Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

Band: 63 (1972)

Heft: 12

Artikel: Das Bändermodell von Halbleiterdioden

Autor: Henne, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-915702

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Das Bändermodell von Halbleiterdioden

Von *W. Henne*, Augsburg

621.382.2:621.382(-192.2)

Es wird die Theorie der Sperrschicht von Halbleiterdioden soweit erläutert, wie sie für das Verständnis der in den folgenden Heften geplanten Aufsätze über Tunneldioden, Step-recovery-Dioden, Schottky-Dioden, Kapazitätsdioden mit parametrischem Verstärker und die Impatt-Dioden benötigt wird. Dabei wird besonderer Wert auf quantitative Angaben der für die Sperrschicht wichtigen Grössen, wie Diffusionsspannung, Fermi-Niveau, Sperrschichtweiten u. a. gelegt.

La théorie de la couche de blocage de diodes semi-conductrices est expliquée, dans le but de faciliter la compréhension des articles qui paraîtront dans les prochains numéros au sujet des diodes tunnel, diodes à reconversion rapide, diodes Schottky, diodes à capacité variable avec amplificateur paramétrique et diodes Impatt. On attache une importance particulière aux indications quantitatives des grandeurs essentielles pour la couche de blocage, telles que tension de diffusion, niveau de Fermi, étendues de la couche, etc.

1. Einleitung

Für das Verständnis der Wirkungsweise moderner Halbleiterdioden, wie Kapazitäts-, Tunnel-, Step-recovery-, PIN-, Schottky-, Impatt- oder Gunn-Dioden, ist die Kenntnis des Bändermodells unerlässlich. Da diese in der Mikrowellentechnik immer grössere Bedeutung erlangenden Bauelemente in den folgenden Aufsätzen besprochen werden sollen, seien an dieser Stelle deren gemeinsame Grundlagen zusammengefasst.

Das Bändermodell lässt sich auf zwei Wegen unabhängig voneinander ableiten; und zwar erstens mit Hilfe der dem Elektron zugeordneten DeBroglie-Wellenlänge und der Braggschen Reflexionsbedingung [1][1]), zweitens mit Hilfe des Energieschemas eines Einzelatoms.

Während sich die mit Hilfe der Wellenvorstellung vom Elektron abgeleitete Erklärung des Bändermodells recht anschaulich zur Erklärung der Vorgänge innerhalb einer Gunn-Diode verwenden liess[2]), ist zur Beschreibung aller auf einen pn-Übergang basierenden Dioden die Kenntnis der Feinstruktur des Bändermodells nicht erforderlich. Es kann daher an dieser Stelle von der Teilchennatur des Elektrons ausgegangen werden.

Eine wichtige Rolle bei der Beschreibung des Bändermodells spielt das sog. Fermi-Niveau. Lassen sich doch mit Hilfe dieses Fermi-Niveaus die Lage der gegenüberliegenden Bänder an Grenzschichten, z. B. an pn-Übergängen oder am Metall-Halbleiter-Übergang, recht anschaulich beschreiben.

2. Das Einzelatom

2.1 Energieschema beim Einzelatom

Aus der Deutung der Lichtemission führte *Bohr* im Jahre 1913 folgendes Postulat in die Physik ein: Elektronen können sich nur auf ganz bestimmten Bahnen um den Atomkern bewegen. Der Radius dieser Elektronenbahnen ergibt sich in Abhängigkeit von der Hauptquantenzahl n zu [2]:

$$r_n = \frac{h^2}{4\pi^2 Z m e^2} n^2 = 0{,}529 \frac{n^2}{Z} 10^{-8}\ \text{cm} \qquad (1)$$

Darin bedeuten:

r_n Radius der Elektronenbahn;
h $6{,}624 \cdot 10^{-34}$ Ws² (Plancksches Wirkungsquantum);
Z Kernladungszahl;
e $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ As (Elementarladung);
m $0{,}91 \cdot 10^{-27}$ g $= 0{,}91 \cdot 10^{-34}$ Ws³/cm².

Auf diesen durch die Hauptquantenzahl n gegebenen Bahnen besitzt das Elektron, wie sich mit Hilfe der Laplace-Gleichung $\Delta\varphi = 0$ berechnen lässt, die Energie:

$$E_n = -\frac{Z e^2}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_n} = -7{,}15 \frac{Z}{r_n/\text{cm}}\ \text{eV} \qquad (2)$$

Damit ergeben sich z. B. für die drei Hauptquantenzahlen $n = 1, 2, 3$ folgende Bahnen für das Elektron eines Wasserstoffatoms mit den dazugehörigen Energiewerten:

$$n = 1:\ r_1 = 0{,}529 \cdot 10^{-8}\ \text{cm} \rightarrow E_1 = -13{,}5\ \text{eV} = -2{,}15 \cdot 10^{-18}\ \text{Ws}$$
$$n = 2:\ r_2 = 2{,}124 \cdot 10^{-8}\ \text{cm} \rightarrow E_2 = -3{,}37\ \text{eV} = -0{,}535 \cdot 10^{-18}\ \text{Ws}$$
$$n = 3:\ r_3 = 4{,}779 \cdot 10^{-8}\ \text{cm} \rightarrow E_3 = -1{,}59\ \text{eV} = -0{,}239 \cdot 10^{-18}\ \text{Ws}$$

2.3 Quantenzahlen

Bei der folgenden Ableitung des Bändermodells genügt nicht nur die Kenntnis der Hauptquantenzahl n, sondern es müssen noch die Nebenquantenzahl l, die magnetische Quantenzahl m_l und die Spinquantenzahl m_s herangezogen werden. Besagt doch das für den Aufbau des Atoms grundlegende Pauli-Prinzip: Innerhalb eines Atoms dürfen keine Elektronen in allen vier Quantenzahlen übereinstimmen.

Die Hauptquantenzahl n bestimmt den Radius der nach *Bohr* angenommenen kreisförmigen Elektronenbahn und damit deren Energie. Mit anderen Worten: Die Hauptquantenzahl n bestimmt die Schale, auf der sich ein Elektron bewegt. Für diese Schalen haben sich bestimmte Bezeichnungen ergeben:

Hauptquantenzahl n =	1	2	3	4	5	6	7
Bezeichnung der Schale	K	L	M	N	O	P	Q

Die Nebenquantenzahl l beschreibt die spezielle Bahnform, z. B. das Verhältnis von Haupt- und Nebenachse der Ellipsenbahn. Dabei besteht zwischen Hauptquantenzahl n und Nebenquantenzahl l die einfache Beziehung:

$$l \leq n - 1$$

[1]) Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.
[2]) Siehe Bull. SEV 63(1972)9, S. 447...454.

Verteilung der Elektronen

Tabelle I

	Germanium ($Z = 32$)								Silizium ($Z = 14$)				
Hauptschale	K	L		M			N		K	L		M	
Hauptquantenzahl n	1	2		3			4		1	2		3	
Unterschalen	1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p	1s	2s	2p	3s	3p
Nebenquantenzahl l	0	0	1	0	1	2	0	1	0	0	1	0	1
Elektronenzahl	2	2	6	2	6	10	2	2	2	2	6	2	2

Elektronen, die die Nebenquantenzahlen $l = 0, 1, 2, 3 \ldots$ besitzen, heissen s-, p-, d-, f-Elektronen. Damit ergibt sich folgender Zusammenhang:

Nebenquantenzahl $l =$	0	1	2	3	4	5
Bezeichnung der Elektronen	s	p	d	f	g	h

In jeder durch die Nebenquantenzahl l gekennzeichneten Unterschale können insgesamt $2(2l + 1)$ Elektronen untergebracht werden, damit sie sich in der magnetischen und Spinquantenzahl noch unterscheiden können.

2.4 Atomaufbau

Mit Hilfe der Quantenzahlen lässt sich nun einfach die Anordnung der Elektronen innerhalb eines Atoms angeben:

Die K-Schale besitzt gemäss ihrer Hauptquantenzahl $n = 1$ nach der Gleichung $l \leqq n - 1$ nur Elektronen mit der Nebenquantenzahl $l = 0$, d. h. nur s-Elektronen. Ihre Anzahl beträgt mit $2(2l + 1) = 2(2 \cdot 0 + 1) = 2$.

Die L-Schale besitzt gemäss ihrer Hauptquantenzahl $n = 2$ nach der Gleichung $l \leqq n - 1$ nur Elektronen mit den Nebenquantenzahlen $l = 0$ und $l = 1$, d. h. nur s- und p-Elektronen. Die Anzahl der s-Elektronen beträgt wieder 2, während die der p-Elektronen mit $2(2l + 1) = 2(2 \cdot 1 + 1) = 6$ beträgt.

Die M-Schale besitzt gemäss ihrer Hauptquantenzahl $n = 3$ nach der Gleichung $l \leqq n - 1$ Elektronen mit den Nebenquantenzahlen $l = 0$, 1 und 2, d. h. s-, p- und d-Elektronen. Die Anzahl der s- bzw. p-Elektronen ist wieder 2 bzw. 6, die der d-Elektronen mit $2(2l + 1) = 2(2 \cdot 2 + 1) = 10$.

Grundsätzlich besitzt jedes Atom seine K-, L-, M-, ... Schalen. Dabei werden diese Schalen, von der K-Schale an beginnend, mit Elektronen aufgefüllt, wobei das Wasserstoffatom im thermischen Gleichgewicht nur 1 s-Elektron in der K-Schale besitzt. Durch Hinzufügen von Energie kann dieses Elektron aber auch in höhere Schalen gelangen.

Berücksichtigt man die relativistische Massenänderung der auf Ellipsenbahnen mit wechselnden Geschwindigkeiten umlaufenden Elektronen, so unterscheiden sich die Energien auch dann, wenn die Bahnen zu gleichen Hauptquantenzahlen n gehören. Die Nebenquantenzahlen erhalten damit die Aufgabe, die «Feinstruktur» der durch die Hauptquantenzahlen gekennzeichneten Energieniveaus zu beschreiben.

Für die in der Halbleitertechnik wichtigen Elemente Germanium und Silizium erhält man nun die Verteilung der Elektronen auf die einzelnen Schalen gemäss Tabelle I.

3. Das Bändermodell

3.1 Die Entstehung des Bändermodells

Bringt man Einzelatome in einen Abstand von der Grössenordnung der Gitterkonstanten a, die bei Germanium $a = 5{,}65 \cdot 10^{-8}$ cm und bei Silizium $a = 5{,}42 \cdot 10^{-8}$ cm beträgt, zusammen, d. h. in einen Abstand, der in der Grössenordnung der Bahnradien liegt, so werden sich die Potentialfelder bzw. die Energiewerte der Einzelatome beeinflussen. Und zwar wird jedes Energieniveau des Einzelatoms in so viele Teilenergien aufgespalten, wie die Anzahl der zusammengebrachten Atome beträgt.

Fig. 1 zeigt die Aufspaltung der Energieniveaus eines C-Atoms, wenn vier Einzelatome bis auf die Gitterkonstante a angenähert werden.

Fügt man schliesslich sehr viele Atome zu einem Kristallgitter zusammen, so lässt sich die Aufspaltung der durch die Nebenquantenzahlen beschriebenen Unterschalen, d. h. der 1s-, 2s-, 2p-, 3s-, 3p-, 3d-, 4s-, usw. Unterschalen in diskrete Energieniveaus nicht mehr erkennen; es entstehen sog. Energiebänder.

Fig. 2 zeigt am Beispiel des Siliziums die Aufspaltung der diskreten Energiebänder, wenn der Abstand der Einzelatome in die Grössenordnung der Gitterkonstanten a kommt.

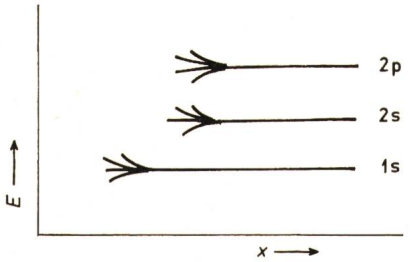


Fig. 1
Aufspaltung der Energieniveaus bei vier Atomen
E Energie; x Ortskoordinate
s, p Elektronen

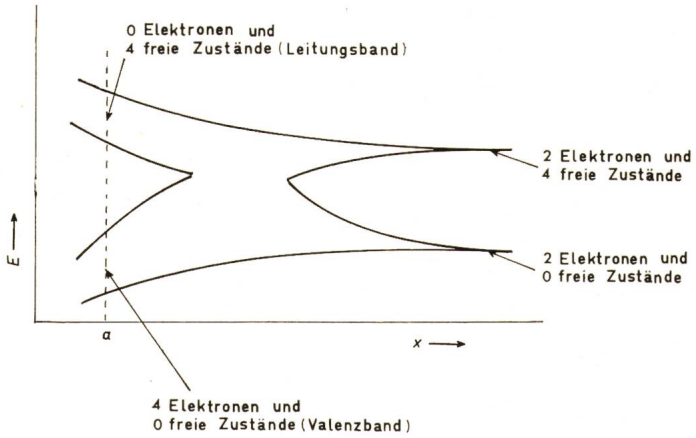


Fig. 2
Aufspaltung diskreter Energieniveaus in Energiebänder
a Gitterkonstante
Weitere Bezeichnungen siehe Fig. 1

Ist der Abstand der Einzelatome zunächst viel grösser als die Gitterkonstante a, so besitzt die hier interessierende oberste Schale des Siliziums, die M-Schale ein 3s-Band mit zwei Plätzen, die beide mit Elektronen besetzt sind, und ein 3p-Band mit 6 Plätzen, von denen nur zwei Plätze mit Elektronen gefüllt sind. Bei kontinuierlicher Verkleinerung der Gitterabstände spalten nun das 3s- und 3p-Band auf. Und zwar besitzt links vom Überkreuzungspunkt das untere Band 4 Plätze pro Atom, das darüberliegende Band ebenfalls 4 Plätze pro Atom. Die unteren vier Plätze werden von den zwei 3s-Elektronen und den zwei 3p-Elektronen gerade voll ausgefüllt. (Vollbesetztes Band!) Das obere Band enthält ebenfalls vier Plätze pro Atom, ist aber leer. Zwischen beiden Bändern liegt die sog. Isolatorlücke. Da das untere Band mit den vier Valenzelektronen des Siliziumatoms gefüllt ist, heisst es «Valenzband».

3.2 Leitfähigkeitsband — Valenzband

Der Stromfluss im Kristall ist durch die Bewegung einzelner Ladungsträger gekennzeichnet. Und zwar erhält man für die Stromdichte S bekanntlich die Gleichung

$$S = n\,e\,v = n\,e\,\mu\,K = \varkappa\,K \qquad (3)$$

Hierin sind:

- S Stromdichte
- n Ladungsträgeranzahl
- v Geschwindigkeit
- μ Beweglichkeit
- $\varkappa$ Leitfähigkeit
- K elektrische Feldstärke

Die Beweglichkeit μ ist temperaturabhängig. Bei $T = 300\,^0$K erhält man die Werte gemäss Tabelle II.

Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit Tabelle II

Material	Elektronenbeweglichkeit μ_n cm²/Vs	Löcherbeweglichkeit μ_b cm²/Vs
Ge	3900	1900
Si	1350	480
Ga As	8500	420
Metalle	10...70	

Die Stromdichte S ist an eine aus dem Feld K herrührenden Geschwindigkeit v gebunden. Innerhalb eines vollbesetzten Bandes ist eine Erhöhung der Energie einzelner Elektronen nicht mehr möglich, da eben keine Plätze mit erhöhter Energie mehr vorhanden sind. Damit ist ein Material, gekennzeichnet durch ein mit Valenzelektronen vollbesetztes oberstes Band (Valenzband), ein Isolator. Ist dagegen das oberste Band nicht vollbesetzt, so liegt mit diesem Leitfähigkeitsband ein Leiter vor.

Nun unterscheiden sich die Materialien mit vollbesetzten obersten Energiebändern durch die Breite ΔE zwischen Oberkante des Valenzbandes und Unterkante des Leitungsbandes. Ist diese Energielücke so klein, dass sie leicht durch äussere Energiezufuhr von einigen Elektronen überwunden werden kann, so spricht man von Eigenhalbleitern. Bei den Isolatoren kann diese Energielücke, das sog. verbotene Band, erst durch Zuführung einer so hohen Energie von den Elektronen des Valenzbandes überwunden werden, dass das Material in der Regel hierdurch bereits zerstört wird.

In Zahlenwerten erhält man für die gebräuchlichen Halbleitermaterialien die Breite des verbotenen Bandes gemäss Tabelle III.

Breite des verbotenen Bandes verschiedener Halbleitermaterialien Tabelle III

Material	ΔE (eV) bei $T = 300\,^0$K
Silizium	1,08
Germanium	0,65
Galliumarsenid	1,38
Isolator	> 3

4. Fermi-Niveau

Für die folgenden Berechnungen wird die Kenntnis über die Elektronenverteilung innerhalb des Leitungs- und Valenzbandes wichtig. Aufschluss hierüber gibt die sog. Fermistatistik.

4.1 Fermistatistik in Eigenhalbleitern

Als Eigenhalbleiter wurden bekanntlich Materialien gekennzeichnet, bei denen das verbotene Band so eng war, dass Elektronen durch Aufnahme geringer thermischer Energie leicht vom vollbesetzten Valenzband in das Leitungsband gelangen konnten. Die Anzahl dn von Ladungsträgern, die sich innerhalb des Energieintervalls dE befindet, wird durch die Gleichung

$$\mathrm{d}n = f(E)\,\mathrm{d}E \qquad (3a)$$

angegeben. Hierin ist die Funktion $f(E)$ die sog. Verteilungsfunktion von Fermi-Dirac bzw. die Besetzungswahrscheinlichkeit. Und zwar ist die Wahrscheinlichkeit $f(E)$, mit der ein Elektron in einem Energieniveau E zu finden ist, unabhängig vom Vorhandensein einer verbotenen oder erlaubten Zone durch die Besetzungswahrscheinlichkeit f (E) gegeben [3; 4]:

$$\mathrm{f}(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E - E_F}{kT}}} \qquad (4)$$

Hierin sind:

- E Energie des Elektrons
- E_F Energie des Fermi-Niveaus
- k Boltzmann-Konstante $= 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Ws/^{0}K
- T absolute Temperatur

Für die Raumtemperatur $T = T_0 = 300\,^0$K wird:

$$k\,T_0 = 4{,}1 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{Ws} = \frac{4{,}1 \cdot 10^{-21}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 26 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{eV}$$

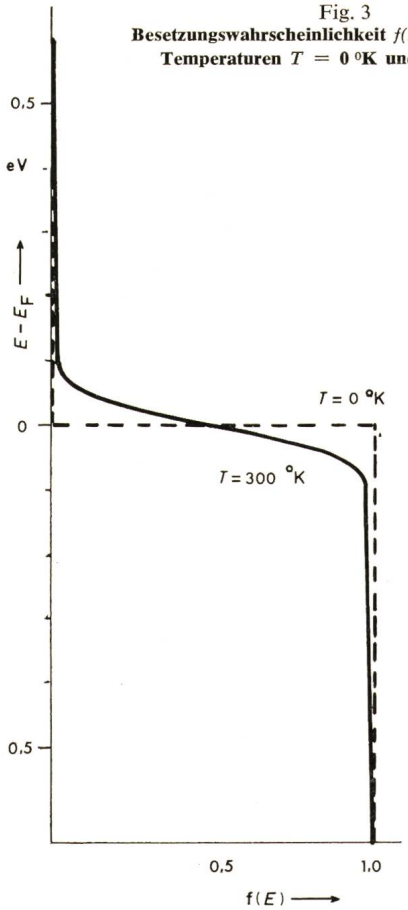
Fig. 3 zeigt die graphische Darstellung der Funktion f (E) für die beiden Temperaturen $T = T_0 = 300\,^0$K und $T = 0\,^0$K. Nach dieser Figur ist das Fermi-Niveau E_F dasjenige Energieniveau, für das die Besetzungswahrscheinlichkeit f (E) den Wert 0,5 hat, was sich leicht nachweisen lässt:

$$\mathrm{f}(E_F) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E_F - E_F}{kT}}} = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2} \qquad (5)$$

Die genauere Theorie zeigt [4], dass das Fermi-Niveau E_F in Festkörpern, die sich im thermischen Gleichgewicht befinden, an denen also z. B. keine äussere Spannung angelegt ist, konstant ist. Bei der Kontaktierung zweier Stoffe, z. B. bei pn-Übergängen oder bei Metall-Halbleiter-Übergängen, gibt das Fermi-Niveau an, wie die jedem Material eigentümlichen Energiediagramme aneinanderzureihen sind: Die Fermi-Niveaus beider Stoffe müssen auf gleicher Höhe liegen!

Es lässt sich nun beweisen (siehe Anhang), dass das Fermi-Niveau bei Eigenhalbleitern in der Mitte des verbotenen Bandes, also zwischen Leitungs- und Valenzband, liegt (Fig. 4).

Fig. 3
Besetzungswahrscheinlichkeit $f(E)$ für die beiden Temperaturen $T = 0$ °K und $T = 300$ °K



4.2 Fermistatistik in Störstellenhalbleitern

Bei Störstellenhalbleitern, bei denen zur Erzielung bestimmter Effekte in den Eigenhalbleitern drei- oder fünfwertige Elemente eingebracht wurden, verschiebt sich das Fermi-Niveau je nach Dotierung zum Valenz- oder Leitungsband hin. Und zwar ist das Fermi-Niveau bei n-dotierten Halbleitern durch die Gleichung [3]

$$E_{Fn} = E_{Fi} + k\,T \ln \frac{n_n}{n_i} = E_c - k\,T \ln \frac{N_c}{n_n} \qquad (6)$$

und bei p-dotierten Halbleitern durch

$$E_{Fp} = E_{Fi} - k\,T \ln \frac{p_p}{n_i} = E_v + k\,T \ln \frac{P_v}{p_p} \qquad (7)$$

gegeben. In obigen Gleichungen sind

E_{Fn} Fermi-Niveau im n-dotierten Halbleiter
E_{Fp} Fermi-Niveau im p-dotierten Halbleiter
E_{Fi} Fermi-Niveau im Eigenhalbleiter (Intrinsic-Halbleiter)
n_n Anzahl der Donatoren pro cm³
p_p Anzahl der Akzeptoren pro cm³
n_i Intrinsiczahl (siehe auch Tabelle IV)

Intrinsiczahlen verschiedener Materialien

Tabelle IV

Material	(n_i/cm^{-3})	$(n_i/\mathrm{cm}^{-3})^2$
Germanium	$2{,}5 \cdot 10^{13}$	$6{,}25 \cdot 10^{26}$
Silizium	$6{,}8 \cdot 10^{13}$	$4{,}64 \cdot 10^{21}$
Metalle	10^{23}	10^{46}

Über die Bedeutung der Konstanten N_c und P_v siehe den Anhang.

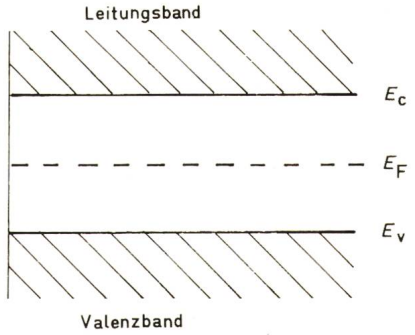


Fig. 4
Lage des Fermi-Niveaus in einem Eigenhalbleiter
E_c untere Kante des Leitungsbandes
E_v obere Kante des Valenzbandes
E_F Fermi-Niveau

Als Beispiel sei das Fermi-Niveau für einen n-dotierten Halbleiter (Germanium) berechnet. Die Donatorendichte betrage $n_n = 10^{15}$ cm^{-3}, die Temperatur $T = 300$ °K:

$$E_{Fn} = E_{Fi} + 26 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{eV} \ln \frac{10^{15}}{2{,}5 \cdot 10^{13}}$$

$$E_{Fn} - E_{Fi} = 0{,}096\,\mathrm{eV}$$

Fig. 5 gibt die Lage dieses Fermi-Niveaus an im Vergleich zu der oberen Bandkante E_v des Valenzbandes, der unteren Kante E_c des Leitungsbandes und dem Fermi-Niveau E_{Fi} des Eigenhalbleiters.

Das Fermi-Niveau eines p-dotierten Halbleiters E_{Fp} liegt naturgemäss unterhalb von E_{Fi}, wie Fig. 6 qualitativ zeigt.

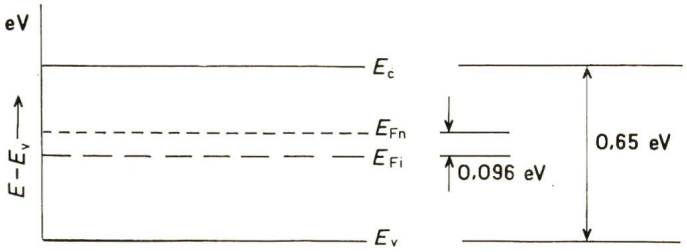


Fig. 5
Lage des Fermi-Niveaus für ein gegebenes Beispiel
E Energie
E_v obere Kante des Valenzbandes
E_{Fi} Fermi-Niveau des Intrinsic-Halbleiters
E_{Fn} Fermi-Niveau des n-dotierten Halbleiters
E_c untere Kante des Leitungsbandes

5. Die Sperrschicht

Ohne eine Beschreibung der in der Sperrschicht herrschenden Potential- bzw. Energieverteilung ist ein Verständnis der in den folgenden Aufsätzen zu beschreibenden modernen Halbleiter-Dioden, wie Tunnel-Dioden, Step-recovery-Dioden, Schottky-Dioden, PIN-Dioden, Kapazitäts-Dioden unmöglich. Die Physik dieser Sperrschicht sei deshalb an dieser Stelle, so weit sie zum Verständnis dieser Dioden notwendig ist, zusammengefasst.

5.1 Die Diffusionsspannung Φ

Die Diffusionsspanung Φ ist diejenige Spannung, die sich aufgrund der Ladungsträgerdiffusion in der Sperrschicht einstellt und somit einer unaufhörlichen Ladungsträgertrennung entgegenwirkt.

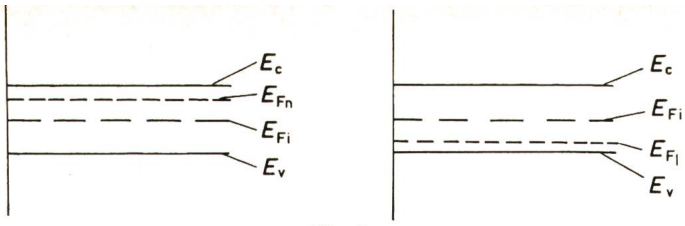


Fig. 6
Lage des Fermi-Niveaus E_{Fn} bzw. E_{Fp} in einem n- bzw. p-dotierten Halbleiter
Weitere Bezeichnungen siehe Fig. 5

Die Konzentrationen n_i und p_i der freien Elektronen und Löcher in einem reinen und störstellenfreien Kristall sind immer gleich gross. Und zwar ist bei $T = 300$ °K in

Germanium: $p_i = n_i = 2{,}5 \cdot 10^{13}\ \mathrm{cm}^{-3}$

Silizium: $p_i = n_i = 6{,}8 \cdot 10^{10}\ \mathrm{cm}^{-3}$

Bei thermodynamischem Gleichgewicht gilt für den dotierten Halbleiter das sog. Massenwirkungsgesetz:

$$n_n p_n = p_p n_p = n_i^2 \tag{8}$$

Das Produkt aus der durch die Dotierung hervorgerufenen Majoritäts- und Minoritätsträgerdichte ist unabhängig vom Dotierungsgrad, konstant gleich dem Quadrat der Intrinsiczahl. In der obigen Gleichung sind demnach:

n_n Elektronenkonzentration im n-Halbleiter (Majoritätsträgerdichte)
p_n Löcherkonzentration im n-Halbleiter (Minoritätsträgerdichte)
p_p Löcherkonzentration im p-Halbleiter (Majoritätsträgerdichte)
n_p Elektronenkonzentration im p-Halbleiter (Minoritätsträgerdichte)

Damit existiert zur Paarbildung Loch-Elektron immer ein inverser Prozess, nämlich die Rekombination. Beide Effekte sind im thermischen Gleichgewicht gleich gross.

Das Massenwirkungsgesetz sei an einer Germaniumdiode mit der Akzeptorendichte $p_p = 10^{17}\ \mathrm{cm}^{-3}$ und der Donatorendichte $n_n = 10^{16}\ \mathrm{cm}^{-3}$ erläutert: Die sich aus diesen Majoritätsträgerdichten ergebenden Minoritätsträgerdichten ergeben sich mit obigem Gesetz zu

$$n_p = n_i^2/p_p = 6{,}25 \cdot 10^{26}/10^{17}\ \mathrm{cm}^{-3} = 6{,}25 \cdot 10^{9}\ \mathrm{cm}^{-3}$$
$$p_n = n_i^2/n_n = 6{,}25 \cdot 10^{26}/10^{16}\ \mathrm{cm}^{-3} = 6{,}25 \cdot 10^{10}\ \mathrm{cm}^{-3}$$

Mit der Dotierung ist also in der n-Zone des ursprünglichen reinen Germaniums die Löcherkonzentration p_n von der Intrinsiczahl $n_i = 2{,}5 \cdot 10^{13}$ pro cm³ auf $6{,}25 \cdot 10^{10}$ pro cm³ zurückgegangen.

Erfolgt nun der Übergang vom p-Gebiet zum n-Gebiet plötzlich, so spricht man von Dioden mit abruptem Übergang oder von «abrupt junction diodes». Sie ist der Berechnung besonders gut zugänglich und soll daher an dieser Stelle weiter betrachtet werden.

Infolge ihrer immer vorhandenen Wärmebewegung diffundieren die Elektronen in das p-Gebiet und die Löcher in das n-Gebiet. Mit Hilfe der Boltzmann-Statistik ergibt sich nun für die Löcher- und Elektronenkonzentration in Anwesenheit einer äusseren Spannung U_d in Abhängigkeit vom Abstand x:

$$n(x) = n_n\, e^{\frac{e\,[\varphi(x) - \Phi]}{kT}} = n_n\, e^{\frac{\varphi(x) - \Phi}{U_T}} \tag{9}$$

$$p(x) = p_p\, e^{-\frac{e\,[\varphi(x) - U_d]}{kT}} = p_p\, e^{-\frac{\varphi(x) - U_d}{U_T}} \tag{10}$$

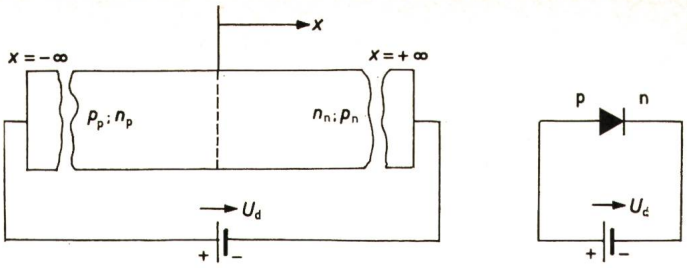


Fig. 7
p- und n-Gebiet einer Halbleiterdiode
p_p Löcherkonzentration im p-Halbleiter
n_p Elektronenkonzentration im p-Halbleiter
p_n Löcherkonzentration im n-Halbleiter
n_n Elektronenkonzentration im n-Halbleiter
x laufende Koordinate
U_d Diodenspannung

In diesen beiden Gleichungen sind:

Φ Diffusionsspannung (die im folgenden noch näher erklärt werden soll)
$\varphi(x)$ laufendes Potential
U_d von aussen angelegte Diodenspannung
U_T $kT/e = 26$ mV (Temperaturspannung)

Φ ist die Diffusionsspannung, die sich aufgrund der Ladungsträgerdiffusion einstellt und gleichzeitig einer unaufhörlichen Ladungsträgertrennung entgegenwirkt. Man erhält diese Diffusionsspannung Φ, wenn man für den Ort $x = -\infty$, d. h. nach Fig. 7 im p-Gebiet, das Potential $\varphi(x = -\infty)$ willkürlich gleich Null setzt. Am Orte $x = -\infty$ kann natürlich auch $n(x = -\infty) = n_p$ gesetzt werden, denn bis zu diesem Ort sind keine zusätzlichen Elektronen aus dem n-Gebiet diffundiert. Damit erhält man aus Gl. (10):

$$n_p = n_n\, e^{-\Phi/U_T}$$
$$\Phi = U_T \ln \frac{n_n}{n_p} = 2{,}3\, U_T \lg \frac{n_n}{n_p} \tag{11}$$

Mit Hilfe des Massenwirkungsgesetzes nach Gl. (8) lässt sich Gl. (11) auch in folgende Form bringen:

$$\Phi = 2{,}3\, U_T \lg \frac{n_n}{n_p} = 2{,}3\, U_T \lg \frac{p_p}{p_n} = 2{,}3\, U_T \lg \frac{n_n\, p_p}{n_i^2}$$
$$\Phi = U_T \ln \frac{n_n}{n_p} = U_T \ln \frac{p_p}{p_n} = U_T \ln \frac{n_n\, p_p}{n_i^2} \tag{12}$$

Beträgt z. B. die Störstellenkonzentration einer Germanium-Diode $n_n = 10^{17}\ \mathrm{cm}^{-3}$ und $p_p = 10^{16}\ \mathrm{cm}^{-3}$, so erhält man für die Diffusionsspannung Φ bei der Temperatur $T = 300$ °K:

$$\Phi = 2{,}3 \cdot 26 \lg \frac{10^{17} \cdot 10^{16}}{6{,}25 \cdot 10^{26}} = 372\ \mathrm{mV}$$

5.2 Potentialverlauf innerhalb der Sperrschicht

Der Potentialverlauf $\varphi(x)$ errechnet sich mit Hilfe der Poisson-Gleichung:

$$\Delta \varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0\, \varepsilon_r} \tag{13}$$

(ϱ Raumladungsdichte)

Im Donatorengebiet, d. h. im Bereich $x > 0$ (vgl. dazu Fig. 7), befindet sich unter Berücksichtigung von

a) der *ab*gewanderten Elektronen $n(x) = n_n \exp \dfrac{\varphi(x) - \Phi}{U_T}$

b) der *zu*gewanderten Löcher $p(x) = p_p \exp \dfrac{\varphi(x) - U_d}{U_T}$

c) der ursprünglichen Elektronen n_n

folgende Raumladungsdichte

$$\varrho\,|_{x>0} = -e\left[n_n - n_n \exp\frac{\varphi(x)-\Phi}{U_T} + (-p_p)\exp\frac{\varphi(x)-U_d}{U_T}\right] \tag{14}$$

Die in Gl. (14) stehende Grösse $(-p_p)$ berücksichtigt, dass die Löcher im Gegensatz zu den Elektronen eine positive Raumladung erzeugen. Entsprechend Gl. (14) erhält man für das Akzeptorengebiet, d. h. für $x < 0$, folgende Raumladungsdichte:

$$\varrho\,|_{x<0} = +e\left[p_p - p_p \exp\frac{\varphi(x)-U_d}{U_T} + (-n_n)\exp\frac{\varphi(x)-\Phi}{U_T}\right] \tag{15}$$

Um die Sperrschichtweite w und daraus die Sperrschichtkapazität C_j nach der Gleichung

$$C_j = \frac{\varepsilon_0\,\varepsilon_r\,A}{w} \tag{16}$$

berechnen zu können, müsste die Poisson-Gleichung (13) mit der potentialabhängigen Raumladung nach den Gl. (14) und (15) gelöst werden. Eine Durchführung dieser Operation ist aber elementar nicht mehr möglich. Deshalb sei hier eine von *Schottky* vorgeschlagene «vereinfachte Ladungsträgerverteilung» in der Sperrschicht angenommen: Und zwar reiche die Sperrschicht innerhalb des p-Gebietes bis zu der noch unbekannten Grenze x_p, innerhalb des n-Gebietes bis zur ebenfalls noch unbekannten Grenze x_n. Beide Grenzen sind aber dadurch gekennzeichnet, dass an ihnen die Feldstärke $d\varphi/dx = 0$ ist. Ansonsten würde ja eine weitere Ladungstrennung erfolgen, womit wieder eine Veränderung der Sperrschichtweite w eintreten würde. — Das hier zu lösende Problem sei noch weiter vereinfacht, indem eine abrupt verlaufende Raumladungsdichte in der Grenzschicht angenommen werde und somit die Exponentialanteile der Gl. (14) und (15) vernachlässigt werden. Aus den Gl. (14) und (15) wird jetzt also

$$\varrho\,|_{x>0} = -n_n\,e \tag{17}$$

$$\varrho\,|_{x<0} = +p_p\,e \tag{18}$$

Mit diesen Vereinfachungen wird jetzt aus der Poisson-Gleichung (13)

$$x_p < x < 0: \Delta\varphi = \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{p_p\,e}{\varepsilon} \tag{19}$$

$$0 < x < x_n: \Delta\varphi = \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{n_n\,e}{\varepsilon} \tag{20}$$

Die 4 Konstanten dieser beiden Differentialgleichungen 2. Ordnung werden durch folgende 4 Randbedingungen bestimmt:

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x_p} = \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x_n} = 0 \tag{21}$$

$$\varphi\,|_{x_p} = U_d \tag{22}$$

$$\varphi\,|_{x=0} = \text{const} \tag{23}$$

a) Lösung von Gl. (19): d. h. $\varphi(x)$ für $x_p < x < 0$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{p_p\,e}{\varepsilon} \tag{24}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{p_p\,e}{\varepsilon}x + c_1 \xrightarrow{\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x_p}=0} 0 = \frac{p_p\,e}{\varepsilon}x_p + c_1$$

$$c_1 = -\frac{p_p\,e}{\varepsilon}x_p$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{p_p\,e}{\varepsilon}(x - x_p) \tag{25}$$

$$\varphi = \frac{p_p\,e}{\varepsilon}\left(\frac{x^2}{2} - x_p\,x\right) + c_2 \xrightarrow{\varphi(x_p)=U_d} c_2 = U_d + \frac{p_p\,e}{\varepsilon}\cdot\frac{x_p^2}{2}$$

$$\varphi = \frac{p_p\,e}{\varepsilon}\left(\frac{x^2}{2} - x_p\,x + \frac{x_p^2}{2}\right) + U_d \tag{26}$$

b) Lösung von Gl. (20), d. h. $\varphi(x)$ für $0 < x < x_n$:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{n_n\,e}{\varepsilon}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{n_n\,e}{\varepsilon}x + c_3 \xrightarrow{\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x_n}=0} 0 = -\frac{n_n\,e}{\varepsilon}x_n + c_3$$

$$c_3 = \frac{n_n\,e}{\varepsilon}x_n$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{n_n\,e}{\varepsilon}(x_n - x) \tag{27}$$

$$\varphi = \frac{n_n\,e}{\varepsilon}\left(x_n\,x - \frac{x^2}{2}\right) + c_4$$

Mit Gl. (26) für den Ort $x = 0$ und der Randbedingung $\varphi(x = 0) = \text{const.}$

$$\varphi(x=0) = \frac{p_p\,e}{\varepsilon}\cdot\frac{x_p^2}{2} + U_d = c_4$$

erhält man schliesslich für das Potential

$$\varphi = \frac{n_n\,e}{\varepsilon}\left(x_n\,x - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{p_p\,e}{\varepsilon}\cdot\frac{x_p^2}{2} + U_d \tag{28}$$

c) Wichtig wird später das Potential am Orte $x = 0$:
Sowohl aus Gl. (26) als auch aus (28) ergibt sich hiefür

$$\varphi(x=0) = \varphi_0 = U_d + \frac{p_p\,e}{2\,\varepsilon}x_p^2 = U_d + \frac{p_p/\text{cm}^{-3}}{1{,}1\cdot 10^6\,\varepsilon_r}\left(\frac{x_p}{\text{cm}}\right)^2\text{V} \tag{29}$$

Stoff	ε_r
Germanium	16,1
Silizium	12

d) Diffusionsspannung Φ nach der Schottkyschen Näherung
Diese erhält man aus Gl. (28), wenn $U_d = 0$ gesetzt wird, für $x = x_n$:

$$\Phi = \frac{e}{2\,\varepsilon}(n_n\,x_n^2 + p_p\,x_p^2) = \frac{0{,}91\cdot 10^{-6}}{\varepsilon_r}\left[\frac{n_n}{\text{cm}^{-3}}(x_n/\text{cm})^2 + \frac{p_p}{\text{cm}^{-3}}(x_p/\text{cm})^2\right] \tag{30}$$

Liegt an der Diode noch die äussere Spannung U_d, so wird aus Gl. (30):

$$\Phi - U_d = \frac{e}{2\,\varepsilon}(n_n\,x_n^2 + p_p\,x_p^2) \tag{31}$$

e) Sperrschichtweite w

Diese ist gegeben durch $w = x_n + |x_p| = x_n - x_p$ (32)

Die Entfernung x_n kann, wie gezeigt wird, durch x_p ausgedrückt werden und x_p aus Gl. (31) ermittelt werden.

Wegen der Stetigkeit der elektrischen Feldstärke am Orte $x = 0$ ist mit den Gl. (25) und (27):

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=0} = -\frac{p_p\, e}{\varepsilon}\, x_p = \frac{n_n\, e}{\varepsilon}\, x_n$$

$$x_n = -x_p \frac{p_p}{n_n} \tag{33}$$

Eingesetzt in Gl. (31) ergibt:

$$\Phi - U_d = \frac{e}{2\,\varepsilon}\left[n_n x_p^2 \frac{p_p^2}{n_n^2} + p_p\, x_p^2\right] = \frac{e}{2\,\varepsilon}\, x_p^2 \left[\frac{p_p^2}{n_n} + \frac{p_p^2}{p_p}\right] = \frac{e}{2\,\varepsilon}\, x_p^2\, p_p^2 \left[\frac{1}{n_n} + \frac{1}{p_p}\right]$$

aufgelöst nach x_p:

$$x_p^2 = \frac{(\Phi - U_d)}{p_p^2} \cdot \frac{2\,\varepsilon}{e}\, \frac{1}{1/n_n + 1/p_p} \tag{34}$$

Für x_p erhält man unter der Berücksichtigung, dass definitionsgemäss $x_p < 0$:

$$x_p = -\sqrt{\frac{(\Phi - U_d)}{p_p^2} \cdot \frac{2\,\varepsilon}{e} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n_n} + \frac{1}{p_p}}} = -\sqrt{1{,}1\ 10^6\, \varepsilon_r\, \frac{\frac{\Phi - U_d}{\mathrm{V}}}{\frac{p_p}{\mathrm{cm}^{-3}}\left(1 + \frac{p_p}{n_n}\right)}}\ \mathrm{cm} \tag{35}$$

Für x_n erhält man entsprechend

$$x_n = \sqrt{\frac{(\Phi - U_d)}{n_n^2} \cdot \frac{2\,\varepsilon}{e} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n_n} + \frac{1}{p_p}}} = \sqrt{1{,}1 \cdot 10^6\, \varepsilon_r\, \frac{\frac{\Phi - U_d}{\mathrm{V}}}{\frac{n_n}{\mathrm{cm}^{-3}}\left(1 + \frac{n_n}{p_p}\right)}}\ \mathrm{cm} \tag{36}$$

Mit Gl. (32) wird schliesslich die Sperrschichtweite:

$$w = x_n - x_p = \sqrt{(\Phi - U_d)\, \frac{2\,\varepsilon}{e} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n_n} + \frac{1}{p_p}}}\left(\frac{1}{n_n} + \frac{1}{p_p}\right) = \sqrt{(\Phi - U_d)\, \frac{2\,\varepsilon}{e}}\ \sqrt{\frac{1}{n_n} + \frac{1}{p_p}} \tag{37}$$

Als Beispiel sei der Potentialverlauf innerhalb einer unterschiedlich dotierten Germanium-Grenzschicht berechnet. Und zwar sei bei $T = 300\ ^0\mathrm{K}$ und der äusseren Spannung $U_d = 0$ die Donatorendichte $n_n = 10^{18}\ \mathrm{cm}^{-3}$ und die Akzeptorendichte $p_p = 10^{17}\ \mathrm{cm}^{-3}$. Gesucht seien

1. die Diffusionsspannung Φ,
2. die Sperrschichtweiten x_p und x_n,
3. das Potential am Orte $x = 0$,
4. der Potentialverlauf innerhalb der Grenzschicht und
5. die Minoritätsträgerdichte p_n und n_p.

1. Mit Gl. (12):

$$\Phi = 2{,}3\, U_T \lg \frac{n_n\, p_p}{n_i^2} = 2{,}3 \cdot 26 \lg \frac{10^{18} \cdot 10^{17}}{6{,}25 \cdot 10^{26}} = 0{,}493\ \mathrm{V}$$

2. Mit Gl. (35):

$$x_p = -\sqrt{1{,}1 \cdot 10^6 \cdot 16{,}1\, \frac{0{,}493}{10^{17}\,(1 + 0{,}1)}} = -8{,}9 \cdot 10^{-6}$$

Mit Gl. (36)

$$x_n = \sqrt{1{,}1 \cdot 10^6 \cdot 16{,}1\, \frac{0{,}493}{10^{18}\,(1 + 10)}} = 8{,}9 \cdot 10^{-7}$$

3. Mit Gl. (29):

$$\varphi_0 = \frac{10^{17}}{1{,}1 \cdot 10^6 \cdot 16{,}1}\, 79{,}5 \cdot 10^{-12} = 0{,}45\ \mathrm{V}$$

4. Siehe Fig. 8.

5. Mit Gl. (8)

$$p_n = \frac{n_i^2}{n_n} = \frac{6{,}25 \cdot 10^{26}}{18}\ \mathrm{cm}^{-3} = 6{,}25 \cdot 10^8\ \mathrm{cm}^{-3}$$

$$n_p = \frac{n_i^2}{p_p} = \frac{6{,}25 \cdot 10^{26}}{10^{17}}\ \mathrm{cm}^{-3} = 6{,}25 \cdot 10^9\ \mathrm{cm}^{-3}$$

In einem weiteren Beispiel sei untersucht, wie sich die Potentialverteilung innerhalb der Grenzschicht durch Anlegen einer äusseren Spannung U_d ändert. Und zwar sei auch hier die Dotierung zu $n_n = 10^{18}\ \mathrm{cm}^{-3}$ und $p_p = 10^{17}\ \mathrm{cm}^{-3}$ angenommen; als äussere Spannung sei $U_d = +0{,}2$ V und $U_d = -0{,}2$ V gewählt. Die Diffusionsspannung Φ ist nach Gl. (12) unabhängig von der an der Sperrschicht liegenden äusseren Spannung U_d; sie beträgt nach dem letzten Beispiel $\Phi = 0{,}493$ V. Die Sperrschichtweiten x_p und x_n und damit auch das Potential φ_0 am Orte $x = 0$ ist nach den Gl. (35, (36) und (29) dagegen abhängig von der Spannung U_d, so dass man mit Hilfe der Werte des vorigen Beispiels folgende Werte für x_p, x_n und φ_0 erhält:

1. Berechnung von x_p:

$$x_p = -8{,}9 \cdot 10^{-6} \sqrt{\frac{0{,}493 \mp 0{,}2}{0{,}493}}\ \mathrm{cm}$$

$U_d = +0{,}2$ V: $x_p = -6.85 \cdot 10^{-6}$ cm
$U_d = -0{,}2$ V: $x_p = -10{,}6 \cdot 10^{-6}$ cm

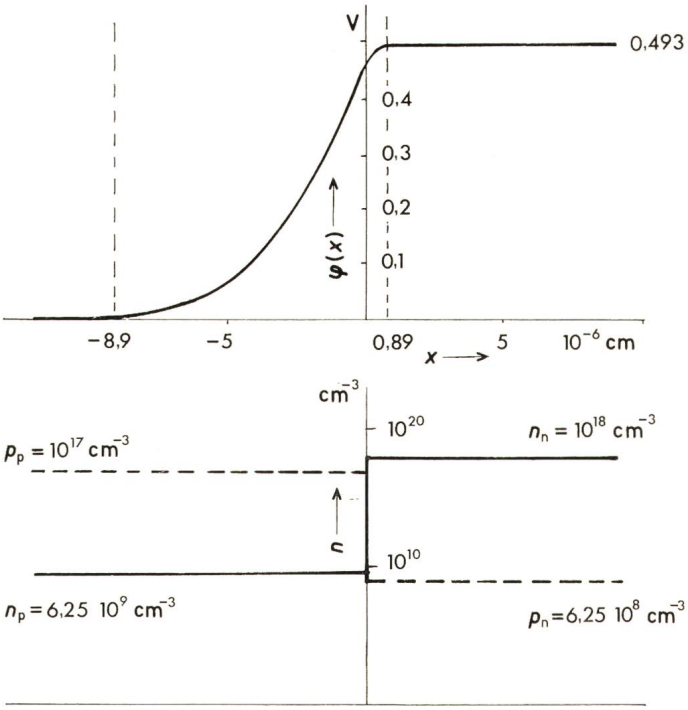


Fig. 8
Potentialverlauf in der Grenzschicht für ein gegebenes Beispiel
Bezeichnungen siehe im Text

2. Berechnung von x_n:

$$x_n = 8{,}9 \cdot 10^{-7} \sqrt{\frac{0{,}493 \mp 0{,}2}{0{,}493}} \text{ cm}$$

$U_d = +0{,}2$ V: $x_n = 6{,}85 \cdot 10^{-7}$ cm
$U_d = -0{,}2$ V: $x_n = 10{,}6 \cdot 10^{-7}$ cm

3. Berechnung von φ_0:

$$U_d = +0{,}2\,\text{V}: \varphi_0 = 0{,}2\,\text{V} + \frac{10^{17}}{1{,}1 \cdot 10^6 \cdot 16{,}1}\, 47 \cdot 10^{-12}\,\text{V} = 0{,}466\,\text{V}$$

$$U_d = -0{,}2\,\text{V}: \varphi_0 = -0{,}2\,\text{V} + \frac{10^{17}}{1{,}1 \cdot 10^6 \cdot 16{,}1}\, 112 \cdot 10^{-12}\,\text{V} = 0{,}435\,\text{V}$$

4. Darstellung des Potentialverlaufes innerhalb der Sperrschicht: Siehe Fig. 9.

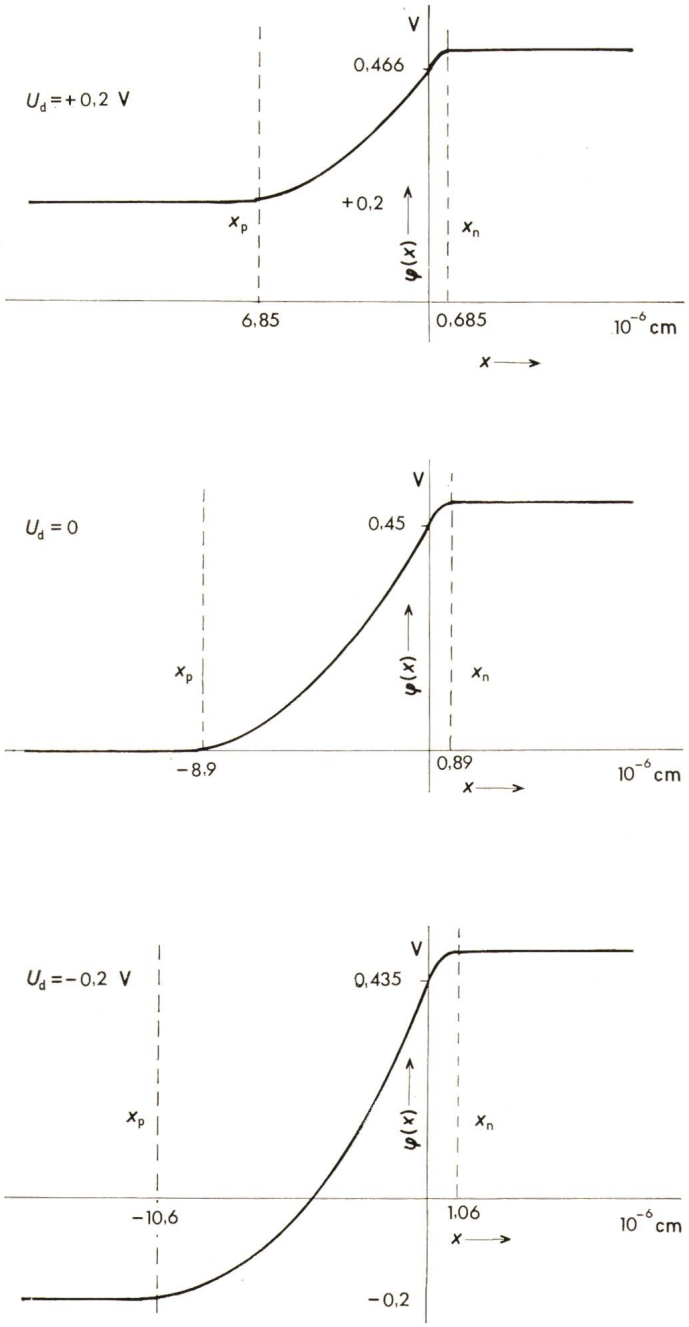


Fig. 9
Potentialverlauf ϑ in der Grenzschicht für ein gegebenes Beispiel

5.3 Sperrschichtkapazität

Diese erhält man nun in einfacher Weise mit Gl. (37) und Gl. (16):

$$C_j = \frac{\varepsilon A}{w} = \frac{\varepsilon A}{\sqrt{(\Phi - U_d)\frac{2\varepsilon}{e}\left[\frac{1}{n_n} + \frac{1}{p_p}\right]}} = \frac{A}{2}\sqrt{\frac{2e\varepsilon}{\Phi - U_d}}\sqrt{\frac{n_n p_p}{n_n + p_p}} \tag{38}$$

Da die Kapazitätsdiode praktisch nur im Sperrgebiet, d. h. bei $U_d < 0$, betrieben wird, ist oft folgende Schreibweise anzutreffen:

$$C_j = \frac{A}{2}\sqrt{\frac{2e\varepsilon}{\Phi + U_d}}\sqrt{\frac{n_n p_p}{n_n + p_p}} \tag{39}$$

wobei jetzt U_d die Sperrspannung der Diode ist. Fasst man die für eine gegebene Diode vorgegebenen Konstanten zusammen und normiert die Kapazität C_j auf einen Kapazitätswert C_0 bei der Spannung U_0 nach der Gleichung

$$C_0 = \frac{A}{2}\sqrt{\frac{2e\varepsilon_0\varepsilon_r}{\Phi + U_0} \cdot \frac{n_n p_p}{n_n + p_p}} \tag{40}$$

so erhält man die einfache, für Dioden mit abruptem pn-bei Übergang gültige Gleichung:

$$C_j = C_0\left(\frac{\Phi + U_0}{\Phi + U_d}\right)^{0,5} \tag{41}$$

Für die diffundierte Diode mit dem Störstellengradienten a, bei der also kein abrupter Übergang von p-Gebiet und n-Gebiet zu verzeichnen ist, ergibt die Theorie [5] für die Sperrschichtkapazität:

$$C_j = \frac{A\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r}{\sqrt[3]{12\frac{\varepsilon_0\,\varepsilon_r}{a\,e}(\Phi + U_d)}} \tag{42}$$

Durch Zusammenfassen der Konstanten erhält man wieder:

$$C_j = C_0\left(\frac{\Phi + U_0}{\Phi + U_d}\right)^{1/3} \tag{43}$$

Praktische Dioden haben weder den Exponenten (slope factor) ½ oder ⅓, sondern einen dazwischen liegenden Wert, so dass man im allgemeinen angibt

$$C_j = C_0\left(\frac{\Phi + U_0}{\Phi + U_d}\right)^q \text{ mit } q = 0{,}33...0{,}5 \tag{44}$$

5.4 Das Fermi-Niveau in Sperrschicht-Dioden

Die elektrische Energie E ergibt sich bekanntlich als Produkt aus Ladung und Spannung. In dem hier vorliegenden Fall wird demnach die Energieverteilung innerhalb der Sperrschicht gegeben durch die Gleichung

$$E(x) = -e\,\varphi(x) \tag{45}$$

Mit Gl. (45) hat bei entsprechender Berücksichtigung des Minuszeichens (negative Ladung des Elektrons!) die Energie $E(x)$ den gleichen Verlauf wie das unter Abschnitt 5.2 berechnete Potential $\varphi(x)$. Üblich ist es, als Bezugspunkt dieser Energie die untere Kante des Leitungsbandes zu wählen.

Angaben für die Energieverteilung für eine Sperrschichtdiode

Tabelle V

$p_p = 10^{17}\,cm^{-3}$ $T = 300\,^0K$ $n_n = 10^{18}\,cm^{-3}$ $\varepsilon_r = 16{,}1$ (Ge)			$U_d = +0{,}2\,V$	$U_d = 0$	$U_d = -0{,}2\,V$
$\Phi = 2{,}3\ U_T \lg \frac{n_n p_p}{n_i^2}$	V	Gl. (12)	0,493	0,493	0,493
x_p	cm	Gl. (35)	$-6{,}85 \cdot 10^{-6}$	$-8{,}9 \cdot 10^{-6}$	$-10{,}6 \cdot 10^{-6}$
x_n	cm	Gl. (36)	$0{,}685 \cdot 10^{-6}$	$0{,}89 \cdot 10^{-6}$	$1{,}06 \cdot 10^{-6}$
$\varphi(x = 0)$	V	Gl. (29)	0,466	0,45	0,435
$E(x = 0) = -e\,\varphi(x = 0)$	eV	Gl. (45)	−0,466	−0,45	−0,435
$E_{Fp} - E_v = k\,T \ln \frac{P_v}{p_p}$	eV	Gl. (7)	0,143	0,143	0,143
$E_c - E_{Fn} = k\,T \ln \frac{N_c}{n_n}$	eV	Gl. (6)	0,084	0,084	0,084

Als Zahlenbeispiel sei die Energieverteilung für eine Sperrschichtdiode mit den in früheren Beispielen und in Tabelle V angeführten Dotierungen in Fig. 10 angeführt:

Wie man anhand der Fig. 10 recht deutlich erkennt, liegt das Fermi-Niveau in Abwesenheit einer äusseren Spannung U_d in der gesamten Sperrschicht auf gleicher Höhe. Das gleiche konstante Fermi-Niveau wird sich im spannungslosen Zustand später auch beim Metall-Halbleiter-Übergang der Schottky-Diode (Hot Carrier Diode) ergeben. Das Fermi-Niveau ist damit sozusagen der gemeinsame Pegel, der sich beim Zusammenführen zweier Materialien oder Dotierungszonen einstellt.

Bei Anlegen einer äusseren Spannung U_d in Durchlassrichtung senkt sich das Fermi-Niveau des p-Gebietes, wie Fig. 10 zeigt, um den Betrag $E = e\,U_d$ ab. Die Elektronen des n-Gebietes können jetzt «den Energieberg herunterfallen». Zudem zeigt Fig. 10 deutlich, dass die Sperrschicht mit dem Anlegen einer positiven Spannung kleiner wird, womit natürlich der Sperrschichtwiderstand abnehmen muss.

Bei Anlegen einer negativen äusseren Spannung wird das Fermi-Niveau des p-Gebietes um den Betrag $E = e\,U_d$ angehoben. Die Elektronen des n-Gebietes können nun nicht mehr «den Energieberg heraufaufaufen». Zudem wird die Sperrschichtweite nach Fig. 10 vergrössert, womit bei steigender negativer Spannung die Kapazität der Sperrschicht abnehmen muss.

6. Anhang

Durch den Beweis der aufgestellten Behauptung, dass nämlich bei Eigenhalbleitern das Fermi-Niveau in der Mitte zwischen Leitungsband und Valenzband liegt, erhält man einen tieferen Einblick in die bei Störstellenhalbleitern und bei pn-Übergängen liegenden Zusammenhänge. Er sei deshalb hier angetreten:

a) Anzahl der freien Plätze innerhalb eines Energiebereiches dE. Hierfür ergibt die Theorie [3]:

$$dN = 4\,\pi \left(\frac{2\,m}{h^2}\right)^{3/2} (E - E_c)^{1/2}\,dE = A\,(E - E_c)^{1/2}\,dE \quad \text{(A.1)}$$

Dabei ist E_c nach Fig. 4 die untere Grenze des Leitungsbandes.

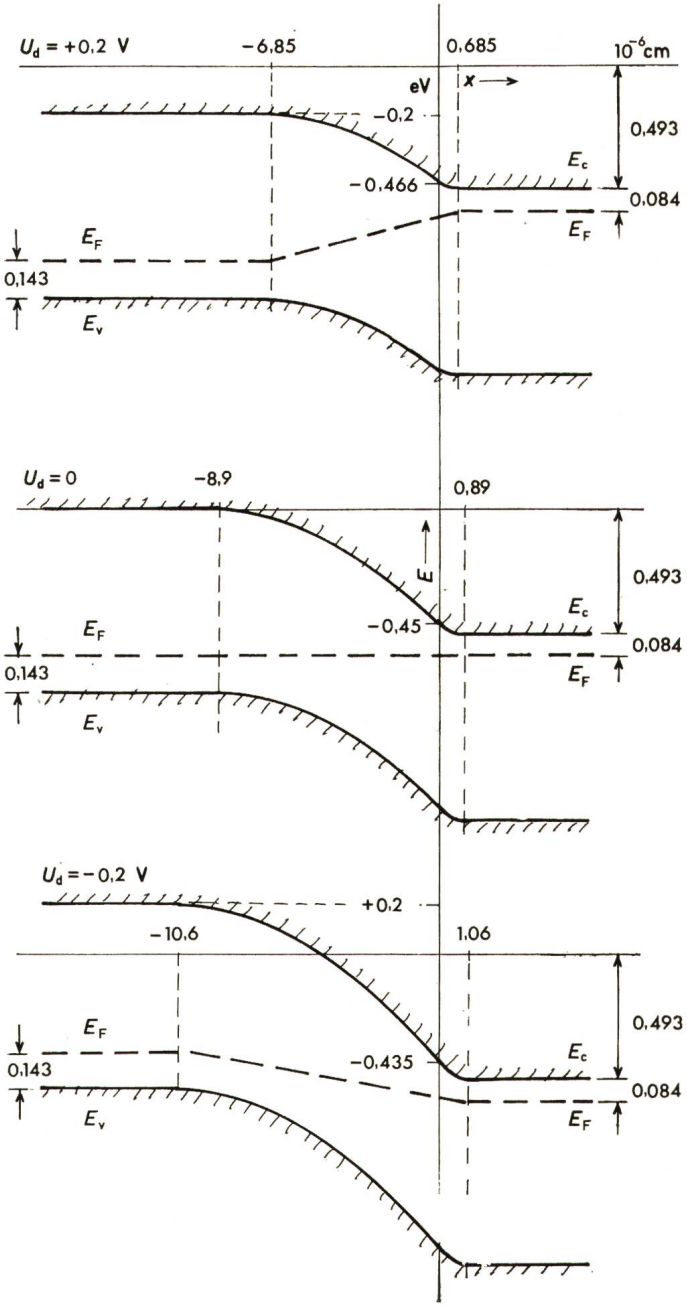


Fig. 10
Energieverteilung und Fermi-Niveau in der Grenzschicht für ein gegebenes Beispiel
Bezeichnungen siehe im Text

b) Elektronenzahl im Leitungsband. Nach der Gl. (3a) war

$$dn = f(E)\,dN \tag{A.2}$$

wobei jetzt $f(E)$ durch Gl. (4) und dN durch Gl. (A.1) gegeben sind. Die Funktion $f(E)$ lässt sich bei der hier vorliegenden Problemstellung, nämlich der Berechnung der Elektronenzahl im Leitungsband, vereinfachen, da hier

$$E_c - E_F \gg k\,T = 26 \cdot 10^{-3}\,\text{eV}\,(T = 300\,^0\text{K})$$

ist.

Tabelle VI

Stoff	Temperatur ^{0}K	$(E_c - E_v)$ eV	$(E_c - E_F)$ eV
Germanium	300	0,65...0,73	0,325
Silizium	300	1,08...1,12	0,54
Germanium	0	0,73	0,365
Silizium	0	1,14	0,57

Es war nach Gl. (4):

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{(E - E_F/k\,T}} \approx e^{-(E - E_F)/k\,T} \tag{A.3}$$

Damit ist aus der Fermi-Dirac-Statistik die Maxwell-Boltzmann-Verteilungsfunktion geworden. Die Gl. (A.1) und (A.3) werden jetzt in Gl. (A.2) eingesetzt. Die Gesamtzahl der Elektronen im Leitungsband erhält man dann, wenn von E_c bis ∞ integriert wird:

$$n = \int_{E_c}^{\infty} f(E)\,dN = \int_{E_c}^{\infty} A\,(E - E_c)^{1/2}\,e^{-(E - E_F)/k\,T}\,dE =$$

$$= A \int_{E_c}^{\infty} (E - E_c)^{1/2}\,e^{-E/k\,T}\,e^{E_F/k\,T}\,dE\,e^{E_c/k\,T}\,e^{-E_c/k\,T} =$$

$$= A \int_{E_c}^{\infty} (E - E_c)^{1/2}\,e^{-(E_c - E_F)/k\,T}\,e^{-(E - E_c)/k\,T}\,dE =$$

$$= A\,e^{-(E_c - E_F)/k\,T} \int_{E_c}^{\infty} (E - E_c)^{1/2}\,e^{-(E - E_c)/k\,T}\,dE =$$

$$= A\,k\,T(k\,T)^{1/2}\,e^{-(E_c - E_F)/k\,T} \int_{E_c}^{\infty} \left(\frac{E - E_c}{k\,T}\right)^{1/2} e^{-(E - E_c)/k\,T}\,d\left(\frac{E}{k\,T}\right)$$

Die Grenzen des Integrals können erweitert werden von $\int_{E_c}^{\infty}$ auf $\int_0^{\infty}$, wenn über $d((E - E_c)/k\,T)$ statt über $d(E/k\,T)$ integriert wird.

$$n = A\,(k\,T)^{3/2}\,e^{-(E_c - E_F)/k\,T} \int_0^{\infty} \left[\frac{E - E_c}{k\,T}\right]^{1/2} e^{-(E - E_c)/k\,T}\,d\left[\frac{E - E_c}{k\,T}\right] \tag{A.4}$$

Das Integral in Gl. (A.4) ist bekannt

$$\int_0^{\infty} x^{1/2}\,e^{-x}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{A.5}$$

und es wird aus Gl. (A.4)

$$n = A\,(k\,T)^{3/2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-(E_c - E_F)/k\,T} \tag{A.6}$$

Die Konstanten der Gl. (A.6) werden zusammengefasst:

$$N_c = A\,(k\,T)^{3/2}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 4\,\pi\left[\frac{2\,m}{h^2}\right]^{3/2}(k\,T_0)^{3/2}\,(T/T_0)^{3/2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$N_c = 2{,}5 \cdot 10^{19}\,(T/T_0)^{3/2}\,\text{cm}^{-3} \tag{A.7}$$

Damit erhält man jetzt für die Anzahl der Elektronen im Leitungsband eines Eigenhalbleiters

$$n = N_c\,e^{-(E_c - E_F)/k\,T} \tag{A.8}$$

Die Anzahl der Elektronen im Leitungsband eines Eigenhalbleiters ist bei konstanter Temperatur nur abhängig von der Energie der unteren Leitungsbandkante E_c zur Energie des Fermi-Niveaus.

c) Löcherzahl im Valenzband. Für diese erhält man analog

$$p = P_v\,e^{-(E_F - E_v)/k\,T} \tag{A.9}$$

$$P_v = 2{,}5 \cdot 10^{19}\,(T/T_0)^{3/2}\,\text{cm}^{-3} \tag{A.10}$$

Das Symbol P_v bzw. N_c soll andeuten:

- P positive Ladungsträger = Löcher
- v Valenzband
- P_v Löcher im Valenzband
- N negative Ladungsträger = Elektronen
- c Leitungsband
- N_c Elektronen im Leitungsband

d) Lage des Fermi-Niveaus in Eigenhalbleitern: In Eigenhalbleitern ist die Anzahl der Löcher p gleich der Anzahl der Elektronen n [7], (Tabelle VII):

$$p = n = n_i \tag{A.11}$$

(«i» von intrinsic = rein)

Tabelle VII

Stoff	n_i^2 cm^{-6}	n_i cm^{-3}
Germanium	$6{,}25 \cdot 10^{26}$	$2{,}5 \cdot 10^{13}$
Silizium	$4{,}64 \cdot 10^{21}$	$6{,}8 \cdot 10^{10}$
Metalle	10^{46}	10^{23}

Mit Gl. (A.11) wird jetzt

$$p = n = P_V e^{-(E_F - E_V)/kT} = N_C e^{-(E_C - E_F)/kT} \quad (A.12)$$

$$-(E_F - E_V) = -(E_C - E_F)$$

$$E_F = \frac{E_C + E_V}{2} \quad (A.13)$$

Das Fermi-Niveau eines Eigenhalbleiters liegt also in der Mitte zwischen Leitungsband und Valenzband.

Literatur

[1] *W. Henne:* Die Gunn-Diode. Bull. SEV 63(1972)9, S. 447...454.

[2] *C. Gerthsen:* Physik. Ein Lehrbuch zum Gebrauch neben Vorlesungen. Berlin/Leipzig, Verlag Volk und Wissen, 1948.

[3] *E. J. Cassignol:* Halbleiter. Bd. 1: Physik und Elektronik. Philips technische Bibliothek. Eindhoven, N. V. Philip's Gloeilampenfabrieken, 1966.

[4] *E. Spenke:* Elektronische Halbleiter. Eine Einführung in die Physik der Gleichrichter und Transistoren. Berlin/Göttingen/Heidelberg, Springer-Verlag, 1955.

[5] *H. Keller, M. Lehmann* und *L. Mičič:* Diffundierte Silizium-Kapazitätsdioden. Radio Mentor 28(1962)8, S. 661...667.

[6] *W. Guggenbühl, M. J. O. Strutt* und *W. Wunderlin:* Halbleiter-Bauelemente. Bd. I: Halbleiter und Halbleiterdioden. Basel/Stuttgart, Birkhäuser-Verlag, 1962.

[7] *H. Teichmann:* Die Tunneldiode (Wirkungsweise und Anwendung). Fernmeldeingenieur 24(1970)8, S. 1...40.

Adresse des Autors:

Dr.-Ing. *W. Henne,* Professor an der Fachhochschule Augsburg, Haferstrasse 20 d, D-8903 Haunstetten.

Commission Internationale de Réglementation en vue de l'Approbation de l'Equipement Electrique (CEE)

Sitzungen des TC 032, Committee of Testing Stations, vom 8. bis 10. März 1972 in Paris

Am 8. und 9. März fand im Konferenzsaal des Laboratoire centrale des Industries électriques in Fontenay-aux-Roses und am 10. März in Paris bei der UTE die 4. Sitzung des TC 032 statt. Es waren 15 CEE-Länder durch 27 Prüfstellen-, 2 Industrieangehörige und 3 Beobachter (USA, BSI und ETVA) vertreten.

Nach Genehmigung des Protokolls der Sitzung vom 10. und 12. März 1971 in Offenbach wurde die eingegangene Liste der von verschiedenen Prüfstationen empfohlenen Prüfeinrichtungen behandelt. Von 5 Ländern (F, D, NL, N und UK) sind entsprechende Angaben gemacht worden. Die Liste ist noch nicht vollständig, und das Komitee beschloss deshalb, dass vom Sekretariat für das weitere Vorgehen ein entsprechendes Dokument an die Nationalkomitees versandt werden soll. Diese Liste soll nur empfohlene CEE-Prüfeinrichtungen enthalten und bedeute keinesfalls die Übernahme einer Verantwortung für die Lieferqualität.

Die von einer Arbeitsgruppe vorgeschlagene Messmethode zur Prüfung von Unterbrechern mit Induktivität im Stromkreis wurde nach einiger Diskussion angenommen. Als Grenzwert für den Faktor der zulässigen Überschwingung der Spannung bei eisenhaltigem Prüfkreis wurde 1,3 ± 0,1 von der Mehrheit der Mitglieder als richtig beurteilt. In einer weiteren Arbeit soll das gleiche Problem mit eisenloser Induktivität im Prüfkreis behandelt werden. Ob das Dokument als Publikation oder Empfehlung der CEE herausgegeben werden soll, soll durch die Plenarversammlung entschieden werden. Für die Prüfung der Dauerhaftigkeit von Aufschriften wurde der von England eingereichte Entwurf, mit einer relativ grossen Einrichtung, heftig diskutiert. Deutschland machte hierzu einen neuen Vorschlag mit einer handlichen kleinen Reibeinrichtung. Um die beiden Vorschläge besser beurteilen zu können, beschloss das Komitee, dass unter Berücksichtigung der Versuche aus den sich von England ergebenden charakteristischen Kennwerten wie Reibradius, Druck und angewendete Flüssigkeit von D, UK, S und NL Versuche gemacht werden sollen. Das Ergebnis soll an der nächsten Sitzung behandelt werden. Der schweizerische Vorschlag über die Genauigkeit von Temperaturmessungen wurde prinzipiell angenommen; England machte jedoch dazu den Vorschlag, die Ausführungen über die Messung mit Thermoelementen ausführlicher zu gestalten, indem die Anordnung der Elemente am Objekt noch zusätzlich berücksichtigt wird. Jedes Mitglied wird dem schweizerischen Vertreter seine entsprechenden Erfahrungen zustellen, damit dieser den Vorschlag ergänzen kann.

Das Komitee behandelte ferner das von Dänemark aufgeworfene Problem der Messung des Spannungsabfalles an den Kontakten von konfektionierten Kabeln mit Stecker und Steckbuchse. Nach längerer Diskussion wurde der Beschluss der letzten Sitzung bestätigt, dass für die Prüfung gemäss § 15 b der CEE-Publikation 22 drei zusätzliche Muster zu verwenden sind. Nachdem in früheren Sitzungen die Eichung der Einrichtungen zur Prüfung der mechanischen Festigkeit abschliessend behandelt worden war, konnte an dieser Sitzung die Anwendung dieser Einrichtungen besprochen werden. Nach reger Diskussion über die Auswirkung der Unterlage (auf welche das zu prüfende Objekt gestellt wird), auf das Resultat der Härteprüfung mit dem Springhammer, beschloss das Komitee, nach einem neuen holländischen Entwurf dieses Problem an der nächsten Sitzung weiter zu behandeln. Die Bestimmung der zur Prüfung notwendigen Anzahl Apparateschalter entsprechend CEE-Publikation 24 wurde auf Grund des englischen Vorschlages *CEE(032)UK 153/71* festgelegt. Entsprechend dem Anwendungsbereich, der Konstruktion und den Prüfbedingungen muss die notwendige Zahl Muster zur Verfügung stehen. England wird hierzu einen bereinigten Entwurf für die nächste Sitzung ausarbeiten.

Nachdem die an der nächsten Sitzung zu behandelnden Traktanden festgelegt waren, behandelte das Komitee noch die Frage, in welcher Form die Ergebnisse der Sitzungen des TC 032 anderen CEE-Mitgliedern als nur den Prüfstellenteilnehmern zur Kenntnis gebracht werden könnten. Da kein diesbezüglicher Beschluss gefasst werden konnte, erhielt das Sekretariat den Auftrag, zu dieser Frage für die nächste Sitzung einen Vorschlag auszuarbeiten.

K. von Angern