

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins  
**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke  
**Band:** 63 (1972)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Umlaufende Verformungswellen bei ringähnlichen Statorblechkörpern von Asynchronmaschinen  
**Autor:** Ploner, B.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-915650>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Umlaufende Verformungswellen bei ringähnlichen Statorblechkörpern von Asynchronmaschinen

Von B. Ploner, Birr

621.3.018.411:621.313.33

Am Umfang von Statorblechpaketen, die dem Modell eines freischwingenden Ringes einigermaßen entsprechen, entstehen infolge elektromagnetischer Luftspaltkräfte grundsätzlich umlaufende Verformungswellen. Unter gewissen Voraussetzungen können zwei gleichfrequente Wellen ungleicher Ordnungszahl gemeinsam das Schwingungsverhalten des Blechkörpers bestimmen und zu Störungen Anlass geben (magnetisches Geräusch).

Es werden einfache Beziehungen entwickelt, welche die Parameter solcher Wellen zu berechnen gestatten, wenn die Effektivwertverteilung der Summenschwingung am Jochumfang sowie die zeitliche Phasenverschiebung zu einem Bezugspunkt gemessen worden sind. Damit lassen sich in Störungsfällen die verantwortlichen Luftspaltkräfte gegebenenfalls detaillierter oder zuverlässiger als bisher durch Schwingungsmessungen aufdecken.

Au pourtour des paquets de tôle du stator, qui correspondent à peu près au modèle d'un anneau oscillant librement, des ondes de déformation tournantes se forment par suite de l'action de forces électromagnétiques de l'entrefer. Sous diverses conditions, deux ondes de même fréquence et de numéros d'ordre différents peuvent déterminer conjointement le comportement aux vibrations du corps de tôle et causer des perturbations (bruit magnétique).

On développe des relations simples, permettant de déterminer les paramètres de telles ondes, lorsque la répartition des valeurs effectives des oscillations totales au pourtour de l'empilage, ainsi que le décalage chronologique de phase à un point de référence ont été mesurés. Dans des cas de perturbations, on peut ainsi détailler les forces dues au champ d'entrefer, ou les déterminer d'une manière plus sûre qu'avec les mesures d'oscillations pratiquées jusqu'à présent.

## 1. Übersicht

Bekanntlich kann der Stator einer rotierenden Maschine unter dem Einfluss elektromagnetischer Kräfte im Luftspalt so stark schwingen, dass er unzulässig hohen Lärm verursacht. Für die Schallabstrahlung sind primär die radialen Verformungen des Statorblechkörpers massgebend. Entspricht dieser Aktivteil dem Modell eines homogenen freischwingenden Ringes, so wird die räumliche Verteilung der Verformungen längs seines Umfanges grundsätzlich durch die Kraftverteilung vorgeschrieben [1]<sup>1)</sup>. Vom untersuchungstechnischen Standpunkt aus gesehen ist diese Eigenschaft willkommen, weil man bei Kenntnis einer der beiden Verteilungen leichter auf die Parameter der anderen schliessen kann. Das Ringmodell findet man übrigens in mehreren Konstruktionen annähernd verwirklicht, so z. B. bei Maschinen mit selbsttragendem zylindrischen Statorblechpaket («Einschiebestator»), welches nur an seinen zwei Enden mit dem Gehäuse mechanisch verbunden ist [2].

In der vorliegenden Arbeit wird auf das besondere Schwingungsverhalten ringähnlicher Statorblechkörper näher eingegangen und ein Verfahren zur messtechnischen Erfassung desselben beschrieben.

## 2. Voraussetzungen

Die Radialverformungen werden durch radial gerichtete, räumlich sowie zeitlich periodische Kraftkomponenten angeregt. Es sind dies Drehkraftwellen von der Form:

$$z = Z \cos(r^* \varphi - 2\pi f^* t - \xi) \quad (1)$$

Darin bedeuten  $r^*$  die Ordnungszahl (Anzahl Wellenlängen am Umfang),  $f^*$  die Frequenz,  $\varphi$  die Umfangskoordinate,  $\xi$  einen Phasenwinkel und  $t$  die Zeit. Die Grössen  $r^*$  und  $f^*$  aller interessierenden Drehkraftwellen lassen sich in übersicht-

licher Form durch Ordnungszahlschemas ausweisen [1; 3] Ausschnitte solcher Schemata für einen Käfigläufer-Asynchronmotor in Einschiebebauart, der auch Gegenstand eingehender Untersuchungen war, zeigt Tabelle I und II.

In Tab. I sind die Ordnungszahlen  $r_G^*$  und Frequenzen  $f_G^*$  von Kraftwellen angegeben, die durch Interferenz zwischen Ständeroberfeldern und Restfeldern des Läufergrundstromes entstehen. Tab. II enthält dieselben Daten von Kraftwellen, die bei Vorhandensein einer statischen Rotorexzentrizität auftreten. In beiden Schemas wurden nur die Werte  $|r^*| \leq 12$  eingetragen, da nur kleine Ordnungszahlen merkliche Verformungen verursachen können. Alle Frequenzen  $f^*$  gelten für Leerlauf (Schlupf = 0) und sind der Netzfrequenz  $f_N$  proportional.

Aus den Tabellen geht unter anderem hervor, dass jeweils mehrere Drehkraftwellen unterschiedlicher Ordnungszahl und Umlaufrichtung (Vorzeichen von  $r^*$ ) dieselbe Frequenz haben. Beispielsweise ist den Ordnungszahlen  $r_E^* = -3, -5, +9, +7, \dots$  (Tab. II) die Frequenz  $f_E^* = -7300$  Hz gemeinsam (entspr.  $f_N = 50$  Hz). Nachdem die räumliche Verteilung der Verformung eines ringähnlichen Blechkörpers durch die Kraftverteilung vorgeschrieben wird<sup>2)</sup>, sind theoretisch ebenso viele ähnliche, gleichfrequente Verformungswellen denkbar, die ebenfalls umlaufen. Praktisch werden allerdings kaum mehr als zwei davon stärker hervortreten und das Schwingungsverhalten des Blechpaketes bei der betreffenden Frequenz bestimmen können. Diese Annahme sei wie folgt begründet:

Der als freischwingender Ring aufzufassende Blechkörper habe die mechanischen Biegeeigenfrequenzen  $f_2', f_3', \dots$  (Fig. 1) mit den zugeordneten Eigenformen  $r' = 2, 3, \dots$ . Ausserdem seien entsprechende gleichfrequente Kraftwellen der Ordnungszahlen  $r^* = 2, 3, \dots$  vorhanden. Variiert man nun die Kraftwellenfrequenz (durch Änderung von  $f_N$ ) im Bereich von beispielsweise  $f_2' \dots f_3'$ , so wird einmal die Eigenform  $r' = 2$ , das

<sup>1)</sup> Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

<sup>2)</sup> Der sog. Weh-Effekt macht davon eine Ausnahme [4].



Ordnungszahlen  $r_G^*$  und Frequenzen  $f_G^*$  der Drehkraftwellen eines 4-poligen 1400-kW-Asynchronmotors mit  $N_1 = 60$  Ständer- und  $N_2 = 74$  Läuferfalten, hervorgerufen durch Interferenz Ständeroberfelder — Restfelder des Läufergrundstromes

$$v_1 = p(6g_1 + 1) \text{ Ständeroberfelder; } g_1 = (0), \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$v_{2G} = g_2 N_2 + p \text{ Restf. d. Läufergrundstr.; } g_2 = (0), \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$r_G^* = v_{2G} \pm v_1$$

$$f_G^* = f_N \left[ \frac{g_2 N_2}{p} (1-s) \pm \frac{2}{0} \right] [\text{Hz}]$$

Tabelle I

		$f_N$		$v_1$		Nutharm.				
		$g_2$		$v_{2G}$						
14,2	50,0	$f_N$		$v_1$						
		$g_2$		$v_{2G}$						
$f_G^* (s=0)$		$g_2$		$v_{2G}$		$r_G^*$				
— 496	— 1750	— 1	— 72			— 24	+ 24	— 25	+ 25	— 26
— 524	— 1850					— 286	+ 290	— 298	+ 302	— 310
+ 553	+ 1950	+ 1	+ 76							
+ 524	+ 1850									
— 1021	— 3600	— 2	— 146							
— 1049	— 3700									
+ 1077	+ 3800	+ 2	+ 150							
+ 1049	+ 3700									
— 1545	— 5450	— 3	— 220							
— 1573	— 5550									
+ 1602	+ 5650	+ 3	+ 224							
+ 1573	+ 5550									
— 2070	— 7300	— 4	— 294			Summe	— 4		+ 8	
— 2098	— 7400					Diff.	— 8	+ 4		
+ 2126	+ 7500	+ 4	+ 298			Summe	+ 12	+ 0		— 12
+ 2098	+ 7400					Diff.	+ 8	— 4		

$p$  Polpaarzahl  
 $f_N$  Netzfrequenz ( $f_N = 14,2$  Hz siehe Abschnitt 6)  
 $s$  Schlupf

Nutharmonische, wenn  $g_1/q_1 = \pm 1, \pm 2, \dots$

$$q_1 = \frac{N_1}{3 \cdot 2p} \text{ Nutenzahl pro Pol und Phase}$$

andere Mal  $r' = 3$  zu Resonanzschwingungen angestossen. Dazwischen muss bestimmt eine Frequenzlage  $f^*$  existieren, bei der die betreffenden beiden Formen erzwungen angeregt werden und etwa gleich grosse Amplituden haben. Die Resonanzabstände betragen dann  $|f_2' - f^*|$  bzw.  $|f_3' - f^*|$ . Da in diesem Zustand alle übrigen Kraftwellen  $r^* = 4, 5, \dots$  weit grössere Resonanzabstände zu den entsprechenden Eigenformen  $r' = 4, 5, \dots$  aufweisen und ausserdem die Biegesteifigkeit des Blechkörpers mit steigender Ordnungszahl rasch zunimmt, sind mehr als zwei Verformungswellen derselben Grössenordnung kaum zu erwarten.

Man muss also grundsätzlich zwischen zwei Fällen unterscheiden:

a) Anregung bei Resonanz; Frequenz und Ordnungszahl einer Kraftwelle stimmen mit einer Eigenfrequenz und Eigenform des Blechkörpers überein. Es tritt im wesentlichen nur eine umlaufende Verformungswelle mit grosser Schwingungsamplitude auf.

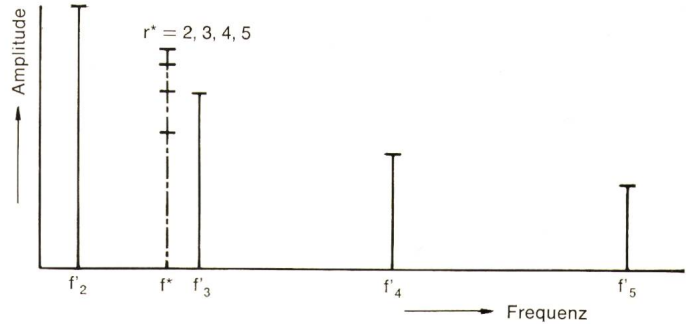
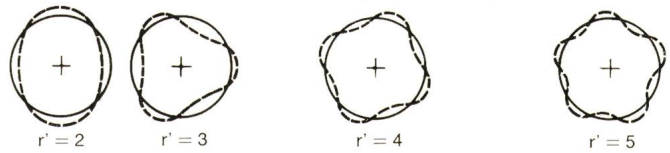


Fig. 1

Spektrum der Biege-Eigenformen  $r'$  eines ringähnlichen Blechkörpers sowie der gleichfrequenten Kraftwellen\* (schematisch)

Ordnungszahlen  $r_E^*$  und Frequenzen  $f_E^*$  der Drehkraftwellen des Motors nach Tab. I, hervorgerufen durch Interferenz Ständeroberfelder — Restfelder der Läuferexzentrizität (statische)

$$v_1 = p(6g_1 + 1) \text{ Ständeroberfelder}$$

$$v_{2E} = g_2 N_2 + (p \pm 1) = v_{2G} \pm 1 \text{ Restf. der Läuferexzentr.}$$

$$r_E^* = v_{2E} \pm v_1 = r_G^* \pm 1$$

$$f_E^* = f_N \left[ \frac{g_2 N_2 \pm k}{p} (1-s) \pm \frac{2}{0} \right] [\text{Hz}] \quad \begin{array}{l} k = 1 \text{ dyn. Exzentr.} \\ k = 0 \text{ stat. Exzentr.} \end{array}$$

$$\text{für } k = 0: f_E^* = f_G^*$$

Tabelle II

		$f_N$		$v_1$		Nutharm.				
		$g_2$		$v_{2E}$						
14,2	50,0	$f_N$		$v_1$						
		$g_2$		$v_{2E}$						
$f_E^* (s=0)$		$g_2$		$v_{2E}$		$r_E^*$				
— 496	— 1750	— 1	— 71— 73			Summe				
— 524	— 1850					Diff.				
+ 553	+ 1950	+ 1	+ 77+ 75							
+ 524	+ 1850									
— 1021	— 3600	— 2	— 145— 147							
— 1049	— 3700									
+ 1077	+ 3800	+ 2	+ 151+ 149							
+ 1049	+ 3700									
— 1545	— 5450	— 3	— 219— 221							
— 1573	— 5550									
+ 1602	+ 5650	+ 3	+ 225+ 223							
+ 1573	+ 5550									
— 2070	— 7300	— 4	— 293— 295			Summe	— 3— 5		+ 9+ 7	
— 2098	— 7400					Diff.	— 7— 9	+ 5+ 3		
+ 2126	+ 7500	+ 4	+ 299+ 297			Summe	+ 11	+ 1— 1		— 11
+ 2098	+ 7400					Diff.	+ 9+ 7	— 3— 5		

Weitere Bezeichnungen siehe Tabelle I.



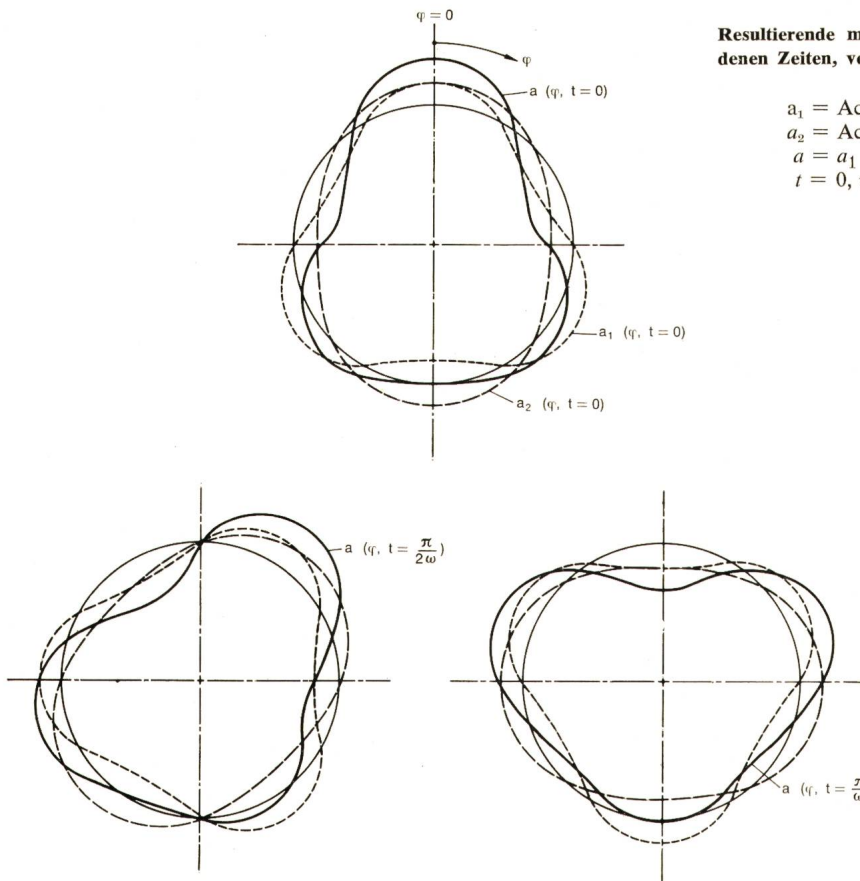


Fig. 2  
Resultierende momentane Verformung  $a(\varphi)$  des Blechpaketes zu verschiedenen Zeiten, verursacht durch zwei gleichfrequente Verformungswellen der Ordnungszahlen 3 und 2

$$\begin{aligned} a_1 &= A \cos(3\varphi - \omega t) && \text{erste Verformungswelle} \\ a_2 &= A \cos(2\varphi - \omega t) && \text{zweite Verformungswelle} \\ a &= a_1 + a_2 && \text{resultierende Verformung} \\ t &= 0, \pi/2\omega, \pi/\omega && \text{betrachtete Zeitaugenblicke} \end{aligned}$$

Darin bedeuten:

- $a_1, a_2$  Momentanwert der Schwingungsgrösse in radialer Richtung (Schwingweg, Schwinggeschwindigkeit oder Schwingbeschleunigung);
- $A_1, A_2$  Amplitude der Schwingungsgrösse;
- $r_1, r_2$  Ordnungszahl;
- $\omega = 2\pi f$  Kreisfrequenz;
- $\varphi$  Umfangskoordinate;
- $t$  Zeit.

Berücksichtigt man die zwei möglichen Umlaufrichtungen jeder Verformungswelle durch das Doppelvorzeichen im Argument von Gl. (2a) und (2b), nämlich

— : im Uhrzeigersinn drehend (·)

+ : im Gegenuhrzeigersinn drehend (·)

b) Erzwungene Anregung; es können zwei gleichfrequente Verformungswellen ungleicher Ordnungszahl vorhanden sein. Als Beispiel hierfür möge die schematische Darstellung in Fig. 2 dienen: die beiden Teilwellen mit den Ordnungszahlen 3 und 2 interferieren zu einer resultierenden Verformung, welche ihre momentane Gestalt im Zuge der Rotation laufend ändert. Wie die Erfahrung zeigt, treten auch bei erzwungener Anregung noch beachtliche Amplituden auf, die zu Lärmstörungen Anlass geben, besonders wenn das Blechpaket relativ biegeweich ist (hochpolige Maschinen).

An einer betriebsfertigen Maschine sind die lärm erzeugenden Drehkraftwellen unmittelbar experimentell kaum nachzuweisen. Man kann sie lediglich indirekt durch Messung der Verformungen eruieren, indem man beispielsweise den Jochrücken — sofern dieser zugänglich ist — mit Hilfe kleiner Kristallaufnehmer abtastet [1]. Im Resonanzfall bereitet dieses Vorgehen meist keine Schwierigkeiten, wohl aber im geschilderten erzwungenen Zustand, weil Verformungsanteile derselben Frequenz nicht ohne weiteres voneinander zu trennen sind.

Die folgenden Abschnitte beschreiben ein Trennungsverfahren für gleichfrequente Wellen ungleicher Ordnungszahl unter der Voraussetzung, dass zwei davon den Schwingungszustand des Blechpaketes überwiegend bestimmen.

### 3. Parameter zweier gleichfrequenter Drehverformungswellen

Ausgangspunkt seien zwei idealisierte gleichfrequente Teilverformungen ungleicher Ordnungszahl, deren Momentanwerte sich räumlich und zeitlich sinusförmig ändern mögen (vgl. Fig. 2):

$$a_1 = A_1 \cos(r_1\varphi \mp \omega t) \quad (2a)$$

$$a_2 = A_2 \cos(r_2\varphi \mp \omega t) \quad (2b)$$

dann sind  $r_1$  und  $r_2$  immer positiv zu zählen. Die räumliche Winkelgeschwindigkeit der beiden Wellen ist unterschiedlich gross und beträgt  $\omega/r_1$  bzw.  $\omega/r_2$ .

Parameter der beiden Teilverformungen sind die Amplituden  $A_1, A_2$ , deren Ordnungszahlen  $r_1, r_2$ , sowie die gemeinsame Schwingungsfrequenz  $f = \omega/2\pi$  (Tonfrequenz). Nur diese letztere kann direkt gemessen werden, alle übrigen bleiben vorerst unbekannt. Es muss also versucht werden, aus weiteren messbaren Grössen der Summenschwingung die Unbekannten zu ermitteln.

Die Summenschwingung erhält man durch Addition der Ausdrücke (2a) und (2b):

$$a(\varphi, t) = a_1 + a_2$$

$$a(\varphi, t) = B_1 \cos \omega t + \sigma_1 B_2 \sin \omega t \quad (3a)$$

mit

$$B_1 = A_1 \cos r_1 \varphi + A_2 \cos r_2 \varphi \quad (3b)$$

$$B_2 = A_1 \sin r_1 \varphi + \sigma_2 A_2 \sin r_2 \varphi \quad (3c)$$

$\sigma_1$  und  $\sigma_2$  sind Vorzeichen, welche die Umlaufrichtung der Teilverformungen berücksichtigen:

$\sigma_1$	$\sigma_2$	Umlaufrichtung	
+ 1	+ 1	$a_1 \curvearrowright$	$a_2 \curvearrowright$
+ 1	- 1	$a_1 \curvearrowright$	$a_2 \curvearrowleft$
- 1	+ 1	$a_1 \curvearrowleft$	$a_2 \curvearrowright$
- 1	- 1	$a_1 \curvearrowleft$	$a_2 \curvearrowleft$

gleichsinnige Rotation  
gegensinnige Rotation

Ferner errechnet sich der quadratische Mittelwert  $\bar{a}^2$  (Effektivwertquadrat) der resultierenden Schwingung aus

$$\bar{a}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [a(\varphi, t)]^2 dt$$



wobei  $T = 2\pi/\omega$  die Periodendauer ist. Nach Einsetzen von Gl. (3a) und Durchführung der Integration wird:

$$\bar{a}^2 = 0,5 (B_1^2 + B_2^2) \quad (4)$$

Hier verschwindet das durch  $\sigma_1$  gekennzeichnete Doppelvorzeichen.  $\sigma_2$  pflanzt sich dagegen fort, wenn man Gl. (3b) und (3c) in Gl. (4) einsetzt. Man erhält dann:

$$\bar{a}^2 = 0,5 [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos [(r_1 \mp r_2) \varphi]] \quad (5)$$

oder

$$\bar{a}^2 = K_1 + K_2 \cos \mu \varphi \quad (6a)$$

mit

$$K_1 = 0,5 (A_1^2 + A_2^2) \quad (6b)$$

$$K_2 = A_1 A_2 \quad (6c)$$

$$\mu = r_1 \mp r_2 \quad (6d)$$

Das Doppelvorzeichen in Gl. (5) bzw. (6d) bedeutet jetzt

— : gleichsinnige Rotation;

+ : gegensinnige Rotation.

Der quadratische Mittelwert besteht aus einem konstanten Anteil  $K_1$  und einem örtlich variablen Anteil  $K_2 \cos \mu \varphi$ . Die Grösse  $\mu$  — hier als Ordnungszahl der  $\bar{a}^2$ -Verteilung bezeichnet — gibt die Anzahl Maxima oder Minima am Umfang des Joches an. Ein Maximum liegt im Koordinatenursprung  $\varphi = 0$ . Die Extremwerte betragen

$$\bar{a}_{\max}^2 = K_1 + K_2 = 0,5 (A_1 + A_2)^2 \quad (7a)$$

$$\bar{a}_{\min}^2 = K_1 - K_2 = 0,5 (A_1 - A_2)^2 \quad (7b)$$

Nachdem diese Werte im Idealfall experimentell zugänglich sind — man braucht dazu nur die Effektivwertverteilung der gewählten Schwingungsgrösse zu messen und zu quadrieren — können über die Ausdrücke (7a), (7b) bereits die beiden Unbekannten  $A_1$ ,  $A_2$  berechnet werden. Praktisch wird man sie allerdings besser mit Hilfe eines Ausgleichsverfahrens bestimmen (vgl. Abschnitt 4).

Auch  $\mu$  lässt sich, durch Abzählen der Maxima am Jochumfang, ermitteln. Nach Gl. (6d) liegt aber damit lediglich die Summe oder Differenz der Ordnungszahlen der beiden Teilwellen fest, je nachdem ob diese gegen- oder gleichsinnig rotieren<sup>3)</sup>.

Es bedarf also noch einer unabhängigen Gleichung für  $r_1$  oder  $r_2$ . Man findet sie durch Berücksichtigung einer weiteren messbaren Grösse, nämlich der zeitlichen Phasenverschiebung  $\Delta\tau$  der resultierenden Schwingung im Koordinatenursprung und in einem beliebigen Punkt am Umfang des Joches.

Für die dazu erforderliche Entwicklung werden vorerst nur zwei der insgesamt vier möglichen Umlaufkombinationen von  $a_1$ ,  $a_2$  betrachtet, nämlich

$$a_1 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad a_2 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

sowie

$$a_1 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad a_2 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

<sup>3)</sup> Die periodische Verteilung des Effektivwertes am Jochumfang allein ist noch kein Merkmal dafür, dass es sich bei der resultierenden Verformung etwa um «stehende Wellen» handelt. Solche Wellen treten nur im Sonderfall  $r_1 = r_2$  und gegensinnige Rotation auf; sie haben ausgeprägte Schwingungsknoten, wenn zusätzlich  $A_1 = A_2$  ist.

Dann ist  $\sigma_1 = +1$  und man erhält aus Gl. (3a):

$$\frac{\partial}{\partial t} [a(\varphi, t)] = -B_1 \omega \sin \omega t + B_2 \omega \cos \omega t$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [a(\varphi, t)] = 0: B_1 \sin \tau - B_2 \cos \tau = 0 \quad (8)$$

$\tau = \omega t$  in Gl. (8) bestimmt den Zeitpunkt, zu dem der resultierende Momentanwert  $a$  einen Extremwert annimmt. Für den Koordinatenursprung  $\varphi = 0$  gilt, wenn man Gl. (3b) und (3c) in Gl. (8) einsetzt:

$$B_1(0) \sin \tau_0 - B_2(0) \cos \tau_0 = (A_1 + A_2) \sin \tau_0 = 0$$

d. h.

$$\tau_0 = 0 \quad (A_1 + A_2 \neq 0)$$

Für einen beliebigen Umfangspunkt  $\varphi \neq 0$  wird:

$$B_1(\varphi) \sin \tau_\varphi - B_2(\varphi) \cos \tau_\varphi = 0 \quad (9)$$

Dabei ist  $\tau_\varphi - \tau_0 = \Delta\tau$  oder  $\tau_\varphi = \Delta\tau$  die obenerwähnte zeitliche Phasenverschiebung.

Aus Gl. (6d) bestimmt man

$$r_2 = \pm (r_1 - \mu)$$

und entwickelt damit

$$\cos r_2 \varphi = \cos [\pm (r_1 - \mu) \varphi] = \cos (r_1 \varphi - \mu \varphi)$$

$$\sin r_2 \varphi = \sin [\pm (r_1 - \mu) \varphi] = \pm \sin (r_1 \varphi - \mu \varphi)$$

was in Gl. (3b) und (3c) eingesetzt zu folgenden Ausdrücken führt:

$$B_1(\varphi) = A_1 \cos r_1 \varphi + A_2 (\cos r_1 \varphi \cos \mu \varphi + \sin r_1 \varphi \sin \mu \varphi) = (A_1 + A_2 \cos \mu \varphi) \cos r_1 \varphi + (A_2 \sin \mu \varphi) \sin r_1 \varphi \quad (10a)$$

$$B_2(\varphi) = A_1 \sin r_1 \varphi \pm A_2 [\pm (\sin r_1 \varphi \cos \mu \varphi - \cos r_1 \varphi \sin \mu \varphi)] = (A_1 + A_2 \cos \mu \varphi) \sin r_1 \varphi - (A_2 \sin \mu \varphi) \cos r_1 \varphi \quad (10b)$$

Hier heben sich die von den Gl. (3c) und (6d) stammenden Doppelvorzeichen gegenseitig auf. Einsetzen von Gl. (10a) und (10b) in Gl. (9) sowie Auflösen des betreffenden Ausdruckes nach  $r_1$  liefert schliesslich:

$$r_1 = \frac{1}{\varphi} \arctg \frac{(A_1/A_2) \sin \Delta\tau + \sin (\mu\varphi + \Delta\tau)}{(A_1/A_2) \cos \Delta\tau + \cos (\mu\varphi + \Delta\tau)} \quad (11)$$

Berücksichtigt man noch die restlichen beiden Umlaufkombinationen von  $a_1$ ,  $a_2$ , nämlich

$$a_1 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad a_2 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

sowie

$$a_1 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad a_2 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

so ist  $\sigma_1 = -1$ , und es ergibt sich für  $r_1$  derselbe Ausdruck (11), nur mit vertauschtem Vorzeichen vor  $\Delta\tau$ . Damit kann Gl. (11) in die allgemein gültige Form (12) gebracht werden<sup>4)</sup>.

$$r_1 = \frac{1}{\varphi} \arctg \frac{(A_1/A_2) \sin (\sigma_4 \Delta\tau) + \sin (\mu\varphi + \sigma_4 \Delta\tau)}{(A_1/A_2) \cos (\sigma_4 \Delta\tau) + \cos (\mu\varphi + \sigma_4 \Delta\tau)} \quad (12)$$

<sup>4)</sup> Ein ähnlicher allgemeiner Ausdruck, der allerdings nicht direkt benötigt wird, lässt sich auch für die Ordnungszahl  $r_2$  herleiten:

$$r_2 = \sigma_3 \frac{1}{\varphi} \arctg \frac{(A_2/A_1) \sin (\sigma_4 \Delta\tau) - \sin (\mu\varphi - \sigma_4 \Delta\tau)}{(A_2/A_1) \cos (\sigma_4 \Delta\tau) + \cos (\mu\varphi - \sigma_4 \Delta\tau)} \quad (12a)$$

Es ist leicht zu erkennen, dass Gl. (12a) aus Gl. (12) hervorgeht, wenn man  $A_1/A_2$  durch  $A_2/A_1$ , sowie  $\Delta\tau$  durch  $-\Delta\tau$  ersetzt, und  $\sigma_3 = -1$  ist.



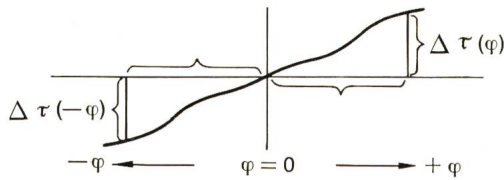


Fig. 3

Zeitliche Phasenverschiebung  $\Delta\tau$  längs des Jochumfanges, bezogen auf den Koordinatenursprung  $\varphi = 0$

wobei nach Gl. (6d):

$$r_1 - \sigma_3 r_2 = \mu \quad (13)$$

ist.

$\sigma_3$  und  $\sigma_4$  bestimmen wiederum die Umlaufrichtung der Teilverformungen. Auf deren Bedeutung bei der numerischen Auswertung wird unter Abschnitt 5 eingegangen.

$\sigma_3$	$\sigma_4$	Umlaufrichtung	
+ 1	+ 1	$a_1$ ↻ $a_2$ ↻	gleichsinnige Rotation ↔ gegensinnige Rotation
- 1	+ 1	$a_1$ ↻ $a_2$ ↻	
+ 1	- 1	$a_1$ ↻ $a_2$ ↻	
- 1	- 1	$a_1$ ↻ $a_2$ ↻	

Löst man Gl. (12) nach  $\Delta\tau$  auf, so lässt sich zeigen, dass diese Grösse bezüglich des Koordinatenursprunges immer ungerade symmetrisch am Jochumfang verteilt liegt (Fig. 3). Es gilt also:

$$\Delta\tau(\varphi) = -\Delta\tau(-\varphi) \quad (14)$$

Gl. (14) ist für die numerische Berechnung ebenfalls von Bedeutung, wie später noch gezeigt wird.

Um neben  $r_1$ ,  $r_2$  auch  $\mu$  ausnahmslos positiv zählen zu können, muss der Index 1 die grössere der beiden Teilordnungsahlen kennzeichnen, so dass

$$\left. \begin{aligned} r_1 - r_2 &\geq 0^5 \\ r_1 &> 0; r_2 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ist.

#### 4. Ausgleichen von Ungenauigkeiten

Unter den bisherigen idealisierten Voraussetzungen sind zur Berechnung der Parameter zweier gleichfrequenter Teilverformungen folgende Messgrössen erforderlich:

- Die Ordnungszahl  $\mu$ ; Gl. (13);
- Die Extremwerte  $\bar{a}_{\max}^2$  und  $\bar{a}_{\min}^2$ ; Gl. (7a), (7b);
- Die Phasenverschiebung  $\Delta\tau$ ; Gl. (12).

In der Praxis werden die Grössen b) und c) mit gewissen «Fehlern» behaftet sein, die nicht allein auf Messfehler zurückzuführen sind. Der Grund hierfür liegt unter anderem darin, dass die tatsächliche  $\bar{a}^2$ -Verteilung von der exakten Cosinusform mehr oder minder stark abweicht, und dass diese Verteilung im allgemeinen nur punktwise abgetastet werden kann. Man wird deshalb zweckmässigerweise Grösse und Lage der Extrema mit Hilfe eines Ausgleichsverfahrens bestimmen, bei dem die Effektivwerte aller am Umfang des Joches gewählten Meßstellen gleichberechtigt berücksichtigt erscheinen. Die genaue Lage der Extrema wird überdies zur Festlegung des Koordinatenursprunges benötigt, von dem aus  $\Delta\tau$  gemessen werden muss.

Bezeichnet man mit  $\bar{a}_i^2$  die an den Stellen  $i = 1 \dots n$  ermittelten Effektivwertquadrate, so lassen sich diese durch eine Cosi-

nuslinie mit den Parametern  $K_1$ ,  $K_2$  und  $\psi$  approximieren (vgl. Fig. 4).  $\psi$  sei der räumliche Winkel zwischen dem «besten» und einem vorerst willkürlich angenommenen Koordinatenursprung. Der bestapproximierende Cosinusverlauf ergibt sich durch Erweiterung von Gl. (6a) zu:

$$\bar{a}^2 = K_1 + K_2 \cos(\mu\varphi - \mu\psi) \quad (16)$$

oder

$$\bar{a}^2 = C_1 + C_2 \cos\Phi + C_3 \sin\Phi \quad (17)$$

worin

$$C_1 = K_1; C_2 = K_2 \cos\psi; C_3 = K_2 \sin\psi$$

und

$$\Phi = \mu\varphi; \Psi = \mu\psi$$

ist. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Anzahl  $\mu$  der vollen Wellen am Jochumfang bereits aus dem Verlauf der Messwerte deutlich genug hervorgeht.

Die Abweichungen der experimentellen Werte  $\bar{a}_i^2$  gegen die durch Gl. (17) gegebenen betragen:

$$v_i = \bar{a}_i^2 - C_1 - C_2 \cos\Phi_i - C_3 \sin\Phi_i$$

Nach dem Ausgleichsprinzip von Gauss muss gelten, z. B. [5]:

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = F(C_1, C_2, C_3) = \min$$

oder

$$\frac{\partial F}{\partial C_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial C_2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial C_3} = 0$$

was auf drei lineare Gleichungen mit den Unbekannten  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  führt:

$$\left. \begin{aligned} nC_1 + (\sum \cos\Phi_i) C_2 + (\sum \sin\Phi_i) C_3 - \sum \bar{a}_i^2 &= 0 \\ (\sum \cos\Phi_i) C_1 + (\sum \cos^2\Phi_i) C_2 + \\ &+ (\sum \cos\Phi_i \sin\Phi_i) C_3 - \sum \bar{a}_i^2 \cos\Phi_i &= 0 \\ (\sum \sin\Phi_i) C_1 + (\sum \cos\Phi_i \sin\Phi_i) C_2 + \\ &+ (\sum \sin^2\Phi_i) C_3 - \sum \bar{a}_i^2 \sin\Phi_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Es bedeuten:

- $\Phi_i = \mu\varphi_i$   $\mu$ -fache Umfangskoordinate der  $i$ -ten Meßstelle, bezogen auf den willkürlichen Koordinatenursprung;  
 $\bar{a}_i^2$  Effektivwertquadrat an der  $i$ -ten Meßstelle;  
 $n$  Anzahl Meßstellen am Jochumfang.

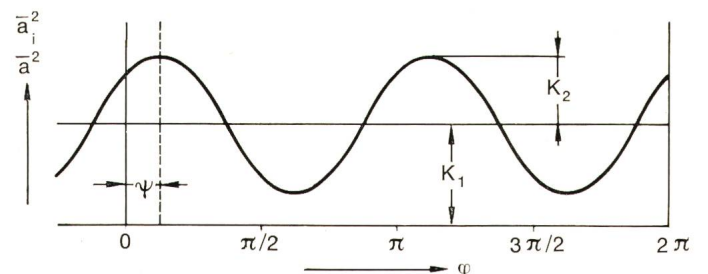


Fig. 4

Bestapproximierende Cosinuslinie für die  $\bar{a}^2$ -Verteilung am Jochumfang  
 Als Beispiel sind zwei Wellenlängen ( $\mu = 2$ ) angenommen

<sup>5)</sup> Das Gleichheitszeichen wird miteinbezogen, weil die Beziehungen (12)...(14) auch für den wichtigen Sonderfall gleich grosser Teilordnungsahlen gelten, wenn die Teilwellen gegensinnig rotieren. Zum Unterschied vom allgemeinen Fall  $r_1 \neq r_2$  können solche Wellen nicht nur in Resonanzferne, sondern auch bei Resonanz auftreten, wobei die Verformungsamplituden dann besonders gross sind.



Nach Auflösung des Gleichungssystems (18) sind auch die Parameter von Gl. (16) bekannt:

$$K_1 = C_1 \quad (19a)$$

$$K_2 = \sqrt{C_2^2 + C_3^2} \quad (19b)$$

$$\psi = \frac{1}{\mu} \arctg \frac{C_3}{C_2} \quad (19c)$$

Der bestapproximierende Koordinatenursprung (Index  $j$ ) liegt um den Winkel  $\psi$  gegenüber dem willkürlichen (Index  $i$ ) verdreht; die bereits gewählten Messpunkte haben somit folgende neue Koordinaten:

$$\varphi_j = \varphi_i - \psi \quad (20)$$

Die bestapproximierenden Amplituden der Teilwellen errechnen sich über Gl. (7a) und (7b) zu:

$$A_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{K_1 + K_2} \pm \sqrt{K_1 - K_2}) \quad (21a)$$

$$A_{2,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{K_1 + K_2} \mp \sqrt{K_1 - K_2}) \quad (21b)$$

Das Doppelvorzeichen bedeutet, dass die Lösungen im allgemeinen wohl verschieden gross, aber gegeneinander vertauschbar sind. Es fehlt also noch die Zuordnung der Amplituden zu ihren Ordnungszahlen (daher vorläufig «A» mit Doppelindex).

## 5. Regeln zur Anwendung der Bestimmungsgleichungen (12) und (13)

Nachdem die Grössen  $A_{1,2}$ ;  $A_{2,1}$  sowie die neuen Koordinaten  $\varphi_j$  bestimmt worden sind, misst man die Phasenverschiebungen  $\Delta\tau_j$ . Dann sind alle Glieder in Gl. (12) rechts bekannt (man denke sich die Symbole  $\varphi$  und  $\Delta\tau$  in dieser Gleichung mit dem Index  $j$  versehen). Unbekannt bleiben dagegen die Umlaufrichtung der Teilverformungen ( $\sigma_3$ ,  $\sigma_4$ ), sowie die oben erwähnte Amplitudenzuordnung.

Gl. (12) muss deshalb für eine beliebige Meßstelle  $j$  viermal angewendet werden, nämlich:

$$\begin{aligned} \text{I: } r_1 &= F(A_{1,2}/A_{2,1}, +\Delta\tau_j, \dots) & \sigma_4 &= +1 \\ \text{II: } r_1 &= F(A_{2,1}/A_{1,2}, +\Delta\tau_j, \dots) & \sigma_4 &= +1 \\ \text{III: } r_1 &= F(A_{1,2}/A_{2,1}, -\Delta\tau_j, \dots) & \sigma_4 &= -1 \\ \text{IV: } r_1 &= F(A_{2,1}/A_{1,2}, -\Delta\tau_j, \dots) & \sigma_4 &= -1 \end{aligned}$$

Nur eine der vier möglichen Kombinationen von  $A_{1,2}$ ;  $A_{2,1}$ ;  $\Delta\tau_j$  kann für  $r_1$  die richtige Lösung ergeben; sie ist dadurch gekennzeichnet, dass sie folgende Bedingungen erfüllt<sup>6)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \text{positiv} \\ r_1 &= \text{ganzzahlig (theoretisch)} \\ \text{und mit Gl. (13):} \\ r_1 &\geq r_2 \quad (r_2 > 0; \mu > 0) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Bei der richtigen Kombination ist der im Zähler des Amplitudenverhältnisses stehende Wert  $A$  der Ordnungszahl  $r_1$  zugeordnet, er ist daher mit dem Index 1 zu versehen. Die Um-

<sup>6)</sup> Angenommen die Lösung aus der Kombination I erfülle alle Bedingungen (22), dann liefert II und III selbst theoretisch keine ganze Zahl, und bei IV kommt als  $r_1$  der negative (positive) Wert von  $r_2$  heraus, sofern die beiden Teilwellen gleichsinnig (gegensinnig) rotieren. Man überzeuge sich davon durch einen Vergleich von Gl. (12) mit Gl. (12a).

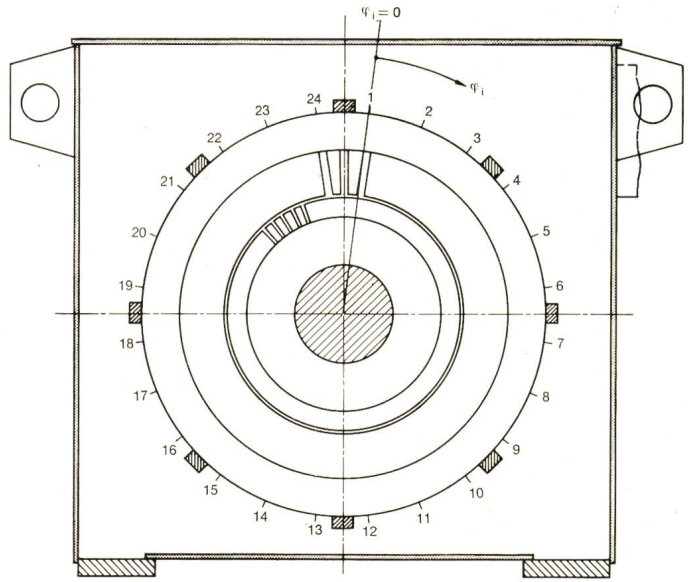


Fig. 5  
Positionen der Schwingungsaufnehmer am Umfang des Statorblechkörpers  
 $\varphi_i = 0^\circ$  willkürlich festgelegter Koordinatenursprung (Pos. 1)  
 $\varphi_i = 0^\circ, 15^\circ, \dots, 345^\circ$ ;  $i = 1, 2, \dots, 24$

laufrichtungen ergeben sich sinngemäss aus den dafür verantwortlichen Vorzeichen.

Eine Schwierigkeit bei der numerischen Auswertung bereitet noch die Vieldeutigkeit der Arcusfunktion in Gl. (12). Derentwegen existiert für  $r_1$  eine Schar von Lösungen, die man durch eine arithmetische Reihe darstellen kann, nämlich

$$r_{1g} = r_1 + g\pi/\varphi_j \quad (g = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

wobei die Differenz zweier benachbarter Glieder von der Koordinate  $\varphi_j$  abhängt.

Wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, umgeht man die Schwierigkeit, indem man Gl. (12) nicht nur in bezug auf die vier Kombinationen I...IV, sondern zusätzlich für alle vorhandenen Messwerte  $\Delta\tau_j$  anwendet. Je Messpunkt ergibt sich dann

Gemessene Schwingungsgeschwindigkeit  $\bar{a}_i$  (Effektivwert der Radialkomponente) in den Punkten  $i$  des Jochrückens (Fig. 5)  
Schwingungsfrequenz  $f = 2098$  Hz

Tabelle III

$i$	$\bar{a}_i$ $\mu\text{m s}^{-1}$	$i$	$\bar{a}_i$ $\mu\text{m s}^{-1}$
1	42,0	13	22,5
2	52,0	14	27,5
3	49,0	15	28,0
4	45,0	16	21,5
5	51,5	17	32,0
6	43,0	18	39,0
7	43,5	19	37,5
8	38,5	20	53,0
9	31,5	21	48,0
10	27,5	22	46,5
11	24,0	23	50,0
12	28,0	24	42,0



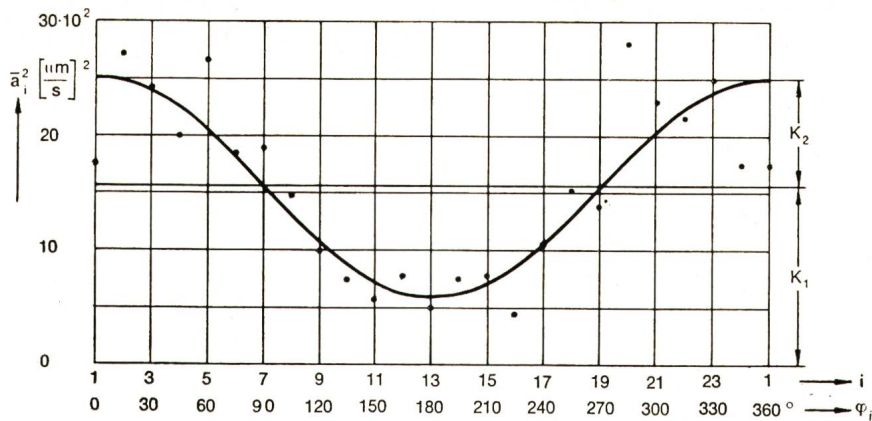


Fig. 6  
Radialverformung des Statorblechkörpers in Abhängigkeit vom Umfangswinkel. Schwingungsfrequenz  $f = 2098 \text{ Hz}$

$i, \varphi_i$  siehe Fig. 5

$\bar{a}_1^2$  Effektivwertquadrat der Schwinggeschwindigkeit

• Messwerte, quadriert

— bestapproximierende Cosinuslinie

Ordnungszahl der  $\bar{a}^2$ -Verteilung:  $\mu = 1$

Parameter der Cosinuslinie:  $K_1 = 1578,23 \mu\text{m}^2\text{s}^{-2}$

$K_2 = 929,15 \text{ „}$

$\psi = +0,01^\circ \approx 0^\circ$

eine Lösungsreihe. Die richtige Lösung ist wiederum an Bedingung (22) gebunden. Hinzu kommt, dass

$r_1$  in allen Lösungsreihen enthalten

(23)

sein muss.

## 6. Praktisches Beispiel

Zur Überprüfung der Brauchbarkeit des beschriebenen Rechenverfahrens wurden Messungen an dem eingangs erwähnten Asynchronmotor (1400 kW, 1490 U./min) vorge-

Lösungsreihen  $r_{1g} = r_1 + 180 g/\varphi_j$  nach Gl. (12), gültig für die Kombination:  $A_{1,2}/A_{2,1} = 53,42/17,39$ ;  $+\Delta\tau_j$  ( $\sigma_4 = +1$ )

Tabelle IV

j	$\varphi_j$ [°]	$\Delta\tau_j$ [°]	$\bar{\Delta\tau}_j$ [°]	← Klasseneinteilung →									
				1	2	3	4	5	6				
1	0	0	0										
2	15	50	67										
3	30	110	128,5										
4	45	182	187,5	0,40									
5	60	230	243,5		1,29								
6	75	306	311,5			1,97							
7	90	3	7,5	0,28			2,28						
8	105	48	57,5		0,73		2,44						
9	120	125	122,5			1,18		2,68					
10	135	190	184	0,15		1,49		2,82					
11	150	245	244,5		0,52		1,72		2,92				
12	165	313	306,5		0,81		1,90		2,99				
13	180	7	7	0,04		1,04		2,04		3,04			
14	195	60	53,5	0,24		1,16		2,09		3,01	3,93		
15	210	116	115,5	0,49		1,35		2,20		3,06	3,92		
16	225	182	176		0,71		1,51	2,31		3,11	3,91		
17	240	240	237,5	0,16	0,91		1,66	2,41		3,16	3,91		
18	255	293	302,5	0,41		1,11	1,82		2,52	3,23	3,94		
19	270	348	352,5		0,57	1,24	1,91		2,57	3,24	3,91		
20	285	43	48,5	0,11	0,75	1,38		2,01	2,64	3,27	3,90		
21	300	103	116,5	0,34	0,94		1,54	2,14	2,74	3,34	3,94		
22	315	167	172,5		0,51	1,09	1,66	2,23	2,80	3,37	3,94		
23	330	213	231,5	0,14	0,68	1,23	1,77	2,32	2,86	3,41	3,95	4,50	
24	345	276	293	0,32	0,84	1,36	1,88	2,40	2,93	3,45	3,97	4,49	

$\varphi_j$  Koordinate der Meßstelle j  
 $\Delta\tau_j$  gemessene Phasenverschiebung  
 $\bar{\Delta\tau}_j$  gemittelte Phasenverschiebung

$A_{1,2}/A_{2,1}$  Amplitudenverhältnis  
 $\sigma_4$  Vorzeichen;  $g = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$



j	← Klasseinteilung →						
	1	2	3	4	5	6	7
1	Koordinatenursprung						
2					5,22		17,22 →
3					5,04		11,04 →
4	0,93			II	4,93		8,93 →
5		1,83			4,83		7,83 →
6			2,54		4,94		7,34 →
7			2,88		4,88		6,88 →
8			3,08		4,80		6,51 →
9			3,37		4,87	6,37	
10				3,57	4,91	6,24	
11				3,75	4,95	6,15	
12				3,91	5,00	6,09	
13					4,04	5,04	6,04
14					4,08	5,00	5,93
15					4,18	5,04	5,90
16					4,26	5,06	5,86
17					4,32	5,07	5,82
18					4,38	5,09	5,79
19					4,37	5,04	5,71
20					4,39	5,02	5,65
21					4,43	5,03	5,63
22					4,44	5,01	5,58
23					4,45	5,00	5,54
24					4,47	4,99	5,51

Die schraffierten Bereiche sind mit Zahlen belegt, die für die Auswertung nicht interessieren

nommen<sup>7)</sup>. Dieser Motor stellt an und für sich kein «geeignetes» Versuchsobjekt dar: einerseits hat er als 4-polige Maschine ein ziemlich biegesteifes Blechpaket, andererseits sind die Nutenzahlen mit Rücksicht auf das Geräuschverhalten sorgfältig gewählt worden, so dass relativ wenige Kraftwellen mit niedriger Ordnungszahl existieren (vgl. Tab. I und II).

Fig. 5 zeigt die gewählten Positionen der Schwingungsaufnehmer am Blechpaketumfang. Alle 24 Meßstellen liegen in einer Ebene (Mittenebene) senkrecht zur Maschinenachse.

Vorerst wurde im Leerlauf — durch wiederholtes Abtasten des Jochrückens bei unterschiedlicher Netzfrequenz  $f_N$  — bewusst nach annähernd sinusförmigen  $\bar{a}^2$ -Verteilungen gesucht. Dabei wurde jeweils der Effektivwert der Schwinggeschwindigkeit gemessen, und zwar über ein Mitlauffilter mit ausreichend schmaler Bandbreite, um allfällige verschiedenfrequente Anteile möglichst auszuschliessen. Es traten in der Tat solche Verteilungen auf; eine davon bei der Schwingungsfrequenz

<sup>7)</sup> Die messtechnischen Untersuchungen sind von H. Stawinski im Akustiklabor der AG Brown, Boveri & Cie. durchgeführt worden. Für die numerischen Auswertungen stand ein Digitalrechner zur Verfügung [6].

$f = 2098$  Hz (entsprechend  $f_N = 14,2$  Hz) welche im folgenden diskutiert werden soll:

Tab. III enthält die selektiv gemessenen Schwinggeschwindigkeiten  $\bar{a}_1$ , und Fig. 6 zeigt den Verlauf von  $\bar{a}_1^2$  über dem Jochumfang. Es geht daraus deutlich die Tendenz zu einer Cosinusverteilung mit der Ordnungszahl  $\mu = 1$  hervor. Ferner ist die bestapproximierende Cosinuslinie mit den nach Abschnitt 4 berechneten Parametern  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $\psi$  eingezeichnet.  $\psi$  ist vernachlässigbar klein, so dass  $\varphi_j = \varphi_1$  gesetzt werden kann. Gl. (21) liefert als Amplituden der beiden Teilverformungen  $A_{1,2} = 53,42$   $\mu\text{m/s}$  bzw.  $A_{2,1} = 17,39$   $\mu\text{m/s}$ .

Die gemessenen Phasenverschiebungen  $\Delta\tau_j$  zwischen dem Koordinatenursprung  $j = 1$  und allen übrigen Positionen  $j = 2 \dots 24$  sind in Tab. IV links eingetragen. Nachdem diese Positionen in bezug auf  $j = 1$  symmetrisch zueinander liegen, kann man Gl. (14) anwenden und durch «Mittelung» etwas bessere Werte  $\Delta\tau_j$  gewinnen; im vorliegenden Fall gilt:

$$\Delta\tau_j = 0,5(\Delta\tau_j - \Delta\tau_{n+2-j}) + 180^\circ \quad (j \neq 1; 13 \quad n = 24)$$

Tab. IV und V enthalten die nach Gl. (12) gerechneten Lösungsreihen mit positiven Gliedern für die Ordnungszahl  $r_1$ ,



$j$	I $\frac{A_{1,2}}{A_{2,1}} = \frac{53,42}{17,39}$ $\sigma_4 = +1$		II $\frac{A_{2,1}}{A_{1,2}} = \frac{17,39}{53,42}$ $\sigma_4 = +1$		III $\frac{A_{1,2}}{A_{2,1}} = \frac{53,42}{17,39}$ $\sigma_4 = -1$		IV $\frac{A_{2,1}}{A_{1,2}} = \frac{17,39}{53,42}$ $\sigma_4 = -1$	
	$r_1$	$ \Delta r_1 $	$r_1$	$ \Delta r_1 $	$r_1$	$ \Delta r_1 $	$r_1$	$ \Delta r_1 $
1	Koordinatenursprung							
2	4,71	0,71	5,22	0,22	7,78	0,22	8,29	0,71
3	4,53	0,53	5,04	0,04	7,96	0,04	8,48	0,52
4	4,40	0,40	4,93	0,07	8,07	0,07	8,60	0,40
5	4,29	0,29	4,83	0,17	8,17	0,17	8,72	0,28
6	4,37	0,37	4,94	0,06	8,06	0,06	8,63	0,37
7	4,28	0,28	4,88	0,12	8,12	0,12	8,72	0,28
8	4,16	0,16	4,80	0,20	8,21	0,21	8,84	0,16
9	4,18	0,18	4,87	0,13	8,14	0,14	8,83	0,17
10	4,15	0,15	4,91	0,09	8,09	0,09	8,85	0,15
11	4,12	0,12	4,95	0,05	8,06	0,06	8,89	0,11
12	4,08	0,08	5,00	0,00	8,00	0,00	8,92	0,08
13	4,04	0,04	5,04	0,04	7,96	0,04	8,96	0,04
14	3,93	0,07	5,00	0,00	8,00	0,00	9,07	0,07
15	3,92	0,08	5,04	0,04	7,96	0,04	9,08	0,08
16	3,91	0,09	5,06	0,06	7,94	0,06	9,09	0,09
17	3,91	0,09	5,07	0,07	7,93	0,07	9,09	0,09
18	3,94	0,06	5,09	0,09	7,92	0,08	9,07	0,07
19	3,91	0,09	5,04	0,04	7,96	0,04	9,10	0,10
20	3,90	0,10	5,02	0,02	7,98	0,02	9,10	0,10
21	3,94	0,06	5,03	0,03	7,97	0,03	9,06	0,06
22	3,94	0,06	5,01	0,01	7,99	0,01	9,06	0,06
23	3,95	0,05	5,00	0,00	8,00	0,00	9,05	0,05
24	3,97	0,03	4,99	0,01	8,01	0,01	9,03	0,03
M	4		5		8		9	
$\sum_{j=2}^{24}  \Delta r_1 $		4,09		1,56		1,58		4,07

$r_1$  Werte nach Spalte I...IV, wovon I, II aus Tab. IV und V  
 $|\Delta r_1|$  Differenz zur gemeinsamen nächstliegenden ganzen Zahl M  
 Übrige Bezeichnungen siehe Tabelle IV

und zwar für zwei der insgesamt vier möglichen Kombinationen von  $A_{1,2}$ ;  $A_{2,1}$ ;  $\Delta\tau_j$ . (Die Lösungsreihen aus den restlichen beiden Kombinationen sind nicht wiedergegeben.) Der Übersicht halber wurden alle Zahlen in Klassen von der Breite 0,5 zusammengefasst, und dementsprechend untereinander angeschlossen.

Sucht man nun nach der richtigen, die Bedingungen (22) und (23) erfüllenden Lösung, so muss man feststellen, dass praktisch in keiner Reihe ganzzahlige Glieder vorhanden sind. Dies war wegen der unter Abschnitt 4 genannten unvermeidlichen «Fehler» zu erwarten. Immerhin findet man in den mit I bzw. II gekennzeichneten Spalten besondere Werte, welche zu möglichen Lösungen führen können. Denn nur diese Werte weichen am wenigsten von einer gemeinsamen ganzen Zahl —

nämlich 4 bzw. 5 — ab, und kommen in allen Lösungsreihen  $j = 2...24$  vor. Ähnliches gilt für die restlichen (nicht wiedergegebenen) Kombinationen: sie liefern zwei weitere Spalten III bzw. IV mit den möglichen Lösungen 8 bzw. 9.

Tabelle VI weist die zur Auswahl stehenden Wertgruppen der Spalten I...IV gesondert aus, daneben finden sich die Differenzen  $|\Delta r_1|$  zur gemeinsamen nächstliegenden ganzen Zahl. Entscheidend ist nun, dass die Differenzen  $|\Delta r_1|$  II =  $|\Delta r_1|$  III fast ausnahmslos kleiner als  $|\Delta r_1|$  I =  $|\Delta r_1|$  IV sind. Demnach scheiden die Gruppen I und IV aus, weil ihre Werte von der theoretisch möglichen Ganzzahligkeit stärker abweichen als bei II und III.

Verbleiben also noch die Lösungen 5 und 8. Um daraus die richtige zu finden hätte man Gl. (12) auf eine weitere Meßstelle



mit der Koordinate  $\varphi_1 < 15^\circ$  anwenden müssen. Andererseits ist eine Teilverformung  $r_1 = 8$  wegen der damit verbundenen hohen Biegesteifigkeit des Statorjoches ziemlich unwahrscheinlich. Folglich dürfen

$$r_1 = 5$$

und mit Gl. (13)

$$r_2 = 4$$

als Ordnungszahlen der beiden gesuchten Teilverformungswellen gelten. Abgesehen von der fehlenden Ganzzahligkeit in der betreffenden Wertegruppe genügen diese Ordnungszahlen den Forderungen (22) und (23). Nach Abschnitt 5 liegt auch die Amplitudenzuordnung sowie die Umlaufrichtung der Wellen fest:

$$\begin{array}{ll} A_1 = 17,39 \mu\text{m/s} & \sigma_3 = +1 \\ A_2 = 53,42 \mu\text{m/s} & \sigma_4 = +1 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{gleichsinnige Rotation} \\ \text{im Uhrzeigersinn} \end{array} \right\}$$

Das gefundene Ergebnis lässt sich qualitativ anhand der Ordnungszahlschemas Tab. I und II noch bestätigen. Für  $f_N = 14,2$  Hz weist das erste Schema zweimal die Kraftwellenfrequenz  $|f_G^*| = 2098$  Hz mit der Ordnungszahl  $|r_G^*| = 4$ , und das zweite zweimal die Frequenz  $|f_E^*| = 2098$  Hz mit  $|r_E^*| = 5$  aus<sup>8)</sup>:

$f_G^* = f_E^*$	$r_G^*$	$r_E^*$
— 2098 Hz	+ 4	+ 5
+ 2098 Hz	— 4	— 5

Demnach sind gleich zwei Paare von Kraftwellen vorhanden, deren Frequenz, Ordnungszahl und Drehsinn (Vorzeichen) mit jenen der Teilverformungen übereinstimmt. Zudem handelt es sich um vergleichsweise starke Kraftwellen, weil sie durch Nutharmonische der Ständeroberfelder gebildet werden [1].

Wie übrigens durch weitere Versuche bestätigt werden konnte, liegt die Schwingungsfrequenz  $f$ , welche mit  $f_G^* = f_E^*$

<sup>8)</sup> Offenbar liegt eine statische Exzentrizität des Rotors vor. Diesem Umstand ist das Auftreten der beiden Teilverformungen zu verdanken.

übereinstimmt, erwartungsgemäss zwischen den Resonanzfrequenzen der Formen  $r' = 4$  und  $r' = 5$ .

## 7. Schlussfolgerungen

Der vorliegende Beitrag stellt die Messtechnik zur Bestimmung des Schwingungsverhaltens von ringähnlichen Statorblechkörpern auf eine erweiterte Grundlage. Wie durch ein praktisches Beispiel gezeigt wurde, sind zwei gleichfrequente Teilverformungswellen unterschiedlicher Ordnungszahl, die das Schwingungsverhalten beherrschen, durchaus möglich. Das entwickelte Verfahren zur Trennung derselben kann dann sowohl bei Grundlagenuntersuchungen wie auch in Störungsfällen nützliche Dienste leisten. Der hierfür erforderliche Messaufwand geht über das sonst übliche Mass nicht nennenswert hinaus. Auch der Rechenaufwand ist vertretbar, wenn zur numerischen Auswertung eine elektronische Rechenmaschine eingesetzt wird.

Allerdings sind der Brauchbarkeit des Verfahrens Grenzen gesetzt: wenn nämlich Messfehler und Verzerrung der  $\bar{a}^2$ -Verteilung ein gewisses Mass überschreiten, dann lassen sich die Differenzen  $|\Delta r_1|$  der zur Auswahl stehenden Wertegruppen unter Umständen nicht gesichert voneinander unterscheiden. In so einem Fall können keine eindeutigen Ordnungszahlen der Teilverformungen angegeben werden.

## Literatur

- [1] H. Jordan: Geräuscharme Elektromotoren. Essen, Girardet, 1950.
- [2] H. Nordmann und G. Schuster: Neue Hochspannungs-Käfigläufermotoren mittlerer Leistung. 1. Mechanischer Aufbau. Brown Boveri Mitt. 54(1967)9, S. 521...523.
- [3] H. Jordan: Die Entwicklung auf dem Gebiet der Geräusche und Vibrationen von Asynchron-Maschinen. Acta Technica CSAV 10(1965)6, S. 623...650.
- [4] H. Weh: Zur elektromagnetischen Schwingungsanregung bei Asynchronmaschinen. ETZ-A 85(1964)7, S. 193...197.
- [5] B. Baule: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs. Bd. II: Ausgleichs- und Näherungsrechnung. Leipzig, S. Hirzel, 1959.
- [6] F. Herz, H. Stawinski und W. Elsasser: Acoustic data collection and evaluation with the aid of a small computer. Brüel & Kjaer Technical Review -(1970)1, p. 3...18.

## Adresse des Autors:

Dipl.-Ing. Bruno Ploner, AG Brown, Boveri & Cie., Postfach, 5242 Birr.

## Commission Electrotechnique Internationale (CEI)

### Sitzungen des CE 50 und des SC 50B vom 8. bis 14. September 1971 in Leningrad

#### CE 50, Essais climatiques et mécaniques

Das CE 50 tagte unter dem Vorsitz seines Präsidenten, Dr. H. Mayr (Italien), vom 11. bis 14. September 1971. Aus 15 Ländern waren 49 Delegierte anwesend. Das CES wurde durch den Berichterstatte vertreten.

Zu Beginn der Sitzungen wurde vom statutarischen Rücktritt des bisherigen Präsidenten, Mr. Seamen (USA), und der Ernennung von Dr. H. Mayr zu seinem Nachfolger sowohl als Präsident des CE 50 als auch des SC 50B Kenntnis genommen. Des weiteren ist auch A. Dauphin (Frankreich) als Präsident des SC 50A zurückgetreten. Zu dessen Nachfolger schlägt das Sekretariat Dr. O. Björklund (Schweden) vor, der als gewählt betrachtet werden kann, wenn bis Ende November 1971 keine Einsprachen gegen seine Nomination eintreffen.

Der technische Teil der Sitzungen wurde durch die Berichterstattung über die Tätigkeit des SC 50A, Essais de chocs et de

vibrations, begonnen. Der gute Fortschritt der Arbeiten wurde zur Kenntnis genommen. Lediglich mit der Arbeitsgruppe 3, Acoustic noise, und der Arbeitsgruppe 5, Guidance, bestehen insofern Schwierigkeiten, als sich auf die Anfrage des Sekretariates kaum Interessenten zur Mitarbeit gemeldet haben; es scheint somit, dass diese Themen auf wenig Interesse stossen. Zuhanden des SC 50A wurde deshalb vorgeschlagen, die Umschreibung des Tätigkeitsgebietes dieser beiden Arbeitsgruppen solle neu überprüft und den wirklichen Bedürfnissen angepasst werden. Hier-nach folgte der Tätigkeitsbericht des SC 50B, Essais climatiques, dem vollständig zugestimmt wurde. Auf Wunsch des SC 50B wird das Sekretariat das Verhältnis zum neu gegründeten CE 70, Enveloppes de Protection, bezüglich der Frage, wer die Verfahren zur Prüfung der Wasserschutzarten ausarbeiten soll, genau abklären.