

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins  
**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke  
**Band:** 64 (1973)  
**Heft:** 6

**Artikel:** Stromverteilung und Induktionsvorgang im Scheibenläufer einer Unipolarmaschine  
**Autor:** Haubitzer, W.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-915523>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 19.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Stromverteilung und Induktionsvorgang im Scheibenläufer einer Unipolarmaschine

Von W. Haubitzer

621.313.044.53

## 1. Einleitung

Als um die Jahrhundertwende von den damaligen Gleichstromzentralen immer höhere Leistungen gefordert wurden, traten die Kommutierungsschwierigkeiten bei den Gleichstrommaschinen immer stärker in Erscheinung.

Man versprach sich daher von der kollektorlosen Gleichstrommaschine (Unipolarmaschine) grosse Erfolge.

Noeggerath baute im Jahre 1904 die erste Unipolarmaschine grösserer Leistung (500 V und 300 kW). Danach wurde der Bau von Unipolarmaschinen von mehreren Firmen aufgenommen. Trotz intensiver Bemühungen blieb aber der Unipolarmaschine ein durchschlagender Erfolg versagt.

Durch den Fortfall des Kollektors waren zwar die Schwierigkeiten der Stromverwendung beseitigt, sie traten aber in neuer Form als Kontaktschwierigkeiten zwischen Bürsten und Schleifringen in Erscheinung.

Bald gelang es, die Kommutierung zu beherrschen, und dadurch wurde die Unipolarmaschine als Energieerzeuger von der Gleichstrommaschine und später vom Drehstromturbogenerator verdrängt.

Erst in neuerer Zeit erlangte die Unipolarmaschine in der Ausführung mit Scheibenläufer in Verbindung mit Flüssigkeitskontakten als Niederspannungs-Hochstrommaschine zur Speisung von Elektrolyseanlagen und Erzeugung hoher magnetischer Gleichfelder eine gewisse Bedeutung. Im folgenden sei die Berechnung der Stromverteilung und der magnetischen Feldstärken im Scheibenläufer einer Unipolarmaschine bei ungleichmässiger Stromabnahme am Zylindermantel erläutert.

## 2. Übersicht

In dieser Arbeit sei der ungünstigste Fall der ungleichmässigen Stromabnahme durch eine punktförmige Kontaktstelle behandelt.

Das vorliegende Randwertproblem ist in dieser allgemeinen Form nicht lösbar. Bedenkt man aber, dass die Scheibendicke im Verhältnis zum Scheibenradius sehr klein ist, so lässt sich für den Grenzfall einer unendlich dünnen Scheibe das Randwertproblem exakt lösen.

## 3. Die Feldgleichungen

In einem homogenen zeitlich konstanten Magnetfeld rotiert eine Scheibe mit der Dicke  $h$  und den Radien  $R_0$  und  $R$ . Zur Beschreibung dieses Problems verwendet man zweckmässig Zylinderkoordinaten. Die Richtung der positiven  $z$ -Achse des zugeordneten Cartesischen Koordinatensystems falle hierbei mit der positiven Zählrichtung der Induktion  $B_z$  zusammen. Fig. 1 zeigt die Darstellung in Zylinderkoordinaten mit den Einheitsvektoren  $e_1, e_2, e_3$  in den Richtungen zunehmender  $r, \varphi, z$  und die zugeordneten Cartesischen Koordinaten.

Das magnetische Gesamtfeld der Maschine setzt sich aus dem konstanten Aussenfeld  $B_z$  und dem Feld  $B_s$  der Strömung zusammen.

$$B = B_z + B_s \quad (1)$$

Ebenso lässt sich die resultierende elektrische Feldstärke  $E$  in eine vom magnetischen Feld induzierte elektrische Feldstärke  $E_i$  und in eine von der Ladungsverteilung herrührende Feldstärke  $E_a$  zerlegen.

$$E = E_i + E_a \quad (2)$$

Die induzierte elektrische Feldstärke ist hierbei:

$$E_i = [v, B] \quad (3)$$

Nach dieser Zerlegung lauten die Maxwell'schen Gleichungen:

$$\text{rot } H_s = J \quad (4)$$

$$\text{rot } E_a = 0 \quad (5')$$

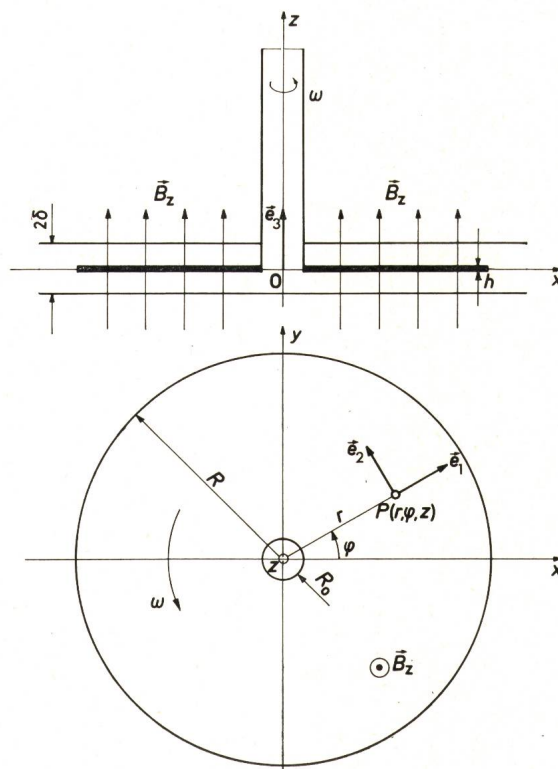


Fig. 1

Unipolarmaschine mit punktförmiger Stromabnahme

$\vec{B}_z$	Magnetische Induktion des Aussenfeldes
$h$	Scheibendicke
$\delta$	Maschinenluftspalt
$R$	Aussenradius des Scheibenläufers
$R_0$	Innenradius des Scheibenläufers
$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$	Einheitsvektoren im Zylinderkoordinatensystem
$P$	Punkt im Zylinderkoordinatensystem
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit



$$\operatorname{div} \mathbf{B}_s = 0 \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \quad (7)$$

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \quad (8)$$

Wendet man die Rotation auf Gl. (2) an, so erhält man:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\omega \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{B}_{si}}{\partial \varphi} \quad (5)$$

Um das vorliegende Problem zu lösen, ersetze man die zylindrische Scheibe durch eine Kreisfläche. Die räumliche Strömung geht hierbei in eine Flächenströmung über.

#### 4. Die Flächenströmung

Es seien nun die elektrischen Eigenschaften der Scheibe mit der endlichen Dicke  $h$  auf das idealisierte System einer Kreisfläche übertragen. Lässt man die Dicke der Scheibe gegen Null gehen, so nähert sich die räumliche Strömung  $\mathbf{J}$  dem Grenzfall einer Flächenströmung  $\mathbf{S}^{1)}$  von endlicher Grösse.

$$\mathbf{S} = \lim_{h \rightarrow 0} h \mathbf{J} \quad (9)$$

Ebenso nähert sich bei einem Grenzübergang die spezifische Leitfähigkeit  $\gamma$  der Scheibe dem Grenzfall der spezifischen Leitfähigkeit einer Kreisfläche  $\kappa$ .

$$\kappa = \lim_{h \rightarrow 0} h \gamma \quad (10)$$

Die auf die Kreisfläche übertragenen elektrischen Eigenschaften sind der Strom bzw. der Widerstand der Scheibe. Das Ohmsche Gesetz für das idealisierte System lautet:

$$\mathbf{S} = \kappa \mathbf{E} \quad (11)$$

#### 5. Das magnetische Feld der Flächenströmung

Beim Durchtritt des magnetischen Feldes durch den Flächenstrom erfahren die Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärke einen Sprung, der gleich der Normalkomponente des Strombelages an dieser Stelle ist (Fig. 2).

Mathematisch lässt sich diese Beziehung über die Flächenrotation ausdrücken.

$$\operatorname{Rot} \mathbf{H} = [\mathbf{n}_{12}, (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)] = \mathbf{S} \quad (12)$$

Gl. (4) geht also für den idealisierten Fall der Flächenströmung in die Form über:

$$\operatorname{Rot} \mathbf{H}_s = [\mathbf{e}_3, (\mathbf{H}_s(r, \varphi, +0) - \mathbf{H}_s(r, \varphi, -0))] = \mathbf{S} \quad (13)$$

Da die Flächenströmung ebenfalls quellenfrei sein muss, tritt an Stelle von Gl. (7) die Gleichung:

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rS_1)}{\partial r} + \frac{\partial S_2}{\partial \varphi} \right] = 0 \quad (14)$$

Erfolgt die Stromabnahme punktförmig am Umfang der Kreisfläche, so besitzt die Flächenströmung  $\mathbf{S}$  zwei Komponenten in den Richtungen  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$ .

$$\mathbf{S} = \mathbf{e}_1 S_1 + \mathbf{e}_2 S_2 \quad (15)$$

Für das magnetische Feld der Flächenströmung

$$\mathbf{H}_s = \mathbf{e}_1 H_{s1} + \mathbf{e}_2 H_{s2} + \mathbf{e}_3 H_{s3} \quad (16)$$

folgen bei symmetrischer Anordnung der Erregerpole die Symmetriebedingungen:

$$\begin{aligned} H_{s1}(r, \varphi, -z) &= -H_{s1}(r, \varphi, +z) \\ H_{s2}(r, \varphi, -z) &= -H_{s2}(r, \varphi, +z) \\ H_{s3}(r, \varphi, -z) &= H_{s3}(r, \varphi, +z) \end{aligned} \quad (17)$$

Setzt man Gl. (15) und Gl. (16) unter Berücksichtigung der Symmetriebedingungen in Gl. (13) ein, so lauten die Komponenten der Flächenstromdichte:

$$\begin{aligned} S_1 &= -2 H_{s2}(r, \varphi, +0) \\ S_2 &= 2 H_{s1}(r, \varphi, +0) \end{aligned} \quad (18)$$

#### 6. Die Aufstellung der normierten Differentialgleichungen

Setzt man Gl. (18) in Gl. (14) ein, so wird:

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r H_{s2})}{\partial r} - \frac{\partial H_{s1}}{\partial \varphi} \right] = 0$$

dies ist aber gleichbedeutend mit

$$(\mathbf{e}_3, \operatorname{rot} \mathbf{H}_s) = 0 \quad \text{für } z = +0 \quad (19)$$

Das bedeutet, dass das Feld  $\mathbf{H}_s$ , das ja ohnehin in den beiden Halbräumen  $z \gtrless 0$  wirbelfrei ist, diese Eigenschaft auch noch entlang der  $r, \varphi$ -Ebene besitzt, solange man diese nicht durchdringt. Fasst man sie also als Sperrfläche auf, so lässt sich  $\mathbf{H}_s$  von einem skalaren Potential ableiten.

$$\mathbf{H}_s = -H \lambda \operatorname{grad} V$$

$$\operatorname{grad} V = \mathbf{e}_1 \frac{\partial V}{\partial r} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial V}{\partial z} \quad (20)$$

wobei  $V$  die Laplacesche Gleichung

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (21)$$

erfüllen muss.

Setzt man Gl. (18) in Gl. (5) ein, so wird:

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_3, \operatorname{rot} \mathbf{S}) &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r S_2)}{\partial r} - \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} \right] = \\ &= \frac{2}{r} \left[ \frac{\partial(r H_{s1})}{\partial r} + \frac{\partial H_{s2}}{\partial \varphi} \right] = -\omega \kappa \mu_0 \frac{\partial H_{s3}}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (22)$$

$z = +0$

Da die Permeabilität überall im Raum konstant ist, folgt aus Gl. (6) auch die Quellenfreiheit für die magnetische Feldstärke

$$\operatorname{div} \mathbf{H}_s = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r H_{s1})}{\partial r} + \frac{\partial H_{s2}}{\partial \varphi} + r \frac{\partial H_{s3}}{\partial z} \right] = 0 \quad (23)$$

Unter Berücksichtigung der Quellenfreiheit erhält man aus Gl. (22) die wesentlich einfachere Beziehung:

$$\frac{\partial H_{s3}}{\partial z} = \frac{\omega \kappa \mu_0}{2} \frac{\partial H_{s3}}{\partial \varphi} \quad \text{für } z = +0 \quad (24)$$

Drückt man Gl. (24) über das skalare Potential  $V$  aus, so gilt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\omega \kappa \mu_0}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \varphi} \quad \text{für } z = +0 \quad (25)$$

<sup>1)</sup>  $\mathbf{S}$  = Flächenstromdichte;  $\kappa$  = Flächenleitfähigkeit.



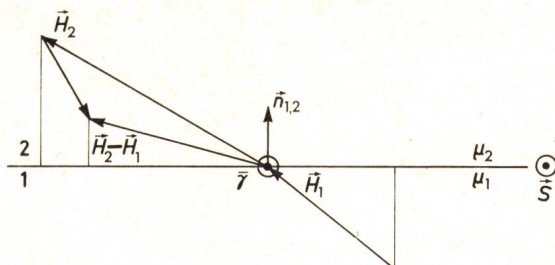


Fig. 2

**Sprungwirbel eines magnetischen Feldes**

- $\vec{S}$  Flächenstromdichte  
 $\vec{H}_1, \vec{H}_2$  magnetische Feldstärken in den Medien 1 und 2  
 $\mu_1, \mu_2$  Permeabilität in den Medien 1 und 2  
 $\vec{n}_{1,2}$  Flächennormale

Es ist von Vorteil, die Gl. (20), (21) und (25) zu normieren. Zu diesem Zweck seien folgende dimensionslose Grössen eingeführt

$$\frac{r}{R} = r_* \quad \text{und} \quad \frac{z}{R} = z_* \quad (26)$$

und gesetzt

$$V(r, \varphi, z) = \psi(r_*, \varphi, z_*) \quad \lambda = R \quad (27)$$

Nach Eintragen in die Gl. (20), (21) und (25) erhält man die zugeordneten normierten Gleichungen:

$$\vec{H}_s = -HR \text{ grad } \psi \quad (28)$$

$$R \text{ grad } \psi = \vec{e}_1 \frac{\partial \psi}{\partial r_*} + \vec{e}_2 \frac{1}{r_*} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \vec{e}_3 \frac{\partial \psi}{\partial z_*}$$

$$R^2 \cdot \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r_*} + \frac{1}{r_*^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_*^2} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z_*^2} - k^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_* \partial \varphi} = 0 \quad \text{für} \quad z_* = +0 \quad (30)$$

wobei für

$$\frac{R\omega\mu_0}{2} = k^2 \quad (31)$$

gesetzt wurde.

Aus Gl. (28) folgt dann für die Komponenten der Flächenströmung:

$$S_1 = 2H \frac{1}{r_*} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \quad (32)$$

und

$$S_2 = -2H \frac{\partial \psi}{\partial r_*} \quad \text{für} \quad z_* = +0$$

## 7. Die Lösung der Potentialgleichung

**unter Berücksichtigung eines endlichen Luftspaltes**

Zur Lösung der Differentialgleichung (29) wird der Ansatz

$$\psi = F(r_*) \cdot G(z_*) \cdot e^{jn\varphi} \quad (33)$$

benützt.

Nach Eintragen in Gl. (29) wird

$$\frac{1}{F(r_*)} \left[ F''(r_*) + \frac{1}{r_*} F'(r_*) \right] - \frac{n^2}{r_*^2} + \frac{G''(z_*)}{G(z_*)} = 0 \quad (34)$$

oder

$$\frac{1}{F(r_*)} \left[ F''(r_*) + \frac{1}{r_*} F'(r_*) \right] - \frac{n^2}{r_*^2} = - \frac{G''(z_*)}{G(z_*)} = -\alpha^2$$

Mit der Separationskonstanten  $-\alpha^2$  erhält man die beiden Differentialgleichungen:

$$F''(r_*) + \frac{1}{r_*} F'(r_*) + \left[ \alpha^2 - \frac{n^2}{r_*^2} \right] F(r_*) = 0 \quad (35)$$

$$G''(z_*) - \alpha^2 G(z_*) = 0 \quad (36)$$

mit den Lösungen

$$F(r_*) = C_1 Z_n^{(1)}(\alpha r_*) + C_2 Z_n^{(2)}(\alpha r_*) \quad (37)$$

$$G(z_*) = C_3 e^{\alpha z_*} + C_4 e^{-\alpha z_*} \quad (38)$$

In Gl. (37) bedeuten  $Z_n^{(1)}$  und  $Z_n^{(2)}$  zwei linear unabhängige Zylinderfunktionen.

Ordnet man im Abstand  $z = \pm \delta$  von der Scheibe Pole an, so werden bei grosser Permeabilität des Eisens die Polebenen zu Äquipotentialflächen, das heisst, das magnetische Feld der Wirbelströme steht auf den Polebenen normal.

Die für  $z_* = \pm \delta_*$  verschwindenden partikulären Lösungen lauten:

$$\psi_p = [A_+ Z_n^{(1)}(\alpha r_*) + B_+ Z_n^{(2)}(\alpha r_*)] \sinh \alpha(\delta_* - z_*) \cdot e^{jn\varphi} \quad \text{für} \quad 0 < z_* \leq \delta_*$$

und

$$\psi_p = [A_- Z_n^{(1)}(\alpha r_*) + B_- Z_n^{(2)}(\alpha r_*)] \sinh \alpha(\delta_* + z_*) \cdot e^{jn\varphi} \quad \text{für} \quad 0 > z_* \geq -\delta_*$$

Aus der Symmetriebedingung des Feldes [siehe Gl. (17)] folgt dann für die Integrationskonstanten:

$$A_+ = -A_- = A \quad \text{und} \quad B_+ = -B_- = B \quad (40)$$

Nach Einsetzen in Gl. (39) erhält man schliesslich:

$$\psi_p = [A Z_n^{(1)}(\alpha r_*) + B Z_n^{(2)}(\alpha r_*)] \sinh \alpha(\delta_* - z_*) \cdot e^{jn\varphi}, \quad 0 < z_* \leq \delta_*$$

und

$$\psi_p = -[A Z_n^{(1)}(\alpha r_*) + B Z_n^{(2)}(\alpha r_*)] \sinh \alpha(\delta_* + z_*) \cdot e^{jn\varphi}, \quad 0 > z_* \geq -\delta_*$$

Da Gl. (41) die Nebenbedingung von Gl. (30) erfüllen muss, erhält man nach Eintragen in diese ein System von Bestimmungsgleichungen für die Separationskonstanten  $\alpha_n$ :

$$\alpha_n \sinh \alpha_n \delta_* + jk^2 n \cosh \alpha_n \delta_* = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (42)$$

## 8. Die Berücksichtigung der einseitigen achsialen Strömung

Wird die Unipolarmaschine belastet, so fliesst ihr in der positiven Halbebene ( $z > 0$ ) der Belastungsstrom  $I$  zu.

Die einseitige Einstromung (Fig. 3) lässt sich durch zwei zur Scheibe symmetrisch verlaufende Einstromungen von der Stärke  $\frac{I}{2}$  und durch einen achsialen Strom der Grösse  $\frac{I}{2}$  stets ersetzen (Fig. 4).

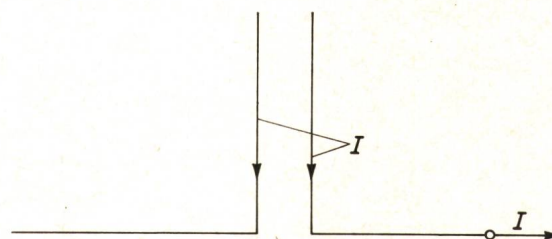


Fig. 3

**Einseitige achsiale Einstromung**  
 $I$  Gesamtströmung (Maschinenstrom)



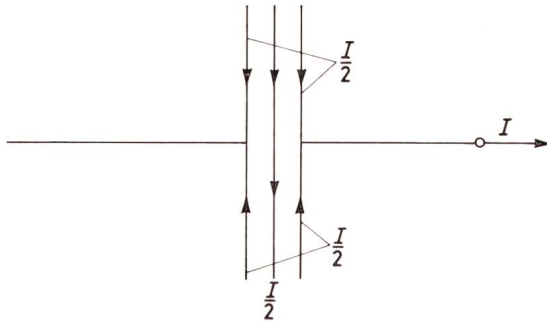


Fig. 4  
Symmetrische Einstromung  
I Gesamtströmung (Maschinenstrom)

Damit besteht für die achsiale Einstromung zur Scheibe in den beiden Halbräumen vollkommene Symmetrie, wie dies auch Gl. (18) zum Ausdruck bringt.

Das Potential der symmetrischen Einstromung lautet somit:

$$\psi_S = \begin{cases} K\varphi, & z_* > 0 \\ -K\varphi, & z_* < 0 \end{cases} \quad (43)$$

Hingegen ist das Potential des achsialen Stromes

$$\psi_A = K\varphi \quad z_* \geq 0 \quad (44)$$

in beiden Halbräumen gleich und liefert zur radialen Flächenströmung in der Scheibe keinen Beitrag.

Das Potential der einseitigen Einstromung erhält man durch Superposition der beiden Potentiale:

$$\psi_E = \psi_S + \psi_A = \begin{cases} 2K\varphi, & z_* > 0 \\ K\varphi, & z_* = 0 \\ 0, & z_* < 0 \end{cases} \quad (45)$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (29) lautet nun:

$$\psi = 2K\varphi + [AZ_n^{(1)}(\alpha_n r_*) + BZ_n^{(2)}(\alpha_n r_*)] \sinh \alpha_n (\delta_* - z_*) \cdot e^{jn\varphi} \quad 0 < z_* \leq \delta_* \quad (46)$$

$$\psi = -[AZ_n^{(1)}(\alpha_n r_*) + BZ_n^{(2)}(\alpha_n r_*)] \sinh \alpha_n (\delta_* + z_*) \cdot e^{jn\varphi} \quad 0 > z_* \geq -\delta_*$$

In Gl. (46) bedeuten  $K$ ,  $A$  und  $B$  Integrationskonstanten, wobei die beiden letzteren komplex sind.

## 9. Die Lösung des Randwertproblems

Am Rand der Scheibe muss die radiale Strömung mit Ausnahme der punktförmigen Kontaktstelle überall verschwinden. An der Kontaktstelle hingegen muss die radiale Strömung unendlich gross werden. Es sei nun versucht, durch Summation der partikulären Lösungen die Strömung den gegebenen Randbedingungen anzupassen.

Das komplexe Potential lautet:

$$S_2 = -2H \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial r_*} \psi(r_*, \varphi, 0) \right\} = -2H \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sinh \alpha_n \delta_* e^{jn\varphi} \frac{d}{dr_*} [A_n Z_n^{(1)}(\alpha_n r_*) + B_n Z_n^{(2)}(\alpha_n r_*)] \right\} \quad (55)$$

$$\psi = 2K\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n Z_n^{(1)}(\alpha_n r_*) + B_n Z_n^{(2)}(\alpha_n r_*)] \cdot \sinh \alpha_n (\delta_* - z_*) \cdot e^{jn\varphi} \quad 0 < z_* \leq \delta_* \quad (47)$$

Die gesuchte Lösung wird dann entweder durch den Realteil oder durch den Imaginärteil repräsentiert. Im folgenden soll nur der Realteil betrachtet werden.

Die radiale Flächenströmung:

$$S_1 = 2H \frac{1}{r_*} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi(r_*, \varphi, 0) \right\} = 2H \frac{1}{r_*} \left[ K + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} jn [A_n Z_n^{(1)}(\alpha_n r_*) + B_n Z_n^{(2)}(\alpha_n r_*)] \sinh \alpha_n \delta_* \cdot e^{jn\varphi} \right\} \right] \quad (48)$$

Die Integrationskonstante  $K$  kann aus der Gesamtströmung bestimmt werden.

$$I = R \int_0^{2\pi} S_1 r_* d\varphi = 2HKR \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_*} r_* d\varphi = 4\pi HKR \quad (49)$$

$$K = \frac{I}{4\pi HR}$$

Am Rand der Scheibe lautet die radiale Flächenströmung:

$$S_1(\varphi) = 2H \left[ K + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} jn [A_n Z_n^{(1)}(\alpha_n) + B_n Z_n^{(2)}(\alpha_n)] \cdot \sinh \alpha_n \delta_* \cdot e^{jn\varphi} \right\} \right] \quad (50)$$

Die punktförmige Stromabnahme lässt sich durch eine periodische Dirac-Funktion  $\delta_{2\pi}(\varphi)$  darstellen.

Es gilt daher:

$$2H \left[ K + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} jn [A_n Z_n^{(1)}(\alpha_n) + B_n Z_n^{(2)}(\alpha_n)] \cdot \sinh \alpha_n \delta_* [\cos n\varphi + j \sin n\varphi] \right\} \right] = \frac{I}{R} \delta_{2\pi}(\varphi) \quad (51)$$

mit

$$\delta_{2\pi}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi \quad (52)$$

Wegen Gl. (52) folgen dann aus Gl. (51) die Gleichungen:

$$\operatorname{Re} \{ jn [A_n Z_n^{(1)}(\alpha_n) + B_n Z_n^{(2)}(\alpha_n)] \sinh \alpha_n \delta_* \} = 2K \quad (53)$$

$$\operatorname{Re} \{ [A_n Z_n^{(1)}(\alpha_n) + B_n Z_n^{(2)}(\alpha_n)] \sinh \alpha_n \delta_* \} = 0$$

Die beiden Gleichungen lassen sich in einer komplexen Gleichung zusammenfassen

$$n [A_n Z_n^{(1)}(\alpha_n) + B_n Z_n^{(2)}(\alpha_n)] \sinh \alpha_n \delta_* = -j2K \quad (54)$$

Die tangentielle Flächenströmung:

Aus der bekannten Relation für Zylinderfunktionen

$$Z'_n(z) = Z_{n-1}(z) - \frac{n}{z} Z_n(z)$$

folgt schliesslich:

$$Z_n^{(1)}(\alpha_n) A_n + Z_n^{(2)}(\alpha_n) B_n = -j \frac{2K}{n \sinh \alpha_n \delta_*} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (59)$$

$$Z_n'^{(1)}(\alpha_n R_{0*}) A_n + Z_n'^{(2)}(\alpha_n R_{0*}) B_n = 0$$

$$S_2 = -2H \cdot \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \left[ \alpha_n Z_{n-1}^{(1)}(\alpha_n r_*) - \frac{n}{r_*} Z_n^{(1)}(\alpha_n r_*) \right] + B_n \left[ \alpha_n Z_{n-1}^{(2)}(\alpha_n r_*) - \frac{n}{r_*} Z_n^{(2)}(\alpha_n r_*) \right] \right) \cdot \sinh \alpha_n \delta_* \cdot e^{jn\varphi} \right\} \quad (56)$$

Eine weitere Randbedingung erhält man, wenn man bedenkt, dass der innere Rand der Scheibe überall das gleiche Potential besitzen muss. Es muss daher die tangentiale Flächenströmung am Innenrand der Scheibe überall verschwinden.

Setzt man für

$$\frac{R_0}{R} = R_{0*} \quad (57)$$

so lautet die zweite Randbedingung:

$$A_n \frac{d}{dr_*} [Z_n^{(1)}(\alpha_n r_*)]_{r_* = R_{0*}} + B_n \frac{d}{dr_*} [Z_n^{(2)}(\alpha_n r_*)]_{r_* = R_{0*}} = 0 \quad (58)$$

Das gesuchte Gleichungssystem zur Bestimmung der Integrationskonstanten:

Die Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems

$$D = \begin{vmatrix} Z_n^{(1)}(\alpha_n) & Z_n^{(2)}(\alpha_n) \\ Z_n'^{(1)}(\alpha_n R_{0*}) & Z_n'^{(2)}(\alpha_n R_{0*}) \end{vmatrix} \quad (60)$$

besitzt den Wert

$$D = Z_n^{(1)}(\alpha_n) \left[ Z_{n-1}^{(2)}(\alpha_n R_{0*}) - \frac{n}{\alpha_n R_{0*}} Z_n^{(2)}(\alpha_n R_{0*}) \right] - Z_n^{(2)}(\alpha_n) \left[ Z_{n-1}^{(1)}(\alpha_n R_{0*}) - \frac{n}{\alpha_n R_{0*}} Z_n^{(1)}(\alpha_n R_{0*}) \right] \neq 0 \quad (61)$$

Da  $D \neq 0$  ist, hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung, und man erhält nach einer Zwischenrechnung für die Integrationskonstanten:

$$A_n = -j \frac{2K}{n \cdot \sinh \alpha_n \delta_*} \cdot \frac{Z_{n-1}^{(2)}(\alpha_n R_{0*}) - \frac{n}{\alpha_n R_{0*}} Z_n^{(2)}(\alpha_n R_{0*})}{Z_n^{(1)}(\alpha_n) \left[ Z_{n-1}^{(2)}(\alpha_n R_{0*}) - \frac{n}{\alpha_n R_{0*}} Z_n^{(2)}(\alpha_n R_{0*}) \right] - Z_n^{(2)}(\alpha_n) \left[ Z_{n-1}^{(1)}(\alpha_n R_{0*}) - \frac{n}{\alpha_n R_{0*}} Z_n^{(1)}(\alpha_n R_{0*}) \right]} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (62)$$

$$B_n = j \frac{2K}{n \cdot \sinh \alpha_n \delta_*} \cdot \frac{Z_{n-1}^{(1)}(\alpha_n R_{0*}) - \frac{n}{\alpha_n R_{0*}} Z_n^{(1)}(\alpha_n R_{0*})}{Z_n^{(1)}(\alpha_n) \left[ Z_{n-1}^{(2)}(\alpha_n R_{0*}) - \frac{n}{\alpha_n R_{0*}} Z_n^{(2)}(\alpha_n R_{0*}) \right] - Z_n^{(2)}(\alpha_n) \left[ Z_{n-1}^{(1)}(\alpha_n R_{0*}) - \frac{n}{\alpha_n R_{0*}} Z_n^{(1)}(\alpha_n R_{0*}) \right]} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (63)$$

## 10. Die magnetischen und elektrischen Feldgrössen

$$H_{s1} = -H \cdot \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \left[ \alpha_n Z_{n-1}^{(1)}(\alpha_n r_*) - \frac{n}{r_*} Z_n^{(1)}(\alpha_n r_*) \right] + B_n \left[ \alpha_n Z_{n-1}^{(2)}(\alpha_n r_*) - \frac{n}{r_*} Z_n^{(2)}(\alpha_n r_*) \right] \right) \sinh \alpha_n (\delta_* - z_*) \cdot e^{jn\varphi} \right\}$$

$$H_{s2} = -H \frac{1}{r_*} \left[ 2K + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} jn \left[ A_n Z_n^{(1)}(\alpha_n r_*) + B_n Z_n^{(2)}(\alpha_n r_*) \right] \sinh \alpha_n (\delta_* - z_*) \cdot e^{jn\varphi} \right\} \right] \quad (63)$$

$$H_{s3} = H \cdot \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left[ A_n Z_n^{(1)}(\alpha_n r_*) + B_n Z_n^{(2)}(\alpha_n r_*) \right] \cosh \alpha_n (\delta_* - z_*) \cdot e^{jn\varphi} \right\}$$

$$E_1 = \frac{2H}{\kappa} \cdot \frac{1}{r_*} \left[ K + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} jn \left[ A_n Z_n^{(1)}(\alpha_n r_*) + B_n Z_n^{(2)}(\alpha_n r_*) \right] \sinh \alpha_n \delta_* \cdot e^{jn\varphi} \right\} \right] \quad (64)$$

$$E_2 = -\frac{2H}{\kappa} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \left[ \alpha_n Z_{n-1}^{(1)}(\alpha_n r_*) - \frac{n}{r_*} Z_n^{(1)}(\alpha_n r_*) \right] + B_n \left[ \alpha_n Z_{n-1}^{(2)}(\alpha_n r_*) - \frac{n}{r_*} Z_n^{(2)}(\alpha_n r_*) \right] \right) \sinh \alpha_n \delta_* \cdot e^{jn\varphi} \right\}$$

Die induzierte Feldstärke:

$$\mathbf{E}_i = [\mathbf{v}, \mathbf{B}] = \mathbf{e}_1 \mu_0 \omega R H r_* \left[ 1 + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left[ A_n Z_n^{(1)}(\alpha_n r_*) + B_n Z_n^{(2)}(\alpha_n r_*) \right] \cosh \alpha_n \delta_* \cdot e^{jn\varphi} \right\} \right] \quad (65)$$

### 11. Die Klemmenspannung

Die Berechnung der Klemmenspannung der Unipolarmaschine erfolgt am einfachsten über das elektrische Potential. Die elektrische Feldstärke  $\mathbf{E}_a$  in Gl. (2) lässt sich von einem skalaren Potential ableiten.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_a = \mathbf{E} - \mathbf{E}_i &= -\frac{2H}{\varkappa} R \cdot \operatorname{grad} u = \\ &= -\frac{2H}{\varkappa} \left[ \mathbf{e}_1 \frac{\partial u}{\partial r_*} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{r_*} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (66)$$

Nach Eintragen der Gleichungen (64) und (65) erhält man aus der Integrabilitätsbedingung die gesuchte Potentialfunktion.

$$u = -K \cdot \ln r_* + \frac{k^2}{2} r_*^2 - \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} j \left( A_n \left[ \frac{\alpha_n r_*}{n} Z_{n-1}^{(1)}(\alpha_n r_*) - Z_n^{(1)}(\alpha_n r_*) \right] + B_n \left[ \frac{\alpha_n r_*}{n} Z_{n-1}^{(2)}(\alpha_n r_*) - Z_n^{(2)}(\alpha_n r_*) \right] \right) \cdot \sinh \alpha_n \delta_* \cdot e^{jn\varphi} \right\} \quad (67)$$

Die Maschinenspannung;

$$U = \int_{(R,0)}^{(R_0,\varphi)} (\mathbf{E}_a, d\mathbf{s}) = \frac{2H}{\varkappa} R [u(1) - u(R_0)] \quad (68)$$

Nach einer Zwischenrechnung erhält man schliesslich:

$$U = \frac{2H}{\varkappa} R \left[ K \cdot \ln \left( \frac{R_0}{R} \right) + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{R^2 - R_0^2}{R^2} - \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} j \frac{\alpha_n}{n} \left[ A_n Z_{n-1}^{(1)}(\alpha_n) + B_n Z_{n-1}^{(2)}(\alpha_n) \right] \sinh \alpha_n \delta_* - \frac{2K}{n} \right\} \right] \quad (69)$$

### 12. Zusammenfassung

Die Stromverteilung im Scheibenläufer einer Unipolarmaschine bei punktförmiger Kontaktstelle am Zylindermantel kann nur unter der Einschränkung, dass man die zylindrische Scheibe durch eine Kreisfläche ersetzt, wobei man die elektrischen Eigenschaften der Scheibe auf dieses idealisierte System überträgt, gelöst werden. Ersetzt man die zylindrische Scheibe durch eine Kreisfläche, so geht die räumliche Strömung in eine flächenhafte Strömung, die räumlichen Wirbel in Flächenwirbel über. Fasst man die Kreisfläche als Sperrfläche auf, so lässt sich das magnetische Feld der Flächenströmung von einem skalaren Potential ableiten. Das Randwertproblem der Kreisfläche kann durch Einführung einer periodischen Dirac-

Funktion gelöst werden. Allgemeine Ausdrücke für die elektrischen und magnetischen Feldgrössen, sowie für das elektrische Potential und die Klemmenspannung der Maschine werden angegeben.

#### Literatur

- [1] W. Steidinger: Beitrag zur Theorie flächenhafter Wirbelströme. Arch. Elektrotechn. 22(1929)2, S. 153...170.

#### Adresse des Autors:

Dr. techn. Walter Haubitzer, Montanistische Hochschule Leoben, Institut für Elektrotechnik, A-8700 Leoben.