad (3)$$

Die Ständer- und Läuferstrombeläge lassen sich mit den oben angegebenen Voraussetzungen als periodische Dirac-Funktionen darstellen [3], deren nach Fourier analysierte Formen lauten:

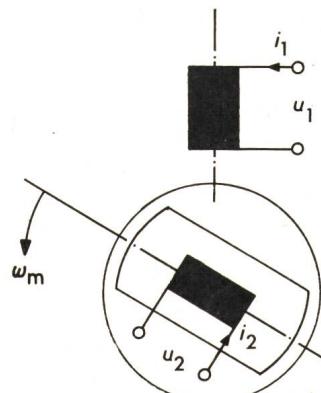


Fig. 1  
Zweiwicklungsmaschine  
Anordnung  
von Ständer und Läufer  
Bezeichnungen siehe im Text

<sup>1)</sup> Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

$$a_1(x_1, t) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma_1} \sum_{\gamma_1} -A_{\sigma\gamma_1} \sin(\gamma_1 x_1) \cos(\omega_{\sigma} t + \varphi_{\sigma}) \quad (\text{Ständer}) \quad (4)$$

und

$$a_2(x_2, t) = \sum_{\rho=1}^{\rho_2} \sum_{\gamma_2} -A_{\rho\gamma_2} \sin(\gamma_2 x_2) \cos(\omega_{\rho} t + \varphi_{\rho}) \quad (\text{Läufer}) \quad (5)$$

mit den Amplituden:

$$A_{\sigma} = \frac{2}{\pi} w_1 \frac{1}{R} \sqrt{2} I_{\sigma} \quad (6)$$

und

$$A_{\rho} = \frac{2}{\pi} w_2 \frac{1}{R} \sqrt{2} I_{\rho} \quad (7)$$

$I_{\sigma}$  und  $I_{\rho}$  sind die Effektivwerte der Ständer- und Läuferströme mit den Kreisfrequenzen  $\omega_{\sigma}$  und  $\omega_{\rho}$  und den Zeitphasenwinkeln  $\varphi_{\sigma}$  und  $\varphi_{\rho}$ . Die Phasenwinkel beziehen sich auf das Maximum der angelegten Ständernetzspannung  $u_1$ .  $w_1$  und  $w_2$  sind die in Reihe geschalteten Windungen der Ständer- und Läuferwicklung, wobei die Wicklungsfaktoren  $|\xi_{\sigma}| = |\xi_{\rho}| = 1$  sind,  $R$  ist der Bohrungsradius. Die Polpaarzahlen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  bedeuten das ungerade Vielfache der Maschinenpolpaarzahl:

$$\gamma = p(2g_1 - 1) \quad g_1 = 1, 2, 3 \dots \quad (8)$$

Unter Voraussetzung, dass kein Unipolarfluss im Luftspalt der Maschine auftreten kann, besteht zwischen Felderregung und Strombelag der folgende Zusammenhang:

$$v = \int a R dx_1 \quad (9)$$

$$v_{\sigma}(x_1, t) = \sum_{\sigma} \sum_{\gamma_1} 2 V_{\sigma\gamma_1} \cos(\gamma_1 x_1) \cos(\omega_{\sigma} t + \varphi_{\sigma}) \quad (\text{Ständer}) \quad (10)$$

$$v_{\rho}(x_2, t) = \sum_{\rho} \sum_{\gamma_2} 2 V_{\rho\gamma_2} \cos(\gamma_2 x_2) \cos(\omega_{\rho} t + \varphi_{\rho}) \quad (\text{Läufer}) \quad (11)$$

mit den Amplituden der Felderregungen:

$$V_{\sigma\gamma_1} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{w_1}{\gamma_1} \sqrt{2} I_{\sigma} \quad (12)$$

und

$$V_{\rho\gamma_2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{w_2}{\gamma_2} \sqrt{2} I_{\rho} \quad (13)$$

Der Leitwert der Maschine lässt sich genau wie die Felderregungen als Summe von periodischen Funktionen in Läuferkoordinaten  $x_2$  darstellen:

$$\lambda(x_2) = \lambda_0 \left[ 1 + \sum_{\mu} 2 K_{\mu} \cos(\mu x_2 - \varepsilon_{(\mu)}) \right] \quad (14)$$

$\lambda_0$  ist der arithmetische Mittelwert des gesamten Leitwertes (d. i. der Kehrwert des Luftpaltes) und entspricht dem Leitwert einer Maschine mit glattem Läufer.  $2 K_{\mu}$  ist die bezogene Amplitude der  $\mu$ -ten Leitwertwelle:

$$2 K_{\mu} = \frac{\lambda_{\mu}}{\lambda_0} \quad (15)$$

mit den Polpaarzahlen:

$$\mu = 2p \cdot g_2 \quad g_2 = 1, 2, 3 \dots \quad (16)$$

Die räumliche Phasenverschiebung  $\varepsilon_{(\mu)}$  der einzelnen Leitwertwellen verschwindet für den in Fig. 2 dargestellten Luftspaltverlauf.

Die Luftspaltfelder ergeben sich aus der Beziehung:

$$b = \mu_0 \lambda v \quad (17)$$

Für das Feld der Ständerwicklung erhält man durch Einsetzen der Gln. (10) und (14) in Gl. (17) mit der Ständer-Läufer-Koordinatenbeziehung gemäß Fig. 2

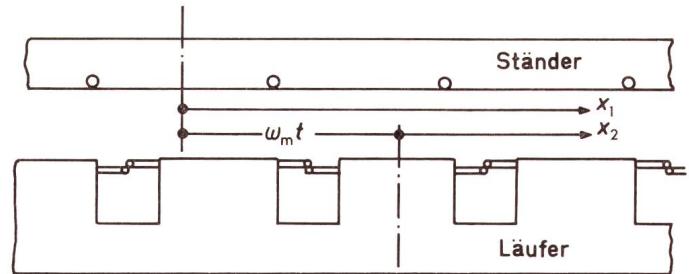


Fig. 2  
Die abgewickelte Zweizwicklungsmaschine  
Koordinatenbeziehungen

$$x_2 = x_1 - \omega_m t \quad (18)$$

den Ausdruck:

$$b_1(x_1, t) = \mu_0 \lambda_0 \left[ 1 + \sum_{\mu} 2 K_{\mu} \cos(\mu_1 - \mu \omega_m t) \right] \cdot \sum_{\sigma} \sum_{\gamma_1} 2 V_{\sigma\gamma_1} \cos(\gamma_1 x_1) \cdot \cos(\omega_{\sigma} t + \varphi_{\sigma}) \quad (19)$$

Das Feld des Läufers in Läuferkoordinaten  $x_2$  lautet:

$$b_2(x_2, t) = \mu_0 \lambda_0 \left[ 1 + \sum_{\mu} 2 K_{\mu} \cos(\mu x_2) \right] \sum_{\rho} \sum_{\gamma_2} 2 V_{\rho\gamma_2} \cos(\gamma_2 x_2) \cdot \cos(\omega_{\rho} t + \varphi_{\rho}) \quad (20)$$

Das Ausmultiplizieren und die paarweise Berücksichtigung von positiven und negativen Polpaarzahlen

$$\gamma = \pm p(2g_1 - 1) \quad (\text{Wicklungspolpaarzahlen})$$

$$\mu = \pm 2p \cdot g_2 \quad g_2 = 0, 1, 2 \dots \quad (\text{Leitwertpolpaarzahlen})$$

liefern für die Gln. (19) und (20) die folgenden Ausdrücke:

$$b_1(x_1, t) = \mu_0 \lambda_0 \sum_{\sigma} \sum_{-\gamma_1}^{+\gamma_1} \sum_{-\mu}^{+\mu} V_{\sigma\gamma_1} K_{\mu} \cdot \cos[(\gamma_1 + \mu)x_1 - (\omega_{\sigma} + \mu \omega_m)t - \varphi_{\sigma}] \quad (21)$$

und

$$b_2(x_2, t) = \mu_0 \lambda_0 \sum_{\rho} \sum_{-\gamma_2}^{+\gamma_2} \sum_{-\mu}^{+\mu} V_{\rho\gamma_2} K_{\mu} \cdot \cos[(\gamma_2 + \mu)x_2 - \omega_{\rho}t - \varphi_{\rho}] \quad (22)$$

### 3. Die allgemeinen Spannungsgleichungen

Mit Hilfe der Gln. (21) und (22) werden die Selbst- und Gegeninduktionen bestimmt. Man erhält allgemein den Bündelfluss einer Durchmesserwicklung aus der Beziehung:

$$\psi_{wu} = w_w \int b_u R l \cdot d x_w + \frac{1}{2} \frac{\pi}{p} \quad (23)$$

Der Index  $u$  kennzeichnet die Ursache (Induktionswelle) und der Index  $w$  die Wirkung (induzierte Wicklung).  $l$  ist die magnetisch wirksame Blechpaketlänge. Um die Felder des Ständers auf den Läufer und die des Läufers auf den Ständer wirken zu lassen, werden die Koordinatenbeziehungen aus Fig. 2 auf die Felder angewendet. Mit Gl. (18) lautet das Ständerfeld in Läuferkoordinaten:

$$b_1(x_2, t) = \mu_0 \lambda_0 \sum_{\sigma} \sum_{-\gamma_1}^{+\gamma_1} \sum_{-\mu}^{+\mu} V_{\sigma\gamma_1} K_{\mu} \cdot \cos[(\gamma_1 + \mu)x_2 - (\omega_{\sigma} - \gamma_1 \omega_m)t - \varphi_{\sigma}] \quad (24)$$

und mit der nach  $x_1$  aufgelösten Gl. (18) das Läuferfeld in Ständerkoordinaten:

$$b_2(x_1, t) = \mu_0 \lambda_0 \sum_{\rho} \sum_{-\gamma_2}^{+\gamma_2} \sum_{-\mu}^{\mu} V_{\rho \gamma_2} K_{\mu} \cdot \cos [(\nu_2 + \mu) x_1 - (\omega_{\rho} + (\gamma_2 + \mu) \omega_m) t - \varphi_{\rho}] \quad (25)$$

Werden die Gln. (21), (22), (24), (25) nacheinander in Gl. (23) eingesetzt, erhält man sämtliche Flussverkettungen der Zweizwickelmaschine.

Der selbstverkettete Fluss der Ständerwicklung ist:

$$\psi_{11}(t) = \sum_{\sigma} \sum_{-\gamma_1}^{+\gamma_1} \sum_{-\mu}^{\mu} l_{11(\gamma_1)} P_{\mu} \sqrt{2} I_{\sigma} \cos [(\omega_{\sigma} + \mu \omega_m) t + \varphi_{\sigma}] \quad (26)$$

mit der Drehfeldselbstinduktivität:

$$l_{11(\gamma_1)} = \frac{2}{\pi} \mu_0 \lambda_0 R l \frac{w_1^2}{\gamma_1^2} \quad (27)$$

und dem dimensionslosen Faktor:

$$P_{\mu} = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \mu} K_{\mu} \quad (28)$$

Der selbstverkettete Fluss der Läuferwicklung ergibt sich zu:

$$\psi_{22}(t) = \sum_{\rho} \sum_{-\gamma_2}^{+\gamma_2} \sum_{-\mu}^{\mu} l_{22(\gamma_2)} P_{\mu} \sqrt{2} I_{\rho} \cos (\omega_{\rho} t + \varphi_{\rho}) \quad (29)$$

Die Drehfeldselbstinduktivität der Läuferwicklung lautet:

$$l_{22(\gamma_2)} = \frac{2}{\pi} \mu_0 \lambda_0 R l \frac{w_2^2}{\gamma_2^2} \quad (30)$$

Durch die räumliche und zeitliche Zuordnung der beiden Wicklungen tritt eine wechselseitige magnetische Kopplung auf. Die Verkettung der Läuferwicklung mit dem Ständerfeld ergibt den Bündelfluss:

$$\psi_{21}(t) = \sum_{\sigma} \sum_{-\gamma_1}^{+\gamma_1} \sum_{-\mu}^{\mu} l_{21(\gamma_1)} P_{\mu} \sqrt{2} I_{\sigma} \cos [(\omega_{\sigma} - \gamma_1 \omega_m) t + \varphi_{\sigma}] \quad (31)$$

mit der Drehfeldgegeninduktivität:

$$l_{21(\gamma_1)} = \frac{2}{\pi} \mu_0 \lambda_0 R l \frac{w_1 w_2}{\gamma_1^2} \quad (32)$$

Auf gleiche Weise erhält man den Ausdruck für den Bündelfluss der Ständerwicklung infolge des Läuferfeldes:

$$\psi_{12}(t) = \sum_{\rho} \sum_{-\gamma_2}^{+\gamma_2} \sum_{-\mu}^{\mu} l_{12(\gamma_2)} P_{\mu} \sqrt{2} I_{\rho} \cos [(\omega_{\rho} + (\gamma_2 + \mu) \omega_m) t + \varphi_{\rho}] \quad (33)$$

mit der Drehfeldgegeninduktivität:

$$l_{12(\gamma_2)} = \frac{2}{\pi} \mu_0 \lambda_0 R l \frac{w_1 w_2}{\gamma_2^2} \quad (34)$$

Durch Anwendung des Induktionsgesetzes in der Form:

$$e(t) = - \frac{d \psi}{dt} \quad (35)$$

erhält man die Umlaufspannungen in den beiden Wicklungen. Im folgenden werden diese induzierten Spannungen in der zeitunabhängigen komplexen Schreibweise (stationäres Betriebsverhalten) aufgeführt:

$$E_{11} = \sum_{\sigma} \sum_{-\gamma_1}^{+\gamma_1} \sum_{-\mu}^{\mu} -j (\omega_{\sigma} + \mu \omega_m) l_{11(\gamma_1)} P_{\mu} I_{\sigma} \quad (\text{Ständer}) \quad (36)$$

$$E_{22} = \sum_{\rho} \sum_{-\gamma_2}^{+\gamma_2} \sum_{-\mu}^{\mu} -j \omega_{\rho} l_{22(\gamma_2)} P_{\mu} I_{\rho} \quad (\text{Läufer}) \quad (37)$$

$$E_{21} = \sum_{\sigma} \sum_{-\gamma_1}^{+\gamma_1} \sum_{-\mu}^{\mu} -j (\omega_{\sigma} - \gamma_1 \omega_m) l_{21(\gamma_1)} P_{\mu} I_{\sigma} \quad (\text{Läufer}) \quad (38)$$

$$E_{12} = \sum_{\rho} \sum_{-\gamma_2}^{+\gamma_2} \sum_{-\mu}^{\mu} -j (\omega_{\rho} + (\gamma_2 + \mu) \omega_m) l_{12(\gamma_2)} P_{\mu} I_{\rho} \quad (\text{Ständer}) \quad (39)$$

Die komplexen Effektivwerte der Ströme sind:

$$I_{\sigma} = I_{\sigma} \cdot e^{j \varphi_{\sigma}} \quad (40)$$

und

$$I_{\rho} = I_{\rho} \cdot e^{j \varphi_{\rho}} \quad (41)$$

Für das Aufstellen der Ständer- und Läuferspannungsgleichung müssen neben den Spannungen durch Selbst- und Geogeninduktion entsprechend den Gln. (36), (37), (38), (39) auch die treibende Netzspannung, die Ohmschen Spannungsfälle an den Wicklungswiderständen  $R_1$  (Ständer) und  $R_2$  (Läufer) sowie die Streuspannungen berücksichtigt werden. Danach sind die Spannungsgleichungen in allgemeiner Form bekannt.

$$U_1 = \sum_{\sigma} \left[ R_1 + \sum_{-\gamma_1}^{+\gamma_1} \sum_{-\mu}^{\mu} j (\omega_{\sigma} + \mu \omega_m) l'_{11(\gamma_1)} P_{\mu} \right] I_{\sigma} + \sum_{\rho} \sum_{-\gamma_2}^{+\gamma_2} \sum_{-\mu}^{\mu} j (\omega_{\rho} + (\gamma_2 + \mu) \omega_m) l_{12(\gamma_2)} P_{\mu} I_{\rho} \quad (42)$$

$$o = \sum_{\sigma} \sum_{-\gamma_1}^{+\gamma_1} \sum_{-\mu}^{\mu} j (\omega_{\sigma} - \gamma_1 \omega_m) l_{21(\gamma_1)} P_{\mu} I_{\sigma} + \sum_{\rho} \left[ R_2 + \sum_{-\gamma_2}^{+\gamma_2} \sum_{-\mu}^{\mu} j \omega_{\rho} l'_{22(\gamma_2)} P_{\mu} \right] I_{\rho} \quad (43)$$

Die Drehfeldinduktivitäten  $l'_{11(\gamma_1)}$  und  $l'_{22(\gamma_2)}$  beinhalten im Gegensatz zu den Drehfeldinduktivitäten  $l_{11(\gamma_1)}$  und  $l_{22(\gamma_2)}$  aus den Gln. (27), (30) auch die geometrischen Streuinduktivitäten.

Bei der Auswertung der Spannungsgleichungen muss darauf geachtet werden, dass die Wicklungs- und Leitwertpolpaarzahlen paarweise positiv und negativ berücksichtigt werden. Die Anzahl der Stromfrequenzen ist von den zulässigen Polpaarzahlen abhängig. Vor dem Aufstellen der speziellen Spannungsgleichungen werden zunächst die möglichen Stromfrequenzen angegeben.

#### 4. Stromkreisfrequenzen

Die möglichen Kreisfrequenzen der Ströme sind mit den Kreisfrequenzen der Luftspaltfelder im gleichen Koordinatensystem identisch. Man erkennt z. B. aus Gl. (21), dass das Ständerfeld durch den sich ändernden Luftspalt eine Art Amplitudenmodulation erfährt [3]. Es entstehen ein in der Frequenz konstanter Teil ( $\mu = 0$ ) und zwei Seitenfelder, deren Frequenzen und Polpaarzahlen von  $\gamma_1$  und  $\mu$  abhängen.

Das Zustandekommen der Kreisfrequenzen ist aus Fig. 3 zu erkennen. Bemerkenswert ist, dass die Kreisfrequenzen der Ständerströme durch die Leitwertmodulation (Reluktanz) und die Kreisfrequenzen durch Läuferrückwirkung in der Ständerwicklung übereinstimmen.

Alle Kreisfrequenzen  $\omega_{\sigma}$  (Ständer) und  $\omega_{\rho}$  (Läufer) werden als Vielfaches der Netzkreisfrequenz  $\omega$  angegeben. Der Schlupf  $s$  stellt ein Mass für die Abweichung der mechanischen Drehzahl von der synchronen Drehzahl des positiv umlaufenden Grundfeldes dar (Fig. 1).

$$\omega_m = \frac{\omega}{p} (1 - s) \quad (44)$$

Wie Fig. 3 zeigt, kann durch Vorgabe der Netzkreisfrequenz  $\omega$  und der mechanischen Winkelgeschwindigkeit  $\omega_m$  jede nur

durch die technischen Gegebenheiten begrenzte Kreisfrequenz der Läufer- und Ständerströme erzeugt werden (Frequenzgenerator).

## 5. Spezielle Spannungsgleichungen

Die speziellen Spannungsgleichungen entstehen aus den allgemeinen Gln. (42), (43) durch Beschränkung der Polpaarzahlen und der Kreisfrequenzen. Ohne diese Einschränkungen müssten unendlich viele Gleichungen berücksichtigt werden. Es sollte daher durch möglichst wenige Spannungsgleichungen das charakteristische Betriebsverhalten der Zweiwicklungsmaschine beschrieben werden.

Mit der Bedingung, dass nur Luftspaltfelder der Maschinenpolpaarzahl  $p$

$$|\gamma + \mu| \leq p \quad (45)$$

zugelassen werden und der Luftspalteitwert durch den Mittelwert  $\lambda_0$  und die erste Oberwelle  $\lambda_{2p}$  angenähert wird, erhält man zwar in der Polpaarzahl, aber nicht in der Kreisfrequenz beschränkte Luftspaltfelder (Fig. 3). Die Ständerkreisfrequenzen sollen durch die Leitwertmodulation der Netzkreisfrequenz (1. Modulationsstufe) begrenzt werden [5]. Es werden daher nur die drei Ständerkreisfrequenzen  $(2s - 1)\omega$ ,  $\omega$  und  $(3 - 2s)\omega$  zugelassen. Für die Läuferwicklung ergeben sich damit unter Einhaltung der Bedingung aus Gl. (45) die vier Kreisfrequenzen  $(3s - 2)\omega$ ,  $s\omega$ ,  $(2 - s)\omega$  und  $(4 - 3s)\omega$ .

Das Zustandekommen dieser Ständer- und Läuferkreisfrequenzen lässt sich direkt in Fig. 3 verfolgen, die Verbindungslien der zugelassenen Frequenzen sind stark hervorgehoben. In Tabelle I ist das spezielle Spannungsgleichungssystem in Matrixschreibweise dargestellt.

Die im Gleichungssystem auftretenden Koeffizienten lauten im einzelnen:

$$l_1 = \frac{2}{\pi} \mu_0 \lambda_0 R l \frac{w_1^2}{p^2} \quad (46)$$

$$l_{12} = \frac{2}{\pi} \mu_0 \lambda_0 R l \frac{w_{12} w_{21}}{p^2} = l_{21} \quad (47)$$

$$K_{2p} = \frac{\lambda_{2p}}{2\lambda_0} = K_{-2p} \quad (48)$$

$$L_1 = 2 l_1 + l_{1\sigma g} \quad (49)$$

$$L_2 = \frac{4}{\pi} \mu_0 \lambda_0 R l \frac{{w_2}^2}{p^2} + l_{2\sigma g} \quad (50)$$

$I_{1\sigma g}$  und  $I_{2\sigma g}$  sind die Streuinduktivitäten,  $\mu_0$  die Induktionskonstante.

## 6. Drehmomente

Die Auflösung des speziellen Spannungsgleichungssystems liefert die unbekannten Ströme nach Betrag und Phase. Damit sind die Strombeläge und Luftspaltinduktionen der Gln. (4), (5), (21), (22) ebenfalls bekannt. Mit diesen Größen berechnet sich das Drehmoment nach der Gleichung [4]:

$$T = -l R^2 \int_0^{2\pi} b_1(x_1, t) \cdot a_1(x_1, t) dx_1 \quad (51)$$

Danach werden sowohl die asynchronen wie auch die Pendelmomente bestimmt.

Interessieren dagegen nur die asynchronen Momente, so ist es vorteilhaft, die Leistungsbilanz anzuwenden. Dazu werden die rechte und linke Seite des Systems (Tab. I) mit dem trans-

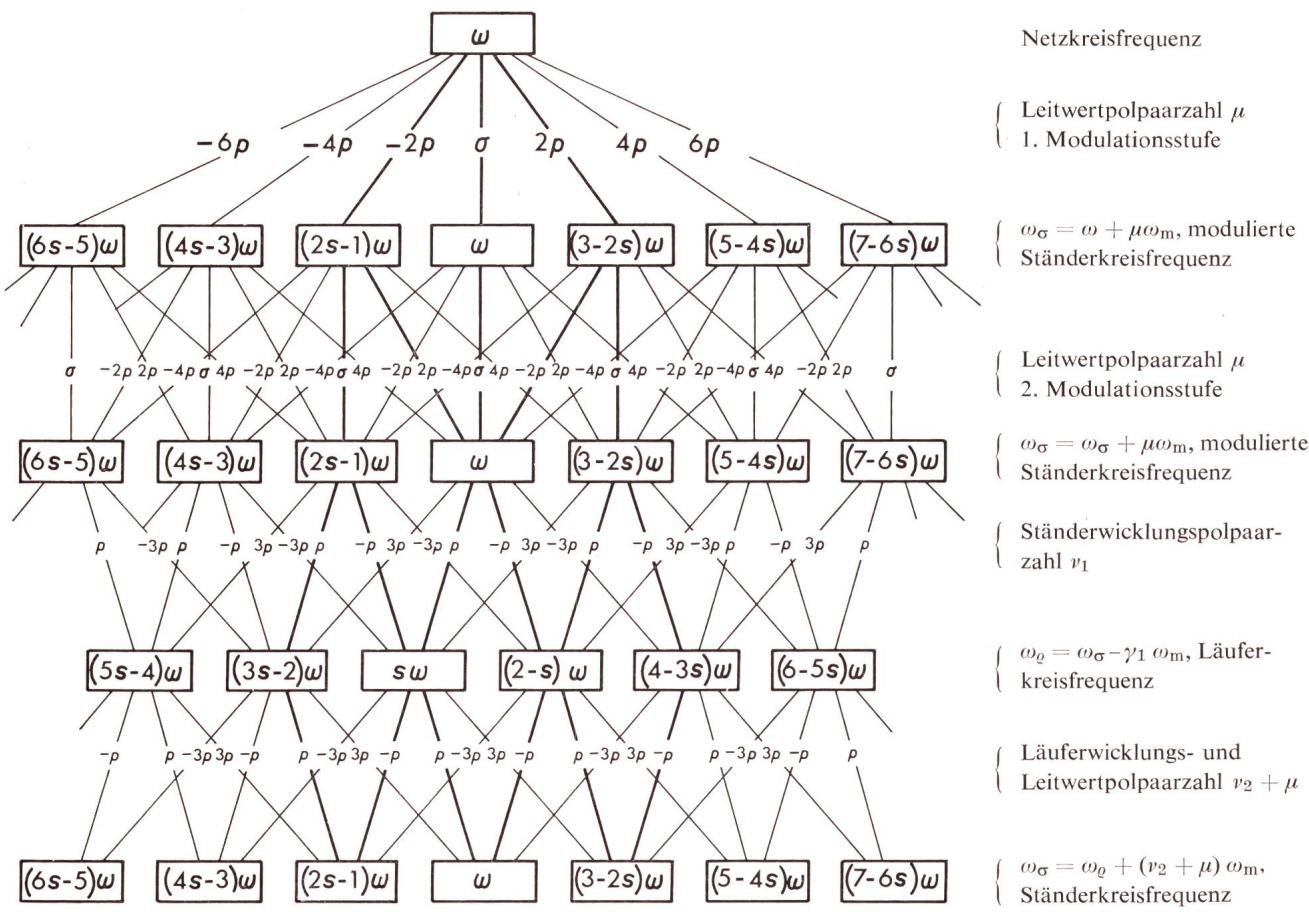


Fig. 3  
Mechanismus zum Entstehen der Stromkreisfrequenzen

Tabelle I

$\frac{R_1}{+ j(3 - 2s)\omega L_1}$	$j(3 - 2s)\omega l_1 K_{2p}$	$j(3 - 2s)\omega l_{12}(1 + K_{2p}) j(3 - 2s)\omega l_{12}(1 + K_{2p})$	
$\frac{j\omega l_1 K_{-2p}}{j(4 - 3s)\omega l_{21}(1 + K_{2p})}$	$+ j\omega L_1$	$j\omega l_1 K_{2p}$	$j\omega l_{12}(1 + K_{2p})$
$j(2 - s)\omega l_{21}(1 + K_{2p})$	$j(2s - 1)\omega l_1 K_{-2p}$	$+ j(2s - 1)\omega L_1$	$j(2s - 1)\omega l_{12}(1 + K_{2p})$
$j(2 - s)\omega l_{21}(1 + K_{2p})$	$j(2 - s)\omega l_{21}(1 + K_{2p})$	$+ j(4 - 3s)\omega L_2(1 + K_{2p})$	$+ j(2 - s)\omega l_{12}(1 + K_{2p})$
$j(3s - 2)\omega l_{12}(1 + K_{2p})$	$j\omega l_{21}(1 + K_{2p})$	$j\omega l_{21}(1 + K_{2p})$	$R_2$
			$+ j\omega L_2(1 + K_{2p})$
			$+ j(3s - 2)\omega L_2(1 + K_{2p})$

ponierten konjugiert komplexen Stromvektor multipliziert [1]:

$$[\mathbf{I}_t^*] [\mathbf{Z}] [\mathbf{I}] = [\mathbf{I}_t^*] [\mathbf{U}] \quad (52)$$

$$\text{oder } [\mathbf{R}] \cdot [\mathbf{I}^2] + [\mathbf{I}_t^*] j [\mathbf{X}] [\mathbf{I}] = [\mathbf{I}_t^*] [\mathbf{U}] \quad (53)$$

Hierin bedeuten:

$[\mathbf{Z}]$  Widerstandsmatrix,

$[\mathbf{R}]$  quadratische Matrix mit den Ohmschen Widerständen auf der Hauptdiagonalen,

$[\mathbf{X}]$  quadratische Matrix, deren Elemente nur aus Selbst- und Gegeninduktivitäten multipliziert mit den entsprechenden Kreisfrequenzen bestehen.

Da nach Voraussetzung die Ohmschen Wicklungsverluste die einzigen Verluste der Zweiwicklungsmaschine darstellen, erhält man für die mechanische Leistung:

$$P_{\text{mech}} = \text{Re} ([\mathbf{I}_t^*] \cdot j [\mathbf{X}] [\mathbf{I}]) \quad (54)$$

Obwohl die Gl. (54) eine  $1 \times 1$ -Matrix darstellt, werden die einzelnen Summanden in Form der Widerstandsmatrix (Tab. I) aufgeführt:

Für das zeitlich konstante, asynchrone Moment gilt allgemein:

$$T_{\text{as}} = \frac{P_{\text{mech}}}{\omega_m} \quad (56)$$

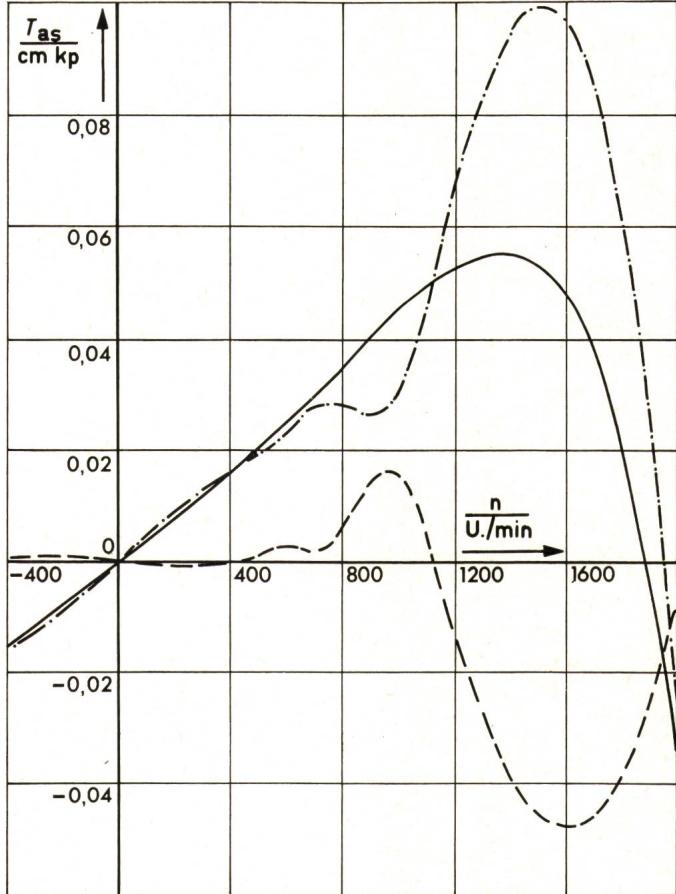
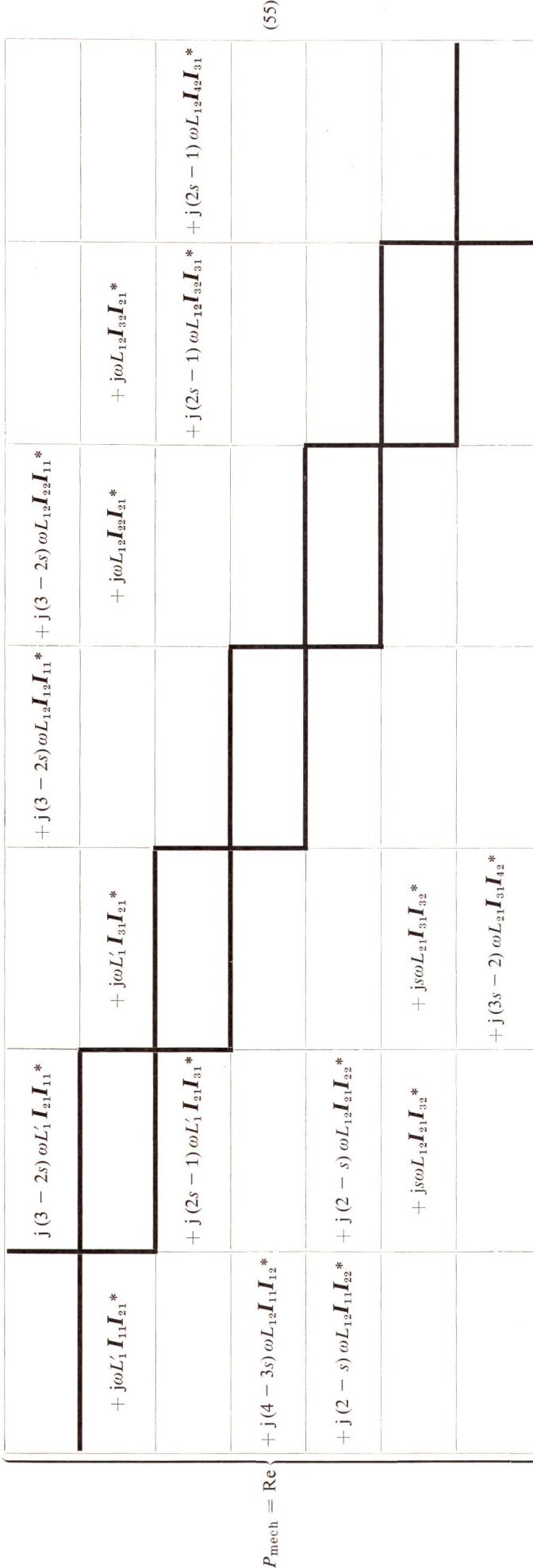


Fig. 4  
Die asynchronen Momente der Zweiwicklungsmaschine

- resultierendes Moment
- - - Reluktanzmoment
- · - - asynchrones Moment für konstanten mittleren Luftspalt



Gl. (55) lässt sich durch Zusammenfassen der einzelnen Summanden auf eine einfache Form bringen. Man erhält schliesslich als asynchrones Moment der speziellen Zweiwicklungsmaschine den Ausdruck:

$$T_{as} = p \cdot \text{Im} \left\{ 2 l_1 K_{2p} [\mathbf{I}_{21} (\mathbf{I}_{31}^* - \mathbf{I}_{11}^*)] + l_{12} (1 + K_{2p}) [\mathbf{I}_{12} \mathbf{I}_{11}^* + \mathbf{I}_{22} (\mathbf{I}_{21}^* - \mathbf{I}_{11}^*) + \mathbf{I}_{32} (\mathbf{I}_{31}^* - \mathbf{I}_{21}^*) - \mathbf{I}_{42} \mathbf{I}_{31}^*] \right\} \quad (57)$$

Gl. (57) zerfällt in zwei Teile. Der erste Teil:

$$T_{as1} = p \cdot \text{Im} \left\{ 2 l_1 K_{2p} \mathbf{I}_{21} (\mathbf{I}_{31}^* - \mathbf{I}_{11}^*) \right\} \quad (58)$$

gibt die Wirkung des Läufers mit veränderlichem Luftspalt wieder.  $T_{as1}$  [Gl. (58)] wird als Reluktanzmoment der Zweiwicklungsmaschine bezeichnet. Der zweite Teil:

$$T_{as2} = p \cdot \text{Im} \left\{ l_{12} (1 + K_{2p}) [\mathbf{I}_{12} \mathbf{I}_{11}^* + \mathbf{I}_{22} (\mathbf{I}_{21}^* - \mathbf{I}_{11}^*) + \mathbf{I}_{32} (\mathbf{I}_{31}^* - \mathbf{I}_{21}^*) - \mathbf{I}_{42} \mathbf{I}_{31}^*] \right\} \quad (59)$$

beinhaltet das asynchrone Moment der Maschine mit einem mittleren konstanten Luftspalt. Im folgenden wird das Ergebnis der Berechnung des asynchronen Momentes für eine Maschine aufgeführt.

## 7. Ergebnis

### Maschinendaten

Netzspannung	$U_N = 7,5 \text{ V}$
Netzfrequenz	$f_N = 200 \text{ Hz}$
Polpaarzahl	$p = 6$
Blechpaketlänge	$l = 1,8 \text{ cm}$
Läuferradius	$R = 4 \text{ cm}$
Luftspaltlänge (min.)	$\delta = 0,06 \text{ cm}$
Polbogen	$b_p = 1,4 \text{ cm}$

### Ständer

Windungszahl in Reihe	$w_1 = 125$
Ohmscher Widerstand	$R_1 = 0,14 \Omega$
geometrische Streuinduktivität	$l_{1g} = 0,1 (2l)$

### Läufer

Windungszahl je Pol	$w_2 = 188$
Ohmscher Widerstand	$R_2 = 3,0 \Omega$
geometrische Streuinduktivität	$l_{2g} = 0,3 (2l)$

Fig. 4 zeigt das resultierende asynchrone Moment der Zweiwicklungsmaschine und dessen Zusammensetzung aus dem Reluktanzmoment [Gl. (58)] und dem Moment bei konstantem mittleren Luftspalt [Gl. (59)].

### Literatur

- [1] C. V. Jones: The unified theory of electrical machines. London, Butterworth, 1967.
- [2] H. Weh und J. Meyer: Die direkte Berechnung von Strom und Drehmoment bei Asynchronmaschinen. ETZ-A 87(1966)4, S. 504...512.
- [3] G. Altenbernd: Beitrag zur Theorie des Spaltpolmotors. Dissertation der Technischen Hochschule Hannover, 1969.
- [4] H. Jordan und M. Weis: Asynchronmaschinen. Uni-text. Braunschweig, Vieweg, 1969.
- [5] G. Altenbernd, H. Bausch und H. Jordan: Theorie des Einphaseninduktionsmotors mit abgestuftem Luftspalt. Acta Technica CSAV 13(1968)4, S. 403...425.

### Adressen der Autoren:

Dr.-Ing. G. Altenbernd, Oberingenieur; Prof. Dr.-Ing. H. Jordan, Direktor, Institut für elektrische Maschinen der TU Hannover und Dipl.-Ing. U. Teichgräber, Entwicklungingenieur der Abt. Bahnen der AEG-Telefunken.