

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

**Band:** 63 (1972)

**Heft:** 11

**Artikel:** Feldstärkeeffekte bei Zweistoffdielektrika

**Autor:** Weiss, P.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-915699>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Feldstärkeeffekte bei Zweistoffdielektrika<sup>1)</sup>

Von P. Weiss, München

Es wird zunächst gezeigt, wie das Ladungsverfahren auch für Zweistoffdielektrika angewandt werden kann. Danach werden Rechenergebnisse wiedergegeben, die unter Anwendung des so erweiterten Verfahrens bei Reihen- und Parallelschaltungen zweier Dielektrika gewonnen wurden. Insbesondere wird auf einen grundsätzlich neuen feldtheoretischen Effekt bei Parallelschaltung zweier Dielektrika, den «Einbettungseffekt», hingewiesen, dessen Entdeckung auf die Anwendung dieses Verfahrens zurückgeht.

## 1. Einleitung

Ein elementares Problem der Hochspannungstechnik besteht in der Vermeidung von Entladungen jeglicher Art an praktischen Anordnungen. Dazu ist eine genaue Kenntnis nicht nur der elektrischen Eigenschaften der verwendeten Isoliermedien, sondern auch des der jeweiligen Anordnung zugrunde liegenden Hochspannungsfeldes unerlässlich. Viele bekannte Felduntersuchungen beschränken sich auf Anordnungen mit einem einzigen Dielektrikum und verlieren damit an Aussagekraft in allen Fällen, in denen die durch Grenzschichteffekte beeinflussten Feldverhältnisse vom Feld der korrespondierenden Einstoffisolieranordnung erheblich abweichen.

Der von Schwaiger [2]<sup>2)</sup> definierte Ausnutzungsfaktor

$$\eta = \frac{U_d}{a E_d} \quad (1)$$

mit

- $a$  kürzester Abstand der Elektroden  
 $E_d$  Durchschlagfeldstärke  
 $U_d$  Durchschlagsspannung

erlaubt als dimensionsunabhängige Charakterisierung einen Vergleich der Feldgüte beliebig geformter Elektrodenanordnungen. Er erhält bei Zweistoffdielektrika in doppelter Hinsicht eine besondere Bedeutung.

Zunächst können sich bei Reihenschaltung zweier Dielektrika in dem Medium mit der niedrigeren relativen Dielektrizitätskonstanten hohe Spaltfeldstärken ergeben. Dies führt zu einer erheblichen Absenkung des Ausnutzungsfaktors gegenüber dem korrespondierenden Einstoffdielektrikum mit gleicher Elektrodenanordnung. Bei Parallelschaltung zweier Dielektrika sind unter dem Aspekt der Gleitentladung die Tangentialfeldstärken an der dielektrischen Grenzschicht von Bedeutung. Daraus ergibt sich mit Gl. (1) durch Einsetzen der maximalen Tangentialfeldstärke und des kürzesten Überschlagsweges ein entsprechender Überschlagsausnutzungsfaktor. Dieser kann durch entsprechende Gestaltung der dielektrischen Grenzschicht auch bei inhomogenen Feldern den Wert 1 erreichen.

<sup>1)</sup> Wissenschaftlicher Beitrag zum Internationalen Symposium Hochspannungstechnik des VDE und der IEEE Power Engineering Society, München 1972. — B. Hansler in Dankbarkeit gewidmet.

<sup>2)</sup> Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

621.3.027.3:621.315.61-012:621.372.2.095.3

On montre tout d'abord comment le procédé de charge peut être également appliqué à des diélectriques en deux matières. Des résultats de calculs obtenus en appliquant ce procédé étendu aux couplages en série et en parallèle de deux diélectriques sont ensuite indiqués. L'auteur signale en particulier un effet entièrement nouveau de la théorie des champs lors du couplage en parallèle de deux diélectriques, l'effet d'enrobage, dont la découverte résulte de l'application de ce procédé.

## 2. Rechenverfahren

### 2.1 Auswahl eines geeigneten Verfahrens

Bei der Auswahl eines geeigneten Rechenverfahrens ist besonders auf die Zuverlässigkeit und die Möglichkeiten einer Kontrolle der errechneten Ergebnisse hinsichtlich ihrer Genauigkeit sowie auf möglichst geringen Rechenzeitaufwand am Rechner zu achten. Entsprechende Vergleiche [6] zeigten dabei erhebliche Vorteile des von Steinbigler entwickelten Ladungsverfahrens gegenüber bekannten Methoden. Es war deshalb naheliegend, das Ladungsverfahren so zu erweitern, dass damit auch Zweistoffdielektrika berechnet werden können. Dies soll im folgenden am Beispiel der Parallelschaltung zweier Dielektrika gezeigt werden; der einfachere Fall der Reihenschaltung zweier Dielektrika kann daraus leicht abgeleitet werden.

### 2.2 Ableitung des Rechenverfahrens

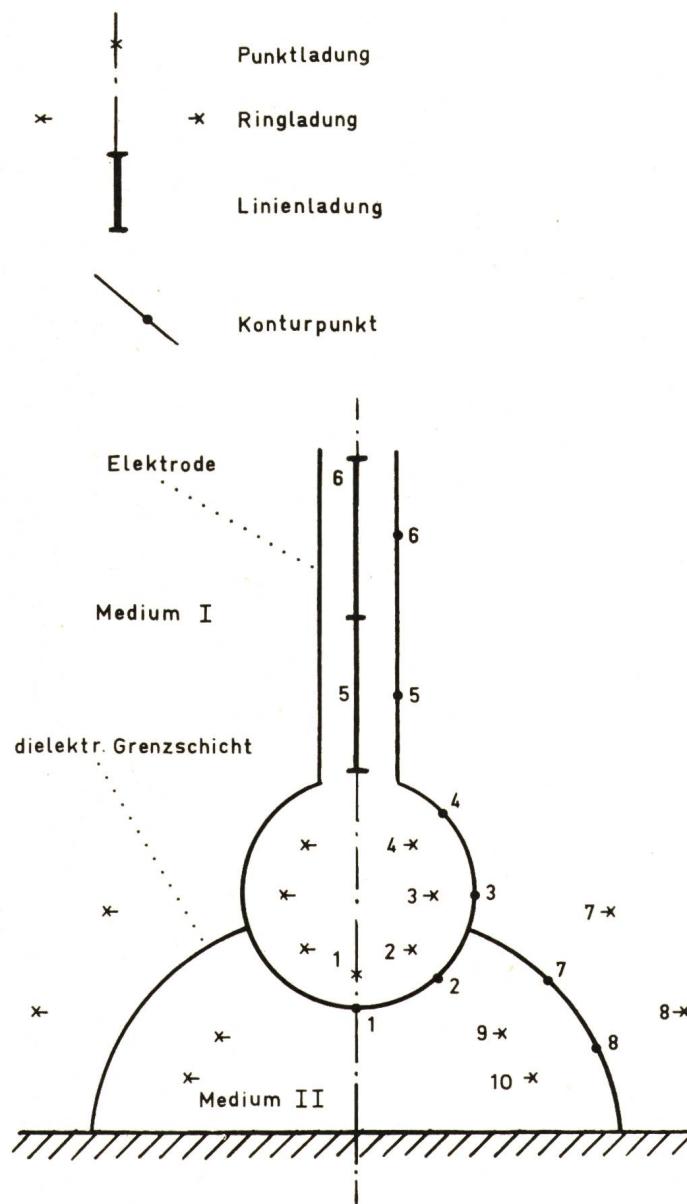
Jede unter Spannung stehende Elektrode besitzt an ihrer Oberfläche eine unendlich fein verteilte Ladung. Aufbauend auf Maxwell [1] kann diese stetig verteilte Oberflächenladung durch eine Anzahl diskreter Ladungen innerhalb der Elektrode ersetzt werden. Jeder dieser diskreten Ladungen wird ein Konturpunkt an der Elektrodenoberfläche zugeordnet, in dem jeweils alle diskreten Ladungen zusammen ein vorgegebenes Elektrodenpotential  $u$  ergeben. Da nun jede der Ladungen einen der Größen der Ladung proportionalen Beitrag zum Potential liefert, entsteht ein lineares Gleichungssystem, in dem die Werte der einzelnen Ladungen die Unbekannten darstellen. Die Auflösung des Gleichungssystems liefert die Werte für die Ladungen. Bei sinnvoller Anordnung von Ladungen und Konturpunkten ergeben die diskreten Ladungen eine genaue Nachbildung der gesamten Elektrodenanordnung, so dass damit in jedem Punkt des Feldes durch Aufsummieren der Wirkung der einzelnen diskreten Ladungen das Potential und die Feldstärke nach Betrag und Richtung bestimmt werden können [6; 7].

Nun stimmt bekanntlich eine dielektrische Grenzschicht in ihrer Wirkung auf das elektrostatische Feld mit einer Flächenladungsschicht überein [4; 5]; es entspricht sogar gängigen physikalischen Vorstellungen, dass die Wirkung eines Dielektrikums mit  $\epsilon_r > 1$  auf der Ausrichtung seiner Dipole beruht, deren Wirkung sich im Inneren des Dielektrikums aufhebt, die aber an der dielektrischen Grenzschicht als Flächenladungs-

schicht in Erscheinung treten. Für die Rechnung kann deshalb auch diese Flächenladungsschicht durch diskrete Ladungen ersetzt werden.

Am Beispiel einer einfachen rotationssymmetrischen Elektrodenanordnung mit Parallelschaltung zweier Dielektrika (Fig. 1) soll die Anordnung von Konturpunkten und Ladungen dargestellt und daraus das sich ergebende Gleichungssystem abgeleitet werden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit soll dabei auf eine numerische Indizierung von Ladungen und Konturpunkten zurückgegriffen werden.

Fig. 1 zeigt die Anordnung der Ladungen und Konturpunkte. Sechs Konturpunkte und Ladungen gehören zur Elektrode, davon zwei zu jenem Teil, der an das Medium II grenzt. Zwei Konturpunkte liegen auf der Grenzschicht. Jedem ist in beiden Medien jeweils eine Ladung zugeordnet. Die Ladung Nr. 1 ist eine Punktadung auf der Rotationsachse, die Ladungen Nr. 5 und 6 sind Linienladungen auf der Rotationsachse und alle anderen sind kreisringförmige, zur Rotationsachse konzentrische Linienladungen, sog. Ringladungen.



Prinzipielle Anordnung von Ladungen und Konturpunkten bei Parallelschaltung zweier Dielektrika  
Bezeichnung siehe im Text

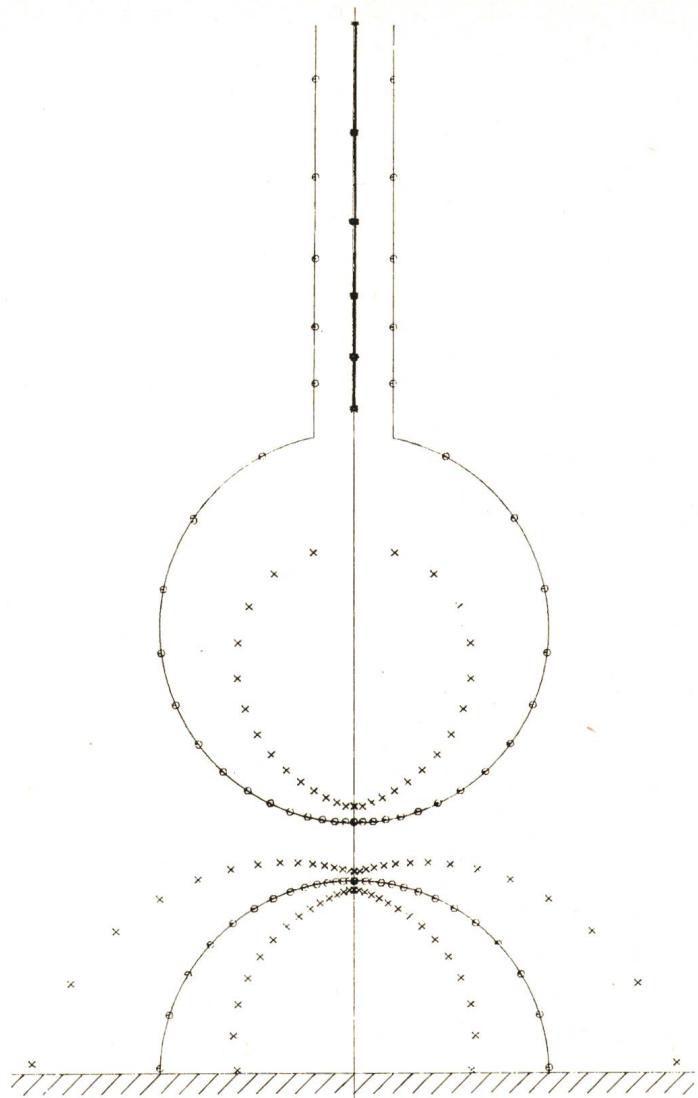


Fig. 2  
Beispiel für die Anordnung von Konturpunkten und Ladungen bei Reihenschaltung zweier Dielektrika

Die vier Arten von Bedingungen, aus denen sich der Aufbau des Gleichungssystems ableitet, sind:

- Potential  $u$  in den Konturpunkten der Elektrode, soweit diese Medium II berührt (Punkte 1 und 2);
- Potential  $u$  in den Konturpunkten der Elektrode, soweit diese Medium I berührt (Punkte 3...6);
- Stetigkeit des Potentials beim Durchgang durch die dielektrische Grenzschicht, und zwar in den Konturpunkten der Grenzschicht (Punkte 7 und 8);
- Normalkomponenten der Feldstärken in den Konturpunkten der Grenzschicht im umgekehrten Verhältnis der relativen Dielektrizitätskonstanten der beiden Medien (Punkte 7 und 8).

Damit ergibt sich ein System von 10 Bedingungsgleichungen [2 aus a), 4 aus b), je 2 aus c) und d)] mit 10 Unbekannten, den Werten für die Ladungen. Für die folgende mathematische Ableitung ist noch eine Definition von Bedeutung: Die Ladungen in der Elektrode (1...6) gelten alle für beide Medien, die Grenzschichtladungen im Medium I (7 und 8) gelten für das Medium II und die Grenzschichtladungen im Medium II (9 und 10) gelten für das Medium I. Die Ladungen 7 und 8 ersetzen also die einer Flächenladungsschicht entsprechende Wirkung der Grenzschicht bezüglich Medium II, die Ladungen 9 und 10 bezüglich Medium I.

Die vier Arten von Bedingungen sind nun mathematisch zu formulieren. Damit ergibt sich für Bedingung a), dass in den

Punkten 1 und 2 das Potential gleich  $u$  sein muss, also gilt für  $i = 1 \dots 2$ :

$$\sum_{k=1}^6 q_k p_{i,k} + \sum_{k=7}^8 q_k p_{i,k} = u \quad (2)$$

Dabei ist  $q_k$  die  $k$ -te Ladung und  $p_{i,k}$  der Proportionalitätsfaktor für den Beitrag der  $k$ -ten Ladung zum Potential  $u$  im  $i$ -ten Konturpunkt.

Für den  $i$ -ten der Konturpunkte 3...6 folgt analog aus b):

$$\sum_{k=1}^6 q_k p_{i,k} + \sum_{k=9}^{10} q_k p_{i,k} = u \quad (3)$$

Die Bedingung c) ergibt für den  $i$ -ten der Konturpunkte 7...8:

$$\sum_{k=1}^6 q_k p_{i,k} + \sum_{k=7}^8 q_k p_{i,k} = \sum_{k=1}^6 q_k p_{i,k} + \sum_{k=9}^{10} q_k p_{i,k} \quad (4)$$

oder vereinfacht:

$$-\sum_{k=7}^8 q_k p_{i,k} + \sum_{k=9}^{10} q_k p_{i,k} = 0$$

Schliesslich liefert Bedingung d) für den  $i$ -ten der Konturpunkte 7...8:

$$\frac{\sum_{k=1}^6 q_k f_{n_i,k} + \sum_{k=9}^{10} q_k f_{n_i,k}}{\sum_{k=1}^6 q_k f_{n_i,k} + \sum_{k=7}^8 q_k f_{n_i,k}} = \frac{\epsilon_{rII}}{\epsilon_{rI}} = v_\epsilon$$

oder:

$$(v_\epsilon - 1) \sum_{k=1}^6 q_k f_{n_i,k} + v_\epsilon \sum_{k=7}^8 q_k f_{n_i,k} - \sum_{k=9}^{10} q_k f_{n_i,k} = 0 \quad (5)$$

Dabei stellt  $f_{n_i,k}$  den Proportionalitätsfaktor für den Beitrag der  $k$ -ten Ladung zur Normalkomponente der Feldstärke im  $i$ -ten Konturpunkt dar.

Die Formeln zur Berechnung der Koeffizienten  $p_{i,k}$  und  $f_{n_i,k}$  bei Punkt-, Linien- und Ringladungen können entsprechenden Unterlagen [3; 6] entnommen werden. Aus dem mathematischen Ansatz ergibt sich eine Koeffizientenmatrix, auf deren Aufbau aus verschiedenen besetzten Teilmatrizen hier nicht näher eingegangen werden soll. Im Prinzip gleichwertig gegenüber dem vorstehenden Ansatz ist auch eine Lösungsvariante, bei der die Ladungen Nr. 1 und 2 in der Elektrode nur für das Medium II und die Ladungen Nr. 3...6 nur für das Medium I gelten.

In der Praxis ist für eine hinreichend genaue Berechnung die Anwendung höherer Ladungszahlen erforderlich. Für das Beispiel nach Fig. 1 wären — abhängig von der geforderten Genauigkeit — etwa 40...80 Ladungen zu verwenden. Damit macht dieses Verfahren die Anwendung von Digitalrechnern erforderlich.

Die entsprechende Behandlung der Reihenschaltung zweier Dielektrika für eine Anordnung nach Fig. 2 kann aus Fig. 1 leicht abgeleitet werden. Da bei dieser Reihenschaltung die Elektrode nur das Medium I berührt, fällt die Bedingung a) weg; in den Konturpunkten 1 und 2 gelten damit die gleichen Bedingungen wie in den Konturpunkten 3...6 [8]. Bei der Reihenschaltung in Fig. 2 wurde eine sinnvolle Anzahl von 50 Ladungen verwendet und ausserdem eine Verdichtung von

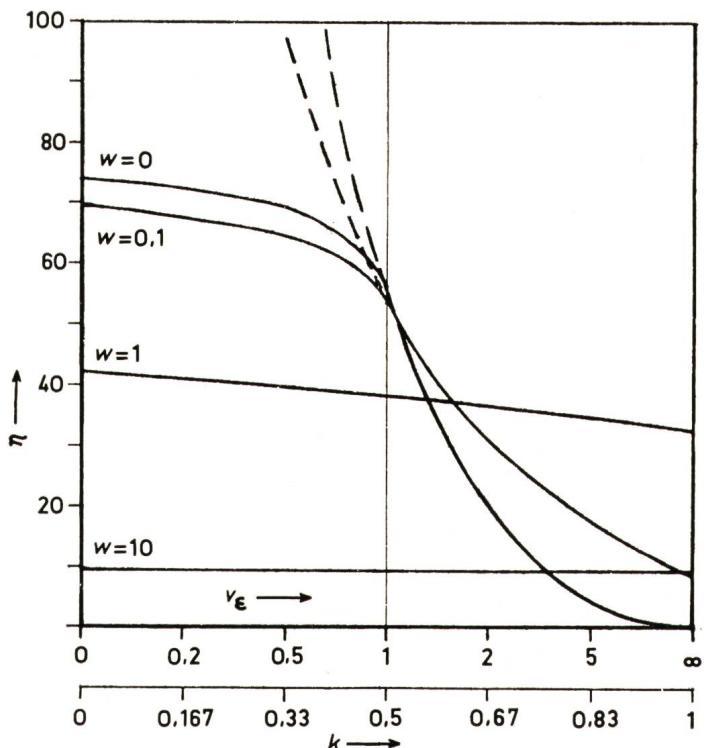
Konturpunkten und Ladungen im interessierenden Bereich höherer Feldstärken durchgeführt. Diese Verdichtung ist grundsätzlich nur in Sonderfällen, nämlich bei der systematischen Untersuchung von Anordnungen mit sehr hohen Feldstärken, nötig; sie wirkt sich aber in jedem Fall günstig auf das Verhältnis von Rechenzeitaufwand zu Genauigkeit aus.

Durch Aufsummierung der Wirkung der für das jeweilige Medium gültigen Ladungen können in jedem Punkt des Feldes das Potential und die Feldstärke nach Betrag und Richtung berechnet werden. Führt man dies für Punkte durch, die auf der Elektroden- bzw. Grenzschichtkontur zwischen den Konturpunkten liegen, so ist damit eine gute Kontrolle für die Genauigkeit möglich, mit der auch ausserhalb der Konturpunkte die Bedingungen für die Elektrode [a) bzw. b)] und die Grenzschicht [c) und d)] eingehalten werden.

### 3. Ergebnisse

#### 3.1 Reihenschaltung zweier Dielektrika

Bei Anordnungen mit Reihenschaltung zweier Dielektrika ist der Einfluss von Parametern wie Grösse und Form der Elektrode und der dielektrischen Grenzschicht, Verhältnis  $v_\epsilon$  der relativen Dielektrizitätskonstanten und Stärke des Mediums mit der niedrigeren Dielektrizitätskonstanten (Grösse  $w$  in Fig. 3) auf den gesamten Feldverlauf, insbesondere auf den am Maximalwert der Feldstärke orientierten Ausnutzungsfaktor nach Gl. (1) von Interesse.



$\eta = \frac{U}{\alpha E_{max}} 100 (\%)$

$v_\epsilon = \frac{\epsilon_{rII}}{\epsilon_{rI}} \quad \alpha = w + 1$

$k = \frac{v_\epsilon}{v_\epsilon + 1}$

Fig. 3  
Ausnutzungsfaktoren bei Reihenschaltung zweier Dielektrika

Systematische Untersuchungen zeigen ein Dominieren des Einflusses von  $v_e$  und  $w$  gegenüber allen anderen Parametern. Fig. 4 gibt zunächst eine qualitative Vorstellung vom Einfluss der Grösse  $v_e$  auf den Verlauf der Feldlinien im Medium I. Durch die Voraussetzung gleicher Anfangspunkte an der Elektrode für alle vier Werte von  $v_e$  wird die Auffächerung der Feldlinien deutlich. Eine quantitative Aussage zum Einfluss von  $w$  und  $v_e$  beinhaltet Fig. 3. Aufschlussreich ist dabei be-

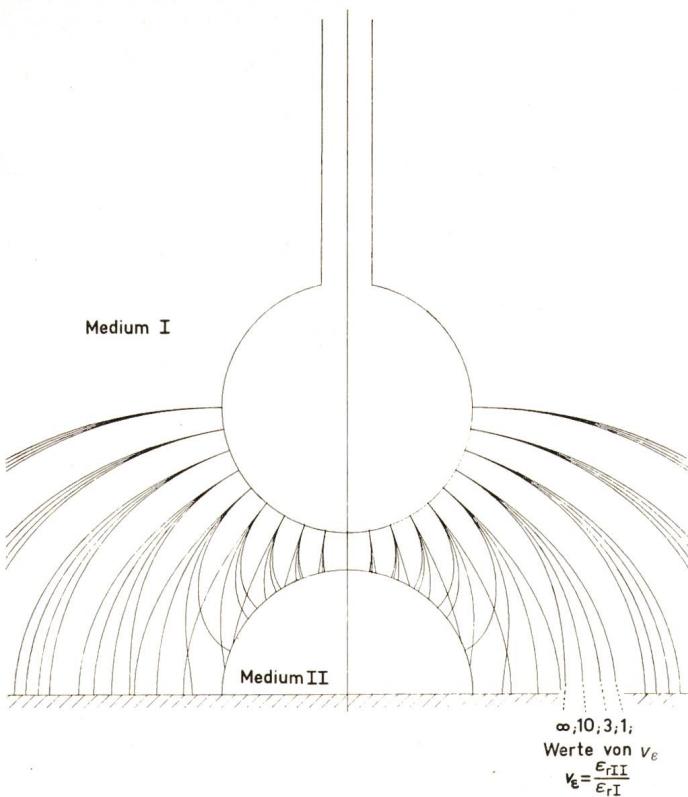


Fig. 4

Einfluss der relativen Dielektrizitätskonstanten des Mediums II auf den Verlauf der Feldlinien im Medium I

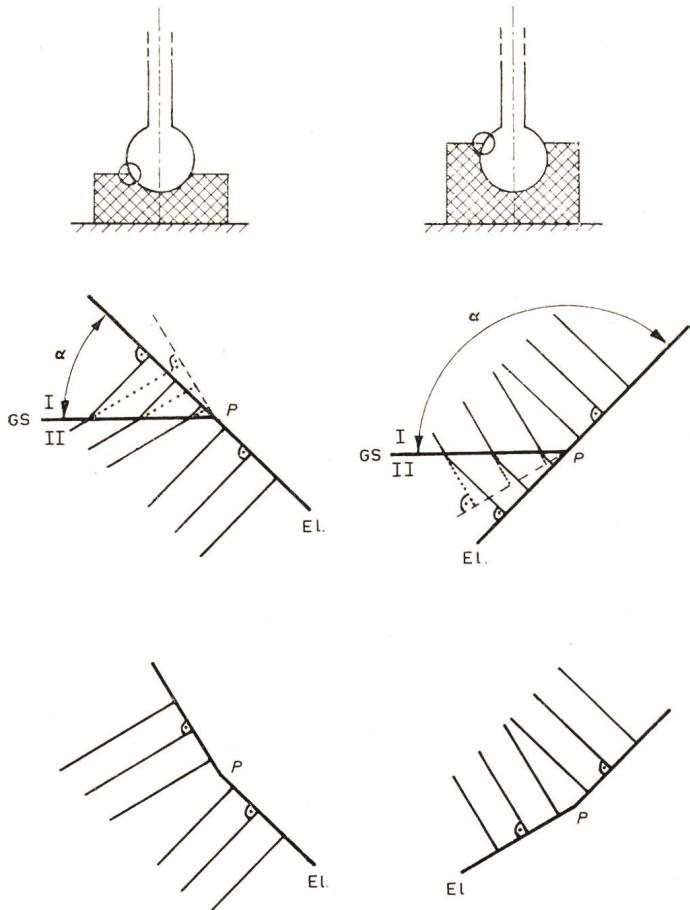


Fig. 5

«Einbettungseffekt»

El. Elektrode;

GS. dielektrische Grenzschicht zwischen den Medien I und II

( $\epsilon_{rII} > \epsilon_{rI}$ );

P kritischer Punkt

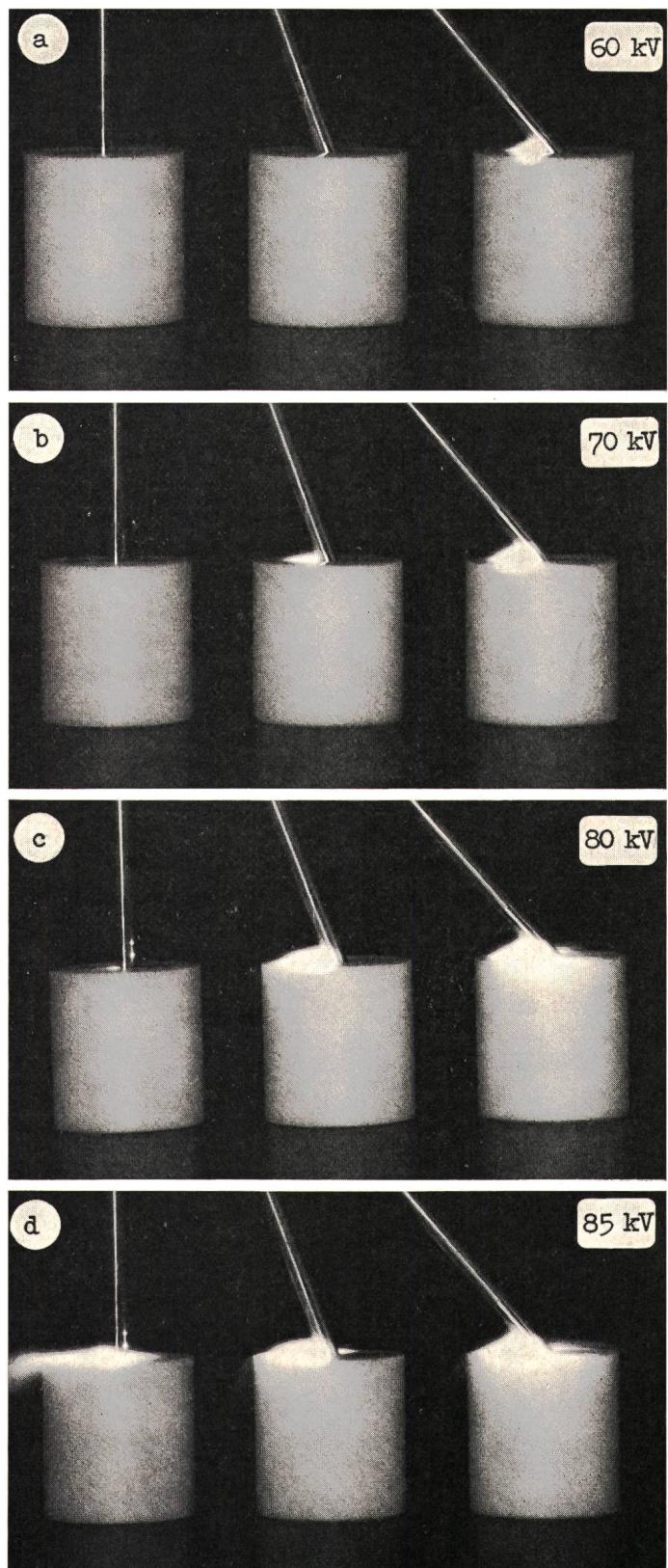


Fig. 6  
Exxperimentelle Verifizierung des Einbettungseffekts

sonders der Verlauf der Kurve für  $w = 0$ , d. h. bei punktförmiger Berührung von Elektrode und Medium II. Die gestrichelten Kurvenverläufe für  $w = 0$  und  $w = 0,1$  ergeben sich bei  $v_e < 1$ , wenn nicht der Maximalwert der Feldstärke, sondern nur die Feldstärke am Scheitel der Elektrode berücksichtigt wird.

### 3.2 Parallelschaltung zweier Dielektrika

Rechnerische Untersuchungen an Abstützungen koaxialer Rohre zeigen, dass auch bei inhomogenen Feldern Grenzschichtkonturen mit praktisch konstanter Tangentialfeldstärke und damit dem Wert 1 für den Überschlagungsausnutzungsfaktor analog Gl. (1) möglich sind.

Weitere Untersuchungen mit Hilfe des erläuterten Rechenverfahrens erbringen dank der guten Möglichkeiten für eine Kontrolle der erzielten Rechengenauigkeit einen grundsätzlichen feldtheoretischen Effekt bei Parallelschaltung zweier Dielektrika, der im folgenden durch qualitative Überlegungen erläutert werden soll.

Fig. 5 zeigt zwei Anordnungen mit Elektroden, die in ein Dielektrikum eingebettet sind, weshalb der Begriff «Einbettungseffekt» geprägt wurde. Bei den zugeordneten vereinfachten Feldlinienbildern wurde die unmittelbare Umgebung des Punktes  $P$ , in dem sich Elektrode und Grenzschicht berühren, einer extremen Vergrößerung unterzogen. Dabei sind die Fälle  $\alpha < 90^\circ$  (links) und  $\alpha > 90^\circ$  (rechts) dargestellt. Die linke Seite zeigt, dass die im Medium I von der Elektrode ausgehenden Feldlinien durch die dielektrische Grenzschicht so gebrochen werden, dass ihr Verlauf im Medium II der gleiche ist, als gingen sie von einer im Punkt  $P$  geknickten (gestrichelt eingezeichneten) Elektrode aus und würden dabei durch keine Grenzschicht gebrochen. Damit entspricht das Verhalten der Feldlinien in unmittelbarer Umgebung des Punktes  $P$  dem bei einer in  $P$  geknickten Elektrode mit einer in  $P$  gegen Unendlich gehenden Feldstärke. Im Falle  $\alpha < 90^\circ$  tritt also in  $P$  eine fiktive Kante auf. Eine analoge Ableitung für  $\alpha > 90^\circ$  liefert eine fiktive eingezogene Ecke in  $P$  mit dem Wert Null für die Feldstärke (rechte Seite in Fig. 5). Wenn dagegen Elektrode und Grenzschicht aufeinander stehen ( $\alpha = 90^\circ$ ) ergibt sich für die Feldstärke in  $P$  ein endlicher, von Null verschiedener Wert.

Für die praktische Konstruktion von Hochspannungsgeräten ergibt sich aus dem «Einbettungseffekt» die einfache Folgerung, einen Winkel  $\alpha < 90^\circ$  wie bei der linken Seite von

Fig. 5 in jedem Fall zu vermeiden und möglichst über den vom Einbettungseffekt nicht betroffenen Wert von  $90^\circ$  für  $\alpha$  hinauszugehen, wodurch sich entsprechend der rechten Seite von Fig. 5 eine gute Feldentlastung in der Umgebung des für Gleitentladungen kritischen Punktes  $P$  ergibt.

Die praktische Bedeutung des «Einbettungseffekts» zeigt seine experimentelle Verifizierung in Fig. 6 am Beispiel dreier, jeweils an gleicher Spannung liegender Isolierstoffproben. Deutlich ist dabei erkennbar, wie bei einer von a) bis d) gesteigerten Spannung der Einbettungswinkel  $\alpha$  das Entladungsverhalten bestimmt.

### 4. Zusammenfassung

Eine Anwendung des Ladungsverfahrens auf Reihen- und Parallelschaltungen zweier Dielektrika liefert grundsätzliche Erkenntnisse feldtheoretischer Art. Ein Beweis für die Zuverlässigkeit des Verfahrens liegt im «Einbettungseffekt», dessen Erkennung auf dieses numerische Verfahren zurückgeht. Darüber hinaus ist das Verfahren auch für Berechnungen an Anordnungen aus der Praxis gut geeignet [9].

Der Verfasser dankt dem Leibniz-Rechenzentrum der Bayerischen Akademie der Wissenschaften für die im Rahmen der numerischen Untersuchungen zur Verfügung gestellte umfangreiche Rechenzeit.

### Literatur

- [1] J. C. Maxwell: A treatise on electricity and magnetism. Vol. I. London, Clarendon Press, 1873.
- [2] A. Schwaiger: Elektrische Festigkeitslehre. 2. Auflage, Berlin, Springer Verlag, 1925.
- [3] F. Ollendorf: Potentialfelder der Elektrotechnik. Berlin, Springer Verlag, 1932.
- [4] A. Roth: Hochspannungstechnik. 4. Auflage, Wien, Springer Verlag, 1959.
- [5] R. Becker und F. Sauter: Theorie der Elektrizität. Bd. 1: Einführung in die Maxwell'sche Theorie — Elektronentheorie — Relativitätstheorie. 19. Auflage. Stuttgart, Teubner Verlag, 1969.
- [6] H. Steinbigler: Anfangsfeldstärken und Ausnutzungsfaktoren rotationsymmetrischer Elektrodenanordnungen in Luft. Dissertation der Technischen Hochschule München, 1969.
- [7] H. Steinbigler: Digitale Berechnung elektrischer Felder. ETZ-A 90(1969)25, S. 663...666.
- [8] P. Weiss: Berechnung von Zweistoffdielektrika. ETZ-A 90(1969)25, S. 693...694.
- [9] J. Möller, H. Steinbigler und P. Weiss: Feldstärkeverlauf auf Abschirmelektroden für ultrahohe Wechselspannung. Bull. SEV 63(1972)11, S. 574...578.

### Adresse des Autors:

Dipl.-Ing. Paul Weiss, Wissenschaftlicher Mitarbeiter des Institutes für Hochspannungs- und Anlagentechnik der TU München, Arcisstrasse 21, D-8 München 2.