

Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins
Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke
Band: 63 (1972)
Heft: 3

Artikel: Die Parallelschaltung vierstrahliger Sterne als Filter
Autor: Herzog, W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-915657>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 03.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN

DES SCHWEIZERISCHEN ELEKTROTECHNISCHEN VEREINS

Gemeinsames Publikationsorgan des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins (SEV)
und des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätswerke (VSE)

Die Parallelschaltung vierstrahliger Sterne als Filter ¹⁾

Von W. Herzog, Mainz

621.316.5.062.1

Die Addition der Leitwertmatrizen ist bei Parallelschaltung vierstrahliger Sterne nicht gestattet. Die richtigen Formeln für die Parallelschaltung von zwei und drei vierstrahligen Sternen werden angegeben. Als Beispiel wird gezeigt, wie zwei parallelgeschaltete vierstrahlige Sterne eine Bandsperre und ein Bandfilter ergeben.

L'addition de matrices de conductances n'est pas permise dans le cas d'un couplage en parallèle d'étoiles à quatre branches. Les formules correctes sont indiquées pour le couplage en parallèle de deux et de trois étoiles à quatre branches. A titre d'exemple, il est montré comment deux étoiles à quatre branches, couplées en parallèle, constituent un filtre coupe-bande et un filtre passe-bande.

1. Der vierstrahlige Stern

In Fig. 1 ist ein allgemeiner vierstrahliger Stern abgebildet [1]²⁾. Man entnimmt derselben die beidseitigen Leerlaufwiderstände W_1 :

$$W_{11} = R_{10} + R_{20} \quad W_{21} = R_{30} + R_{40} \quad (1)$$

und die beiden Kurzschlusswiderstände W_k :

$$W_{1k} = R_{10} + R_{20} \quad W_{2k} = R_{30} + R_{40} \quad (2)$$

Nach der für den Kernwiderstand M jeden Vierpols gelten den Formel

$$M^2 = W_{11}(W_{21} - W_{2k}) = W_{21}(W_{11} - W_{1k}) \quad (3)$$

folgt

$$M = 0 \quad (4)$$

Es findet also vor- und rückwärts keine Übertragung statt. Anders ausgedrückt, es findet keine Kopplung zwischen Ein- und Ausgang statt.

Die Widerstandsmatrix des vierstrahligen Sterns lautet demnach:

$$W = \begin{pmatrix} R_{10} + R_{20} & 0 \\ 0 & R_{30} + R_{40} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Wandelt man die Widerstandsmatrix in die Leiterwertmatrix Y um, so ist:

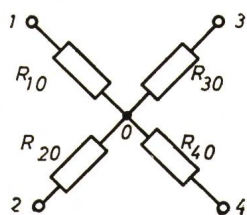


Fig. 1
Vierstrahliger Stern

¹⁾ Mitteilung des Institutes für Elektrotechnik der Universität Mainz.

²⁾ Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_{10} + R_{20}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_{30} + R_{40}} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Schaltet man zwei vierstrahlige Sterne mit den Sternpunkten 0 und 0' parallel (Fig. 2), so ergibt die Addition der Leitwertmatrizen, dass die Kernleitwerte bzw. die Kernwiderstände

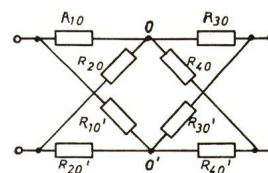


Fig. 2
Parallelschaltung zweier vierstrahliger Sterne

der resultierenden Matrix ebenfalls gleich Null sind. Betrachtet man Fig. 2 auf andere Weise, so findet man, dass die Schaltung auch als Kettenschaltung von zwei Brücken aufgefasst werden kann. Eine solche Kettenschaltung hat aber einen im allgemeinen von Null verschiedenen Kernleitwert bzw. Kernwiderstand. Voraussetzung ist hierfür, dass zwischen den Sternpunkten 0 und 0' (Fig. 2) ein Spannungsunterschied besteht. Man kann der Schaltung eine innere Kopplung zuordnen. Dieselbe macht sich bei Anwendung der Parallelschaltungsformel nicht geltend. Die Addition der Leitwertmatrizen ist demnach für vierstrahlige Sterne nicht gestattet.

2. Die Parallelschaltung zweier vierstrahliger Sterne

Aus Fig. 2 seien die Leerlauf- und Kurzschlusswiderstände berechnet. Man erhält in beiden Fällen eine vollständige Brücke, wie in Fig. 3 dargestellt. Für den Leerlaufwiderstand W_{11} gilt:

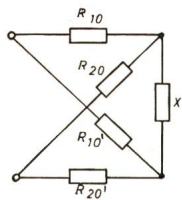


Fig. 3
Brücke zur Berechnung der Leerlauf- und Kurzschlusswiderstände

$$X = X_1 = (R_{30} + R'_{30}) \parallel (R_{40} + R'_{40}) \quad (7)$$

wobei das Zeichen \parallel die Parallelschaltung wiedergibt.

Beim Kurzschlusswiderstand W_{1k} ist:

$$X = X_k = R_{30} \parallel R_{40} + R'_{30} \parallel R'_{40} \quad (8)$$

Für die Schaltung in Fig. 3 lautet die Formel:

$$W = \frac{R_{10} R'_{10} (R_{20} + R'_{20}) + R_{20} R'_{20} (R_{10} + R'_{10}) + X (R_{10} + R_{20}) (R'_{10} + R'_{20})}{(R_{10} + R'_{10}) (R_{20} + R'_{20}) + X (R_{10} + R'_{10} + R_{20} + R'_{20})} \quad (9)$$

Entsprechend einer Brücke mit drei oder vier verschiedenen Elementen, lässt sich die allgemeine Anordnung in Fig. 2 als Filter benutzen. Zur besseren Übersicht seien hier vereinfachte symmetrische Anordnungen benutzt. Die Grösse M soll jedoch für die allgemeine Anordnung berechnet werden. Die Behandlung mit den Gl. (3), (7), (8) und (9) ist jedoch sehr umständlich. Es seien daher die Formeln für die Kettenschaltung zweier unsymmetrischer Vierpole (Fig. 4) angegeben:

$$\begin{aligned} \underline{W}_{11} &= \frac{W_{11} W'_{11} + |W|}{W_{21} + W'_{11}} & \underline{M} &= \frac{M M'}{W_{21} + W'_{11}} & \underline{W}_{21} &= \frac{W_{21} W'_{21} + |W'|}{W_{21} + W'_{11}} \\ |W| &= \frac{W_{11} |W'| + W'_{21} |W|}{W_{21} + W'_{11}} & & & & \\ |W| &= W_{11} W_{21} - M^2 & |W'| &= W'_{11} W'_{21} - M'^2 & & \end{aligned} \quad (10)$$

Fig. 2 entnimmt man für M und M'

$$\begin{aligned} M &= \frac{R_{20} R'_{10} - R_{10} R'_{20}}{R_{10} + R_{20} + R'_{10} + R'_{20}} \\ M' &= \frac{R_{40} R'_{30} - R_{30} R'_{40}}{R_{30} + R_{40} + R'_{30} + R'_{40}} \end{aligned} \quad (11)$$

und für W_{21} und W'_{11} :

$$\begin{aligned} W_{21} &= (R_{10} + R'_{10}) \parallel (R_{20} + R'_{20}) \\ W'_{11} &= (R_{30} + R'_{30}) \parallel (R_{40} + R'_{40}) \end{aligned} \quad (12)$$

Die Gl. (10), (11) und (12) ergeben als Bedingung für das Verschwinden des Kernwiderstandes \underline{M} der Schaltung in Fig. 2:

$$(R_{20} R'_{10} - R_{10} R'_{20}) (R_{40} R'_{30} - R_{30} R'_{40}) = 0 \quad (13)$$

Ist eine der beiden Brücken abgestimmt, so ist nach Gl. (13) der resultierende Kernwiderstand \underline{M} gleich Null. Fig. 2 zeigt, dass hierfür kein Spannungsunterschied zwischen den Sternpunkten 0 und 0' besteht. Vermeidet man diesen Sonderfall, so lässt sich die Parallelschaltung von vierstrahligen Sternen als Filter verwenden.

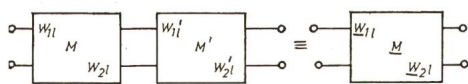


Fig. 4
Zwei unsymmetrische Vierpole in Kette

3. Symmetrischer Vierpol aus zwei parallelgeschalteten Sternen

Für die in Fig. 5a gezeigte Schaltung gilt:

$$\begin{aligned} W_{11} &= W'_{21} & W_{21} &= W'_{11} \\ M &= M' & |W| &= |W'| \end{aligned} \quad (14)$$

und mit den Gl. (10):

$$\begin{aligned} \underline{W}_{11} &= \frac{W_{11} W_{21} + |W|}{2 W_{21}} \\ \underline{M} &= \frac{M^2}{2 W_{21}} \\ \underline{W}_{21} &= W_{11} \end{aligned} \quad (15)$$

$$|W| = \frac{W_{11}}{W_{21}} |W|$$

Die Formeln vereinfachen sich, wenn man zur Brückenanordnung in Fig. 5b übergeht. Es ist:

$$\begin{aligned} X_k &= \underline{W}_{11} - \underline{M} = \frac{|W|}{W_{21}} \\ X_1 &= \underline{W}_{11} + \underline{M} = W_{11} \end{aligned} \quad (16)$$

Hierfür liefert der linke Vierpol in Fig. 5a:

$$X_k = \frac{X_1 X_3 (X_2 + X_4) + X_2 X_4 (X_1 + X_3)}{(X_1 + X_3) (X_2 + X_4)} = X_1 \parallel X_3 + X_2 \parallel X_4 \quad (17)$$

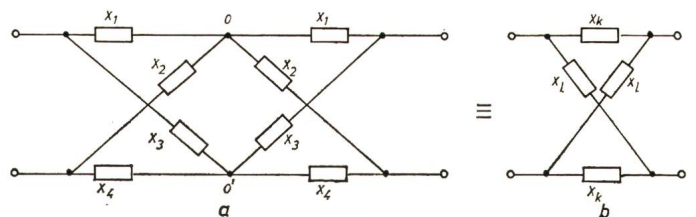


Fig. 5
Symmetrischer Vierpol aus zwei parallelgeschalteten vierstrahligen Sternen und Ersatzbrücke

$$X_1 = \frac{(X_1 + X_2) (X_3 + X_4)}{X_1 + X_2 + X_3 + X_4} = (X_1 + X_2) \parallel (X_3 + X_4) \quad (18)$$

Das in den Gl. (17) und (18) erhaltene Ergebnis lässt sich aus Fig. 5a nach dem Satz von Bartlett direkt entnehmen. Zur Absicherung wurde die Berechnung in direkter Weise durchgeführt.

4. Symmetrischer Vierpol aus drei parallelgeschalteten Sternen

Das Ergebnis der direkten Berechnung für drei parallelgeschaltete Sterne zeigt, dass auch hier der Satz von Bartlett anwendbar ist.

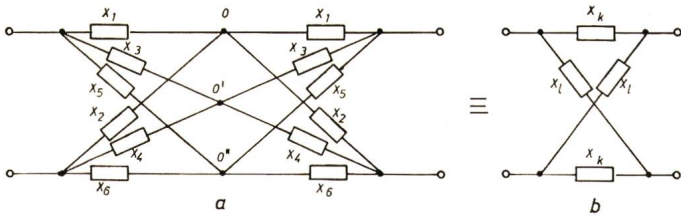


Fig. 6

Symmetrischer Vierpol aus drei parallelgeschalteten vierstrahligen Sternen und Ersatzbrücke

Nach Bartlett entnimmt man Fig. 6a für den Kurzschlussbrückenweig

$$X_k = X_1 \parallel X_3 \parallel X_5 + X_2 \parallel X_4 \parallel X_6 \quad (19)$$

und für den Leerlaufbrückenweig:

$$X_1 = (X_1 + X_2) \parallel (X_3 + X_4) \parallel (X_5 + X_6) \quad (20)$$

Die in den Gl. (19) und (20) wiedergegebenen Formeln, bei denen jedes Element in beiden Brückenweigen vorkommt — also Mehrfachausnutzung vorliegt, sind auf keine andere Weise erzielbar. Daher sind Filter mit besonderen Eigenschaften zu erwarten, die allerdings auch Bedingungen zu erfüllen haben. Man sieht, dass die Zweige X_1, X_3 und X_5 möglichst voneinander verschiedene Elemente erhalten müssen, ebenso die Zweige X_2, X_4 und X_6 . Nach Gl. (20) müssen auch die Zweige X_1 und X_2 voneinander verschieden sein, ebenso X_3, X_4 und X_5, X_6 .

5. Eine Bandsperre aus zwei parallelgeschalteten Sternen

Zur besseren Übersichtlichkeit sei ein Beispiel zu der Anordnung in Fig. 5 gegeben. Diese Anordnung lässt sich natürlich auch als Kettenschaltung zweier zueinander spiegelbildlich aufgebauter Brücken berechnen. Eine solche Brücke weist eine erhöhte Ausnutzung der Elemente auf [2].

Die gewählte Anordnung zeigt Fig. 7. Für die Zweige gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned} X_1 &= \omega L_1 \\ X_2 &= -\frac{1}{\omega C_2} \\ X_3 &= -\frac{1}{\omega C_3} \\ X_4 &= \omega L_4 \end{aligned} \quad (21)$$

Entsprechend Fig. 5b ergeben sich die in Fig. 8 gezeigten dazugehörigen Brückenweige. Die dazugehörigen Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} X_k &= -\frac{C_2 + C_3}{\omega C_2 C_3} \cdot \frac{\omega^2 (\omega^2 - \omega_{1s}^2)}{(\omega^2 - \omega_{1p}^2) (\omega^2 - \omega_{3p}^2)} \\ X_1 &= \frac{\omega L_1 L_4}{L_1 + L_4} \cdot \frac{(\omega^2 - \omega_{2s}^2) (\omega^2 - \omega_{4s}^2)}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_{2p}^2)} \end{aligned} \quad (22)$$

mit den Resonanzfrequenzen:

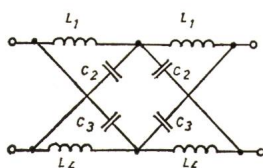


Fig. 7

Zwei parallelgeschaltete Sterne mit Spulen und Kondensatoren

$$\begin{aligned} \omega_{1s}^2 &= \frac{L_1 + L_4}{L_1 L_4 (C_2 + C_3)} \\ \omega_{1p}^2 &= \frac{1}{L_1 C_3} \\ \omega_{3p}^2 &= \frac{1}{L_4 C_2} \\ \omega_{2s}^2 &= \frac{1}{L_1 C_2} \\ \omega_{4s}^2 &= \frac{1}{L_4 C_3} \\ \omega_{2p}^2 &= \frac{C_2 + C_3}{C_2 C_3 (L_1 + L_4)} \end{aligned} \quad (23)$$

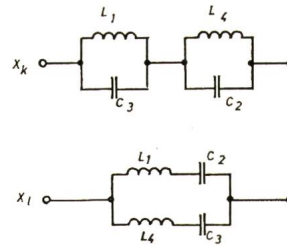


Fig. 8
Brückenweige der Anordnung in Fig. 7

Der Reaktanzverlauf der Brückenweige ist in Fig. 9 wiedergegeben. Nun kann man die Resonanzfrequenzen in geeigneter Weise einander zurechnen. Man benötigt vier Gleichungen für die vier Schaltelemente. Eine Gleichung ist für die Einführung der Abschlusswiderstände mit der Beziehung

$$X_k X_1 = -R^2 \quad (24)$$

vergeben, so dass nur noch drei Festlegungen möglich sind. Achtet man nicht darauf und legt in üblicher Weise die Grenzen und die Pole fest, so erhält man zuviel Gleichungen, wobei zwischen diesen Bedingungen entstehen, die erfüllbar sein können.

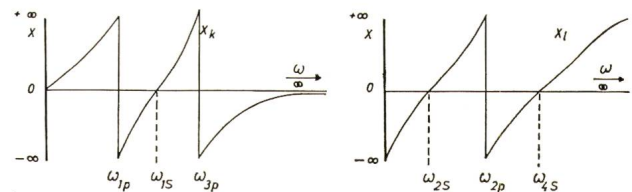


Fig. 9

Reaktanzverlauf der Brückenweige in Fig. 8

Es ist naheliegend, die Parallelresonanzfrequenzen mit den Serienresonanzfrequenzen zusammenfallen zu lassen, um ein Phasendrehglied zu erhalten. Man sieht nach kurzer Rechnung, dass die Beziehung $\omega_{2p} = \omega_{1s}$ die parallelgeschalteten Serienkreise in Fig. 8 zu einem einzigen Serienkreis zusammenschmelzen lässt. Damit wäre eine Bandsperre möglich, die allerdings nicht gut sein kann. Geht man von der Beziehung

$$\omega_{2p} \neq \omega_{1s} \quad (25)$$

aus, so könnte man die übrigen Resonanzstellen zusammenfallen lassen:

$$\begin{aligned} \omega_{1p} &= \omega_{2s} \\ \omega_{3p} &= \omega_{4s} \end{aligned} \quad (26)$$

und eine Bandsperre wäre möglich.

Die Beziehungen (26) und (23) ergeben

$$C_3 = C_2 \quad (27)$$

Aus den Gl. (23) und (27) folgt:

$$\frac{\omega_{1s}^2}{\omega_{2p}^2} = \frac{(L_1 + L_4)^2}{4 L_1 L_4} \quad (28)$$

und damit

$$\begin{aligned} \omega_{1s} &> \omega_{2p} \\ L_1 &\neq L_4 \end{aligned} \quad (29)$$

Dadurch ist ein Reaktanzverlauf nach Fig. 10 möglich, also eine Bandsperre. Der eingezeichnete Dämpfungspol sei später behandelt.

Die Grenzen der Bandsperre seien ω_1 und ω_2 , so dass die drei Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} C_3 &= C_2 \\ \omega_{1s}^2 &= \frac{L_1 + L_4}{2 L_1 L_4 C_2} = \omega_2^2 \\ \omega_{2p}^2 &= \frac{2}{(L_1 + L_4) C_2} = \omega_1^2 \end{aligned} \quad (30)$$

Die Gleichungen für die Brückenarme ändern sich in

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{2}{\omega C_2} \cdot \frac{\omega^2 (\omega^2 - \omega_2^2)}{(\omega^2 - \omega_{1p}^2) (\omega^2 - \omega_{3p}^2)} \\ X_k &= \frac{\omega L_1 L_4}{L_1 + L_4} \cdot \frac{(\omega^2 - \omega_{1p}^2) (\omega^2 - \omega_{3p}^2)}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_1^2)} \end{aligned} \quad (31)$$

so dass gemäss Formel (24):

$$\frac{2 L_1 L_4}{(L_1 + L_4) C_2} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_2^2}{\omega^2 - \omega_1^2} = R^2 \quad (32)$$

Dabei gehört zu jedem beliebigen ω -Wert ausserhalb des Sperrbereiches ein bestimmter R -Wert. Zur Vereinfachung sei derselbe nach $\omega = \infty$ gelegt:

$$\frac{2 L_1 L_4}{(L_1 + L_4) C_2} = R_0^2 \quad (33)$$

$$K = \frac{2 \omega_2 (\omega_2^2 - \omega_1^2) \omega \left[\omega^2 - \omega_2^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}} \right) \right] \left[\omega^2 - \omega_2^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}} \right) \right]}{(\omega^4 - \omega_1^2 \omega_2^2)^2} \quad (41)$$

Nun lassen sich die Schaltelemente berechnen. Aus den Gl. (30) (für ω_{1s}) und (33) folgt durch Multiplikation:

$$C_2 = \frac{1}{R_0 \omega_2} \quad (34)$$

und durch Einsetzen von Gl. (34)

$$\begin{aligned} L_1 + L_4 &= \frac{2 R_0 \omega_2}{\omega_1^2} \\ \sqrt{L_1 L_4} &= \frac{R_0}{\omega_1} \end{aligned} \quad (35)$$

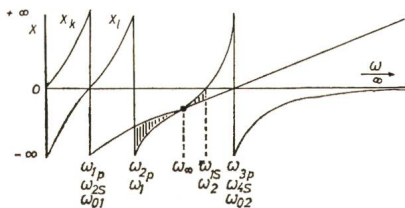


Fig. 10

Zusammenfassung der Reaktanzen in Fig. 8 zu einer Bandsperre

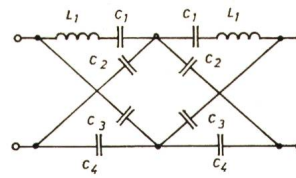


Fig. 11
Zwei parallelgeschaltete Sterne mit einem Serienschaltkreis und Kondensatoren

mit den Lösungen:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{R_0 \omega_2}{\omega_1^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}} \right) \\ L_4 &= \frac{R_0 \omega_2}{\omega_1^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

Die Gl. (23) zeigen, dass die Vorzeichenzuordnung richtig ist ($L_1 > L_4$). Die Beziehungen (26) legen bekanntlich Nullstellen fest

$$\omega_{01} = \omega_{1p} = \omega_{2s} \quad \omega_{02} = \omega_{3p} = \omega_{4s} \quad (37)$$

so dass die Brückenreaktanzen jetzt in folgender Form dargestellt werden können:

$$\begin{aligned} \frac{X_k}{R_0} &= -\frac{2 \omega_2 \omega (\omega^2 - \omega_2^2)}{(\omega^2 - \omega_{01}^2) (\omega^2 - \omega_{02}^2)} \\ \frac{X_1}{R_0} &= \frac{(\omega^2 - \omega_{01}^2) (\omega^2 - \omega_{02}^2)}{2 \omega_2 \omega (\omega^2 - \omega_1^2)} \end{aligned} \quad (38)$$

Für die charakteristische Grösse K , die mit der Betriebsdämpfung a in folgender Weise zusammenhängt,

$$e^{2a} = 1 + K^2 \quad (39)$$

gilt:

$$K = \frac{\frac{X_k X_1}{R_0^2} + 1}{\frac{X_1}{R_0} - \frac{X_k}{R_0}} \quad (40)$$

Das Einsetzen der Gl. (38) in die Formel (40) ergibt:

Die Bandsperre hat zwei Nullstellen

$$\begin{aligned} \omega_{01}^2 &= \omega_2^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}} \right) \\ \omega_{02}^2 &= \omega_2^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

und eine doppelte Polstelle ω_∞ in der geometrischen Mitte des Sperrbereiches:

$$\omega_\infty^2 = \omega_1 \omega_2 \quad (43)$$

Bei Bandsperren sind oft zwei und mehr Polstellen erwünscht. Unter Verzicht auf die Nullstellen kann man mit der angegebenen Schaltung zwei Pole erzielen. Verschiebt man X_1 in Fig. 10 nach links unter Festhaltung von X_k , so werden zwei Schnittpunkte und damit zwei Pole aus dem Tangentenpunkt ω_∞ . Dabei entstehen schwache Dämpfungen bei den nunmehr nicht zusammenfallenden Stellen $\omega_{1p} = \omega_{2s}$ und $\omega_{3p} = \omega_{4s}$. Auf die Durchrechnung sei hier verzichtet.

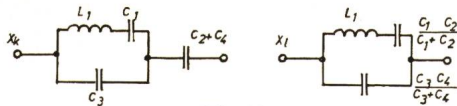


Fig. 12
Brückenzeige der Anordnung in Fig. 11

6. Ein Bandfilter aus zwei parallelschalteten Sternen

Eine Erhöhung der Anzahl der Elemente in einem oder mehreren Zweigen bietet viele Möglichkeiten. Hierbei wäre auch zu überprüfen, ob anstatt einer solchen Erhöhung das Parallelschalten eines weiteren Sternes zu empfehlen ist. Da in dem vorliegenden Aufsatz nur die Absicht vorliegt, die Berechnungsart zu veranschaulichen, sei die in Fig. 11 gezeigte einfache Schaltung gewählt. Mit einer Induktivität im vierten Zweig lässt sich natürlich mehr herausholen.

Die nach Bartlett entstehenden Brückenzeige sind in Fig. 12 dargestellt. Durch eine bekannte Umwandlung wird X_k in die äquivalente Schaltung von Fig. 13 übergeführt. Für die darin angegebenen Größen gilt:

$$L_1' = L_1 \left(1 + \frac{C_3}{C_2 + C_4} \right)^2$$

$$C_1' = \frac{C_1}{\left(1 + \frac{C_3}{C_2 + C_4} \right)^2 \left(1 + \frac{C_1}{C_3 + C_2 + C_4} \right)} \quad (44)$$

$$C_3' = \frac{C_3(C_2 + C_4)}{C_3 + C_2 + C_4}$$

Damit entstehen die Reaktanzbilder gemäss Fig. 14 mit den Reaktanzen:

$$X_k = - \frac{C_3 + C_2 + C_4}{C_3(C_2 + C_4)\omega} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_{1s}^2}{\omega^2 - \omega_{1p}^2} \quad (45)$$

$$X_1 = - \frac{C_3 + C_4}{C_3 C_4 \omega} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_{2s}^2}{\omega^2 - \omega_{2p}^2}$$

Für die Resonanzfrequenzen entnimmt man den Fig. 12 bis 14:

$$\omega_{1s}^2 = \frac{1}{L_1 C_1} \left(1 + \frac{C_1}{C_3 + C_2 + C_4} \right) \quad (46)$$

$$\omega_{1p}^2 = \frac{1}{L_1 C_1} \left(1 + \frac{C_1}{C_3} \right)$$

$$\omega_{2s}^2 = \frac{1}{L_1 C_1} \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right) \quad (47)$$

$$\omega_{2p}^2 = \frac{1}{L_1 C_1} \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right) \left[1 + \frac{C_1 C_2 (C_3 + C_4)}{(C_1 + C_2) C_3 C_4} \right]$$

Kann man eine Serienresonanzstelle mit einer Parallelresonanzstelle zusammenfallen lassen, so entsteht ein Bandfilter. Die Überprüfung der Gl. (46) und (47) zeigt, dass

$$\omega_{1p} = \omega_{2s} \quad (48)$$

möglich ist und zwar für:

$$C_3 = C_2 \quad (49)$$

Mit den Grenzen

$$\omega_{1s} = \omega_1 \quad \text{und} \quad \omega_{2p} = \omega_2 \quad (50)$$

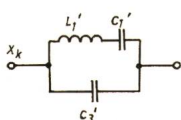


Fig. 13
Umwandlung des Zweiges X_k

entsteht die Filteranordnung in Fig. 15, die ein Bandfilter wiedergibt. Gegeben seien die Frequenzen ω_1 , ω_2 und $\omega_{2s} = \omega_a$. Anstelle von ω_{2s} könnte man auch einen Pol vorgeben, doch ist die Rechnung mit ω_{2s} einfacher. Damit spaltet sich Gl. (48) auf in:

$$\omega_{1p} = \omega_a \quad \text{und} \quad \omega_{2s} = \omega_a \quad (51)$$

Mit den Gl. (49), (50) und (51) wird aus den Blindwiderständen in Gl. (45):

$$X_k = - \frac{2 C_2 + C_4}{C_2 (C_2 + C_4) \omega} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega^2 - \omega_a^2}$$

$$X_1 = - \frac{C_2 + C_4}{C_2 C_4 \omega} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_a^2}{\omega^2 - \omega_2^2} \quad (52)$$

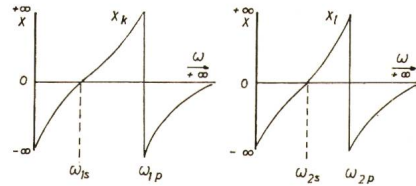


Fig. 14
Reaktanzverlauf der Brückenzeige in Fig. 12

Das negative Produkt von X_k und X_1

$$- X_k X_1 = \frac{2 C_2 + C_4}{C_2^2 C_4 \omega^2} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega^2} \quad (53)$$

wird bei der Frequenz

$$\omega^2 = \omega_1 \omega_2 \quad (54)$$

dem Widerstand R_0 angepasst und liefert als fünfte Gleichung:

$$\frac{2 C_2 + C_4}{C_2^2 C_4} = R_0^2 \omega_2^2 \quad (55)$$

Wandelt man ω_{1s}^2 in Formel (46) um in

$$\omega_{1s}^2 = \frac{1}{L_1 C_1} \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right) \left[1 - \frac{C_1 (C_2 + C_4)}{(2 C_2 + C_4) (C_1 + C_2)} \right] = \omega_1^2 \quad (56)$$

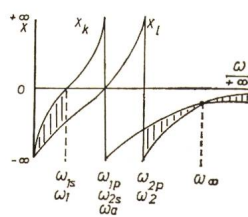


Fig. 15
Zusammenfassung der Reaktanzen in Fig. 14
zu einem Bandfilter

so lassen sich alle Frequenzformeln auf ω_a^2 beziehen:

$$\omega_{1s}^2 = \omega_a^2 \left[1 - \frac{C_1 (C_2 + C_4)}{(2 C_2 + C_4) (C_1 + C_2)} \right] = \omega_1^2 \quad (57)$$

$$\omega_{1p}^2 = \omega_{2s}^2 = \omega_a^2 = \frac{1}{L_1 C_1} \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right) \quad (58)$$

$$\omega_{2p}^2 = \omega_a^2 \left(1 + \frac{C_1 (C_2 + C_4)}{(C_1 + C_2) C_4} \right) = \omega_2^2 \quad (59)$$

Eliminiert man $C_1/C_1 + C_2$ aus den Gl. (57) und (59), so folgt:

$$C_4(\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\omega_a^2) = 2C_2(\omega_a^2 - \omega_1^2) \quad (60)$$

und mit den Gl. (55), (59) und (58):

$$C_2 = \frac{1}{R_0 \omega_2} \sqrt{\frac{\omega_2^2 - \omega_a^2}{\omega_a^2 - \omega_1^2}} \quad (61)$$

$$C_4 = \frac{2}{R_0 \omega_2} \cdot \frac{\sqrt{(\omega_2^2 - \omega_a^2)(\omega_a^2 - \omega_1^2)}}{\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\omega_a^2} \quad (62)$$

$$C_1 = \frac{2}{R_0 \omega_2 \omega_1^2} \sqrt{(\omega_2^2 - \omega_a^2)(\omega_a^2 - \omega_1^2)} \quad (63)$$

$$L_1 = \frac{R_0 \omega_2}{\omega_a^2} \cdot \frac{2\omega_a^2 - \omega_1^2}{2\sqrt{(\omega_2^2 - \omega_a^2)(\omega_a^2 - \omega_1^2)}} \quad (64)$$

Mit den Werten in Gl. (61) und (62) ändern sich die Formeln für die Brückenarme in Gl. (52):

$$\frac{X_k}{R_0} = - \frac{2\omega_2 \sqrt{(\omega_2^2 - \omega_a^2)(\omega_a^2 - \omega_1^2)}}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)\omega} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega^2 - \omega_a^2} \quad (65)$$

$$\frac{X_1}{R_0} = - \frac{\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)}{2\sqrt{(\omega_2^2 - \omega_a^2)(\omega_a^2 - \omega_1^2)}\omega} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_a^2}{\omega^2 - \omega_2^2}$$

Zur Vereinfachung sei eingeführt [3]:

$$\begin{aligned} \omega_2^2 &= \omega_0^2(1 + 2\delta') \\ \omega_1^2 &= \omega_0^2(1 - 2\delta') \\ \omega_0^2 &= \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \\ \omega_a^2 &= \omega_0^2(1 + 2\varepsilon') \\ \omega^2 &= \omega_0^2(1 + 2x') \end{aligned} \quad (66)$$

$$\delta' = \frac{\delta}{\omega_0} \quad x' = \frac{x}{\omega_0} \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\omega_0} \quad (67)$$

$$\frac{x}{\delta} = z \quad \frac{\varepsilon}{\delta} = p \quad (68)$$

Darin sind die gestrichelten Größen die auf ω_0 bezogenen Frequenzabstände.

Die Frequenzabstände werden in den Gl. (68) auf die halbe Bandbreite bezogen. Man erhält dann:

$$\frac{X_k}{R_0} = - \sqrt{1-p^2} \cdot \frac{z+1}{z-p} \quad \frac{X_1}{R_0} = - \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \cdot \frac{z-p}{z-1} \quad (69)$$

und mit Gl. (40) [3]:

$$K = - \frac{2\sqrt{1-p^2}}{p^2} \cdot \frac{z(z-p)}{\left(z - \frac{1}{p}\right)^2} \quad (70)$$

Die Dämpfung besitzt zwei Nullstellen

$$z_{01} = 0 \quad z_{02} = p \quad (71)$$

und eine doppelte Polstelle

$$z_\infty = \frac{1}{p} \quad (72)$$

Je nach Wahl von $p(\omega_a)$ lässt sich die Polstelle festlegen, anders ausgedrückt: man kann die Polstelle vorgeben und erhält dann die dazugehörige Grösse $\omega_a = \omega_{2s}$.

Eine normale Brücke benötigt 12 Elemente, während eine Sternschaltung 10 Elemente braucht. Vereinfachte Brücken (z. B. Differentialbrücken) kann man zum Vergleich nicht heranziehen. Die Einsparung von zwei Elementen hat zur Folge, dass nur eine Polstelle anstelle von zwei Polstellen möglich ist, was kein Nachteil zu sein braucht. Die Elemente sind in den Fig. 11 und 12 bzw. 13 verschieden, was einen Vor- oder Nachteil bedeuten kann. Jedenfalls sind auch in dieser Hinsicht verschiedene Filterarten zur Auswahl wichtig.

Literatur

- [1] W. Herzog: Zur Stern-Vieleck-Umwandlung. Bull. SEV 61(1970)2, S. 70...73.
- [2] W. Herzog: Symmetrische Vierpole. NTZ 14(1961)10, S. 502...511.
- [3] W. Herzog: Siebschaltungen mit Schwingkristallen. 2. Auflage. Braunschweig, Vieweg-Verlag, 1962.

Adresse des Autors:

Prof. Dr. Dr. W. Herzog, Direktor des Institutes für Elektrotechnik der Universität Mainz, Joh. Joachim Becher-Weg 21, D-6500 Mainz.