

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins  
**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke  
**Band:** 62 (1971)  
**Heft:** 17

**Artikel:** Einführung in die Theorie der Signalerkennung in Rauschen  
**Autor:** Schlaepfer, H.-J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-915848>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Einführung in die Theorie der Signalerkennung in Rauschen

Von H.J. Schlaepfer, Zürich

Die vorliegende Arbeit enthält eine Einführung in die Theorie der Erkennung von Signalen in überlagertem Rauschen. Ausgehend von einem allgemeinen statistischen Modell eines Übertragungssystems für digitale Nachrichten wird gezeigt, dass die optimale Entscheidungsfunktion immer die Form eines Wahrscheinlichkeitsverhältnisses hat («likelihood ratio test»). Als Anwendungsbeispiele werden anschliessend insbesondere die einfachsten Strukturen des optimalen kohärenten und des optimalen inkohärenten binären Empfängers bei weißem, additiv überlagertem gaußschem Rauschen berechnet und ihre Fehlerwahrscheinlichkeit bestimmt<sup>1)</sup>. Für das Verständnis der Arbeit ist die Kenntnis der grundlegenden Zusammenhänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung unerlässlich.

## 1. Einleitung

Das Signal am Eingang eines Empfängers wird infolge nichtidealener Kanaleigenschaften im allgemeinen kein getreues Abbild mehr dessen sein, was der Sender ursprünglich erzeugt hat. Neben verschiedenen deterministischen Eigenschaften (Amplituden-, Phasengang) sind es statistische Parameter, welche die Qualität des Übertragungsmediums bestimmen. Dabei ist vor allem das Rauschen zu nennen, welches an verschiedenen Stellen in den Kanal hineingelangt und den Signalen überlagert wird; daneben treten aber oftmals auch zufällige Änderungen der Übertragungscharakteristik auf, wie Fading bei Kurzwellenverbindungen, welche an der Ionosphäre reflektiert werden, sowie die Ausbreitung der Signale über verschiedene Pfade mit unterschiedlichen Laufzeiten und schliesslich — vor allem bei geschalteten Telefonleitungen — kurzzeitige Ausfälle der Verbindung. Die vorliegende Arbeit befasst sich nur mit dem Rauschen, in der Annahme, dass die deterministischen Kanaleigenschaften durch Entzerrer in geeigneter Weise kompensiert und die übrigen statistischen Einflüsse vernachlässigbar seien.

In einem Übertragungssystem für digitale Daten kennt der Sender grundsätzlich nur eine beschränkte Anzahl möglicher Signale, von denen er in jedem Takt (konstanter Zeitausschnitt) entsprechend der zu übertragenden Nachricht je eines auswählt und übermittelt. Diese abzählbare Menge möglicher Signale geht infolge der zufälligen Störungen im Kanal in eine Vielzahl möglicher Signalformen über, welche der Empfänger an seinem Ort beobachten kann. Seine Entscheidungsaufgabe besteht dann in einer Klassifikation der beobachteten Signalmuster zu bestimmten Entscheiden. Das Ziel der Theorie ist die Definition eines in noch zu definierender Weise optimalen Empfängers unter der Voraussetzung, dass die statistischen Eigenschaften des Rauschens bekannt seien (parametrische Entscheidungsfunktionen).

Wenn die grundlegende Theorie auch wesentlich allgemeinere Fälle erfasst, so soll in der vorliegenden Arbeit die Anwendung doch auf Probleme beschränkt werden, wo die

<sup>1)</sup> Die Arbeit behandelt nur das Problem der Signalerkennung und nicht die Optimierung der Signale selbst.

621.391.822:621.391-88  
Le travail précité renferme une introduction à la théorie de la perception des signaux dans le bruit superposé. Partant du modèle statique général d'un système de transmission d'informations, on démontre que la fonction de décision optimale garde toujours la forme d'un rapport de probabilité («likelihood ratio test»). A titre d'exemples d'application, on calcule ensuite plus particulièrement les structures les plus simples du récepteur binaire optimal, cohérent et incohérent, au bruit de Gauss blanc superposé, en déterminant également sa probabilité d'erreur<sup>1)</sup>. La connaissance des relations fondamentales du calcul des probabilités est indispensable à la compréhension de ce travail.

Statistik des Rauschens mit allen Parametern vollständig bekannt ist; im speziellen wird hier die Gaussverteilung für die Momentanwerte des Rauschens vorausgesetzt werden, weil sie zu besonders einfachen Ergebnissen führt. In neueren Arbeiten sind als sog. nichtparametrische Entscheidungsfunktionen Empfängerstrukturen untersucht worden, welche wesentlich weniger Kenntnisse über die Rauschstatistik voraussetzen, und daher für viel allgemeinere Fälle gültig sind. Eine vorzügliche Einführung in dieses Gebiet gibt die Arbeit von Thomas [1]<sup>2)</sup>, siehe aber auch [2].

Im folgenden sei ein einfaches statistisches Modell beschrieben, welches zur Herleitung der optimalen Entscheidungsfunktion dient. Es ist vorläufig noch so allgemein, dass es zur Untersuchung praktisch aller denkbaren Fälle von Übertragungsproblemen digitaler Daten herangezogen werden kann.

## 2. Statistisches Modell eines digitalen Übertragungssystems

Das fundamentale Modell eines Übertragungssystems für digitale Daten ist in Fig. 1 dargestellt. Der Sender, welcher über einen rauschenden Kanal Nachrichten in digitaler Form an den Empfänger übermittelt, verfügt über eine abzählbare Menge von  $m$  verschiedenen Signalen  $S_1 \dots S_m$ . Die Gesamtheit

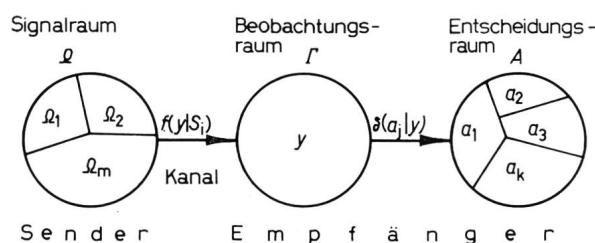


Fig. 1  
Statistisches Modell eines digitalen Übertragungssystems mit den drei Räumen: Signalraum  $\Omega$ , Beobachtungsraum  $\Gamma$  und Entscheidungsraum  $A$ .  $f(y|S_i)$  und  $\delta(a_j|y)$  stellen die bedingten Übergangswahrscheinlichkeiten der einzelnen Elemente dar.  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_m$  Elemente des Signalraumes;  $a_1, a_2, a_3, a_k$  Elemente des Entscheidungsraumes;  $y$  aktuelles Signal

<sup>2)</sup> Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

dieser Signale (das Signalalphabeth) bildet den Signalraum  $\Omega$ . Über diesen Bereich verteilt sind die a priori-Wahrscheinlichkeiten  $\pi_i$ , welche angeben, mit welcher relativen Häufigkeit die einzelnen Signale auftreten. Im speziellen enthält ein binäres Signalalphabeth nur zwei Signale, zum Beispiel  $S_1$  und  $S_2$ , mit den a priori-Wahrscheinlichkeiten  $\pi_1$  bzw.  $\pi_2$ . Allen Signalen gemeinsam ist ihre zeitliche Dauer  $T$ , so dass der Sender nach je  $T$  s mit der Erzeugung eines neuen Signales beginnen kann.

Die Sendersignale führen am Ort des Empfängers zu Zeitfunktionen  $y(t)$ , welche im allgemeinen nicht mehr mit dem ursprünglichen Zeichen übereinstimmen, weil sie vom überlagerten Rauschen in zum voraus unbekannter Art und Weise verändert worden sind. Das Modell enthält daher auch einen Beobachtungsraum  $\Gamma$ , in welchem alle möglichen, vom Empfänger beobachtbaren Signale  $y$  liegen. Der Übergang vom Signalraum auf den Beobachtungsraum stellt eine zufällige Abbildung dar, weil sie wesentlich von der Statistik des Rauschens beeinflusst wird. Immerhin kann bei bekannter Verteilungsfunktion des Rauschens für jedes Element  $y$  des Beobachtungsraumes eine bestimmte, bedingte Wahrscheinlichkeit  $f(y | S_i)^3)$  zu seiner Beobachtung angegeben werden, wenn ein bestimmtes Signal  $S_i$  erzeugt worden ist.

Schliesslich muss der Empfänger das Kontinuum möglicher Beobachtungen im Raum  $\Gamma$  in eine abzählbare Menge möglicher Entscheidungen  $a_j$  überführen. Diese Abbildung  $\delta(a_j | y)$  ist nun im Gegensatz zur ersten Transformation ( $\Omega \rightarrow \Gamma$ ) deterministischer Natur, weil gezeigt werden kann, dass mit zufälligen Entscheidungsfunktionen nicht bessere Resultate erreichbar sind als mit deterministischen. Der Entscheidungsraum  $A$  enthält alle zulässigen Empfängerentscheide. In Bezug auf ihre Anzahl  $k$  sind folgende drei Fälle zu unterscheiden:

a) Die Anzahl  $k$  der Elemente des Entscheidungsraumes stimmt mit der Zahl möglicher Signale überein. Es wird zweckmässigerweise jedem Signal ein bestimmter Entscheid zugeordnet.

b) Die Anzahl der Elemente im Entscheidungsraum ist grösser als diejenige des Signalraumes. Damit wird gegebenenfalls ein Entscheid der Unsicherheit in dem Sinne zulässig, dass der Empfänger dann zu einem definitiven Entscheid noch zusätzliche Angaben braucht. Diese Variante führt auf Systeme mit Rückfragemöglichkeit oder zur sequentiellen Entscheidung nach Wald [3], welche laufend so lange weitere Daten vom Sender anfordert, bis der endgültige Entscheid mit der gewünschten Sicherheit getroffen werden kann. Wenn mit einem solchen System auch die Entscheidung — bei gleichen Anforderungen an die Sicherheit — im Mittel schneller möglich ist, als bei konventionellen, so schränkt die Tatsache, dass die Signaldauer zufällig wird, ihre Anwendungsmöglichkeit doch wesentlich ein.

c) Die Zahl der Elemente des Entscheidungsraumes ist dagegen kleiner als die entsprechende Anzahl der Signale, wenn der Signalverlauf nicht in allen seinen Parametern exakt definiert ist und daher eine ganze Klasse von Signalen ein und derselben Nachricht angehören. Zum Beispiel ist bei einem Mehrfrequenz-Übertragungssystem oft die Phasenlage der einzelnen Signale zufällig, während einzig ihre Frequenz den Träger der Information darstellt. Der Signalraum eines solchen binären Frequenzumtastsystèmes enthält demnach zwei Unterräume, welche je ein Kontinuum möglicher Signale mit den verschiedenen Trägerphasen umfassen (inkohärentes System). Für die Berechnung des optimalen (parametrischen) Empfängers ist die Kenntnis der statistischen Eigenschaften der zufälligen Parameter erforderlich. Für die Trägerphase wird im allgemeinen die Gleichverteilung angenommen, siehe Abschnitt 3.2.

Die Optimierung der Abbildungsfunktion  $\delta(a_j | y)$  in Fig. 1 stellt das eigentliche Ziel der Theorie dar. Als Optimierungskriterien kommen in Betracht:

<sup>3)</sup> Mit  $F(y)$  wird der Wert der Verteilungsfunktion  $F$  einer Zufallsgrössen an der Stelle  $y$  bezeichnet; mit  $f(y)$  dagegen ihre Dichtefunktion nach

$$f(y) = \frac{d}{dy} F(y)$$

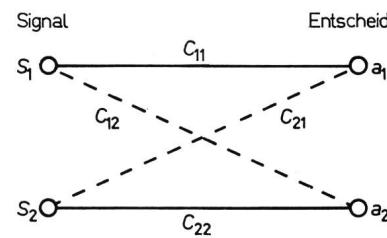


Fig. 2

Verlustfaktoren  $C_{ij}$  als Bewertung des Entscheides  $a_j$ , wenn tatsächlich das Signal  $S_i$  gesendet wurde

$a_1, a_2$  Entscheide;  $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$  Verlustfaktoren;  $S_1, S_2$  Signale

- a) Die Regel von Bayes nach minimalem Risiko;
- b) Die Minimax-Regel, welche das geringste Maximum des Risikos bei Variation der a priori-Wahrscheinlichkeiten sucht;
- c) Das Kriterium von Neyman-Pearson, welches bei einer gegebenen Wahrscheinlichkeit für einen Fehlalarm das System mit der grössten Erkennungswahrscheinlichkeit eines Signales sucht.

Wie gezeigt werden kann, führen alle drei Kriterien auf dieselben Entscheidungsstrukturen [4]. Im folgenden wird das Kriterium von Bayes Anwendung finden, weil es die Herleitung des optimalen Detektors in besonders einfacher Weise ermöglicht.

Die Zielfunktion der Optimierung nach Bayes stellt das Risiko dar. Zu seiner Definition müssen Verlustfaktoren  $C_{ij}$  eingeführt werden, welche gemäss Fig. 2 Gewichte der  $mk$  möglichen Kombinationen von Signalen  $S_i$  und Entscheiden  $a_j$  in dem Sinne darstellen, dass Entscheide mit hohen Verlusten möglichst selten sein sollen. Allgemein gilt die Konvention, dass der Verlust eines richtigen Entscheides zu Null normiert wird, während der Verlustfaktor  $C_{ij} \geq 0$  für  $i \neq j$  ist. Als bedingtes Risiko  $r(\delta | S_i)$  wird der Erwartungswert<sup>4)</sup> des Verlustes bezeichnet, den ein bestimmtes Signal  $S_i$  hervorruft. Es hängt natürlich von der Entscheidungsfunktion  $\delta$  ab und lautet für den binären Fall ( $k = 2$ ):

$$r(\delta | S_i) = \int_{\Gamma} dy f(y | S_i) \{ C_{11} \delta(a_1 | y) + C_{12} \delta(a_2 | y) \} \quad (1)$$

Das Risiko selbst ist schliesslich der Erwartungswert der bedingten Risiken über alle Signale. Hier wird die Häufigkeit  $\pi_i$  bedeutungsvoll, mit welcher die einzelnen Signale  $S_i$  auftreten. Man findet für das Risiko des zweiwertigen Systems ( $m = 2$ ):

$$\begin{aligned} R(\pi, \delta) &= \sum_{i=1}^2 \pi_i r(\delta, S_i) = \\ &= \sum_{i=1}^2 \pi_i \int_{\Gamma} dy f(y | S_i) \{ C_{11} \delta(a_1 | y) + C_{12} \delta(a_2 | y) \} \end{aligned} \quad (2)$$

Unter Berücksichtigung der Normierung, dass richtige Entscheide keinen Verlust verursachen sollen, gilt entsprechend:

$$R(\pi, \delta) = \int_{\Gamma} dy \{ \pi_1 f(y | S_1) C_{12} \delta(a_2 | y) + \pi_2 f(y | S_2) C_{21} \delta(a_2 | y) \} \quad (3)$$

Das Optimierungskriterium von Bayes verlangt von der Entscheidungsfunktion, dass sie zum minimalen Risiko führe.

<sup>4)</sup> Als Erwartungswert  $E(x)$  einer Zufallsgrösse  $x$  wird das Moment erster Ordnung

$$E(x^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx$$

mit  $n=1$  bezeichnet.

Ausgehend von der Annahme, dass der Entscheidungsraum nur die beiden Elemente  $a_1, a_2$  aufweisen soll und der Tatsache, dass sicher bei jedem Signal ein Entscheid gefällt wird, gilt:

$$\delta(a_2 | y) = 1 - \delta(a_1 | y) \quad (4)$$

Mit dieser Beziehung kann Gl. (3) umgeformt werden, so dass nur noch ein Entscheid, z. B.  $\delta(a_1 | y)$  explizit erscheint:

$$\begin{aligned} R(\pi, \delta) &= \pi_1 \int_{\Gamma} dy f(y | S_1) C_{12} + \\ &+ \int_{\Gamma} dy \delta(a_1 | y) \{ \pi_2 f(y | S_2) C_{21} - \\ &- \pi_1 f(y | S_1) C_{12} \} = J_1 + J_2 \end{aligned} \quad (5)$$

Das erste Integral ist von der Entscheidungsfunktion unabhängig, im Verlauf der Optimierung wird daher nur noch  $J_2$  untersucht. Im weiteren wird die Abkürzung

$$g(y) = \pi_2 f(y | S_2) C_{21} - \pi_1 f(y | S_1) C_{12} \quad (6)$$

eingeführt. Der Beobachtungsraum  $\Gamma$  kann nun nach folgenden Kriterien eingeteilt werden:

- $\Gamma^+$  enthält alle  $y$ , so dass  $g(y) > 0$
- $\Gamma^=$  enthält alle  $y$ , so dass  $g(y) = 0$
- $\Gamma^-$  enthält alle  $y$ , so dass  $g(y) < 0$

Damit gilt für  $J_2$ :

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{\Gamma} dy g(y) \delta(a_1 | y) = \\ &= \int_{\Gamma^+} dy g(y) \delta(a_1 | y) - \\ &- \int_{\Gamma^-} dy |g(y)| \delta(a_1 | y) + \int_{\Gamma^=} dy g(y) \delta(a_1 | y) \end{aligned} \quad (7)$$

Da das dritte Integral stets verschwindet, weil die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis  $\{g(y) = 0\}$  selbst gleich null ist, genügt es, um das Risiko möglichst klein zu machen, das erste Integral so klein wie möglich und das zweite so gross wie möglich zu halten. Dies gelingt dank der Tatsache, dass die Entscheidungsfunktion nur die beiden Werte  $\delta = 0, 1$  annehmen kann, ohne weiteres mit Hilfe der Definition

$$\delta(a_1 | y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } g(y) \geq 0 \\ 1 & \text{falls } g(y) < 0 \end{cases} \quad (8)$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (6) findet man nun für den optimalen Empfänger die Entscheidungsfunktion

$$\delta(a_1 | y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \frac{f(y | S_1)}{f(y | S_2)} \geq \frac{\pi_2 C_{21}}{\pi_1 C_{12}} \\ 0 & \text{falls } \frac{f(y | S_1)}{f(y | S_2)} < \frac{\pi_2 C_{21}}{\pi_1 C_{12}} \end{cases} \quad (9)$$

Die Vorschrift des optimalen Empfängers lautet demnach: Der Entscheid  $\delta(a_1 | y) = 1$  (entsprechend «Signal  $S_1$  vorhanden») wird dann getroffen, wenn der Quotient der beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten  $f(y | S_1)$ , bzw.  $f(y | S_2)$  grösser ist als die Schwelle  $\pi_2 C_{21} / \pi_1 C_{12}$ , und umgekehrt wird  $\delta(a_2 | y) = 1$  (entsprechend «Signal  $S_2$  vorhanden») entschieden, wenn der Quotient kleiner ist als diese Schwelle. Definiert man mit dem Wahrscheinlichkeitsverhältnis  $L(y)$  («likelihood ratio») diesen Quotienten der bedingten Wahrscheinlichkeiten, so folgt für die optimale Entscheidungsvorschrift kurz:

$$L(y) \geq \frac{\pi_2 C_{21}}{\pi_1 C_{12}} \quad (10)$$

Als Spezialfall sei hier der ideale Empfänger erwähnt, welcher die beiden falschen Entscheide in gleicher Weise belastet:

$$C_{21} = C_{12} = 1$$

Er weist die Eigenschaft auf, dass nicht nur das Risiko, sondern auch die Fehlerwahrscheinlichkeit minimal ist.

Die vorliegende Entscheidungsfunktion nach Gl. (9) gilt für alle binären Empfänger, welche nach dem Kriterium eines minimalen Risikos optimiert werden. Die Spezialisierung auf einzelne Fälle erfolgt dadurch, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(y | S_i)$  von der tatsächlich vorliegenden Rauschstatistik abhängt, nämlich von der Verteilungsfunktion der Momentanwerte des Rauschens sowie — über die Korrelationsfunktion — von den spektralen Eigenschaften der Störungen. Wenn eine exakte Realisierung der optimalen Entscheidungsfunktion infolge ihrer Komplexität auch oft unzweckmässig sein kann, so erlaubt die Theorie doch die Funktionsweise des bestmöglichen Systemes zu bestimmen und seine Leistungsfähigkeit zu berechnen, so dass bei der Frage nach einem möglichen suboptimalen System doch eine Bilanz zwischen Aufwand zur Realisierung und möglicher Entscheidungssicherheit erleichtert wird.

Die eben durchgeföhrte Herleitung gilt für den binären Fall ( $m = 2$ ). Den optimalen  $m$ -wertigen Detektor mit  $m > 2$  findet man auf ganz ähnliche Weise. Das Risiko  $R$  muss dann über alle  $m$  mit den verschiedenen Signalen verbundenen bedingten Risiken gerechnet werden, so dass entsprechend Gl.(2) gilt:

$$R(\pi, \delta) = \sum_{i=1}^m \pi_i \int_{\Gamma} dy f(y | S_i) \sum_{j=1}^m C_{ij} \delta(a_j | y) \quad (11)$$

wobei wieder die Einschränkungen einer deterministischen Entscheidungsfunktion gültig sind:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \delta(a_j | y) &= 1 \\ \delta(a_j | y) &= 0, 1 \end{aligned}$$

Erneut können die apriori-Wahrscheinlichkeiten  $\pi_i$ , die Verlustfaktoren  $C_{ij}$  und die Übergangswahrscheinlichkeiten  $f(y | S_i)$  zusammengefasst werden in

$$A_j(y) = \sum_{i=1}^m \pi_i C_{ij} f(y | S_i) \quad (12)$$

so dass man für das Risiko findet:

$$R(\pi, \delta) = \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma} dy A_j(y) \delta(a_j | y)$$

Hier wird nun der Beobachtungsraum  $\Gamma$  derart in  $m$  Bereiche unterteilt, dass in jedem Unterraum  $\Gamma_k$  gilt:

$$\Gamma_k: \text{enthält alle } y, \text{ so dass } A_k(y) = \min_j A_j(y) \quad (13)$$

Man findet in der Folge für die optimale Entscheidungsfunktion [4]:

$$\delta(a_j | y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A_j(y) < \min_i A_i(y) \\ 1 & \text{falls } A_j(y) = \min_i A_i(y) \end{cases}$$

Der ideale  $m$ -wertige Empfänger, welcher die richtigen Entscheide mit  $C_{ii} = 0$  und die falschen mit  $C_{ij} = 1$  ( $i \neq j$ ) bewertet, bildet unter Berücksichtigung von Gl. (13) die Entscheidungsfunktion:

$$\delta_I(a_j | y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \pi_j f(y | S_j) < \max_k \pi_k f(y | S_k) \\ 1 & \text{falls } \pi_j f(y | S_j) = \max_k \pi_k f(y | S_k) \end{cases} \quad (14)$$

Durch Anwendung des Satzes von Bayes [5] kann diese Funktion übergeführt werden in:

$$\delta_I(a_j | y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } f(S_j | y) < \max_k f(S_k | y) \\ 1 & \text{falls } f(S_j | y) = \max_k f(S_k | y) \end{cases} \quad (15)$$

Der optimale  $m$ -wertige Empfänger ( $m \geq 2$ ) bestimmt also dasjenige Zeichen  $S_k$ , dessen (nachträgliche) aposteriori-Wahrscheinlichkeit  $f(S_k | y)$  maximal ist, nachdem das Signal  $y$  beobachtet wurde.

In den folgenden Abschnitten wird gezeigt, wie die generelle Entscheidungsvorschrift des optimalen binären Empfängers nach Gl. (9) eingesetzt wird, um für einige Spezialfälle explizite Strukturen zu finden.

### 3. Anwendung der Theorie auf einige Spezialfälle

#### 3.1 Der optimale kohärente Empfänger

Den allereinfachsten Fall der Entscheidung stellt der binäre kohärente Empfänger bei additiv überlagertem, weissem gaußschem Rauschen dar. Der kohärente Empfänger zeichnet sich dadurch aus, dass ihm die Signale in allen seinen Einzelheiten zum voraus bekannt sind; im Gegensatz dazu muss bei einem inkohärenten Empfänger die Trägerphase der Signale als Zufallsgröße betrachtet werden, wodurch der Entscheidungsvorgang etwas erschwert wird (siehe Abschnitt 3.2). Das weisse gaußsche Rauschen besitzt eine konstante spektrale Leistungsdichte bei allen Frequenzen und zeigt eine gaußsche Verteilung seiner Momentanwerte.

Für die Anwendung der Theorie wird eine Vektordarstellung der Signale verwendet, wobei mit einem Grenzübergang am Schluss der Ableitung die Struktur eines kontinuierlich arbeitenden Empfängers gefunden werden kann. Das vom Empfänger in zeitlichen Intervall  $k T \leq t < (k+1) T$  beobachtete Signal  $y(t)$  wird zu diesem Zweck an  $m$  Stützstellen abgetastet und die Folge der erhaltenen Momentanwerte als Vektor ( $y$ ) interpretiert:

$$Y = y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_m)$$

Auf Grund der linearen Überlagerung von Signal und Rauschen gilt die Vektorbeziehung:

$$Y = S + N$$

Unter der Voraussetzung von weissem gaußschem Rauschen sind die Elemente  $n_i$  des Rauschvektors  $N$  unabhängige, normalverteilte Zufallsgrößen, so dass die Verbundwahrscheinlichkeit der Momentanwerte  $n_1, \dots, n_m$  gegeben ist und durch die  $m$ -dimensionale Gaussverteilung:

$$\begin{aligned} f_N(N) = f_N(n_1, \dots, n_m) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{m/2}} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^m n_i^2}{2\sigma^2}\right) = \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{m/2}} \exp\left(-\frac{|N|^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (16)$$

(Darin ist mit  $|N|$  der Betrag des Vektors  $N$  und  $\sigma^2$  die mittlere Rauschleistung). Entsprechend den Ergebnissen des letzten Abschnittes bildet der optimale Empfänger das Wahrscheinlichkeitsverhältnis

$$L(Y) = \frac{f(Y|S_1)}{f(Y|S_2)} \geq L_0 \quad (17)$$

und trifft seinen Entscheid in Abhängigkeit davon, ob dieser Quotient grösser oder kleiner als eine gewisse Schwelle  $L_0$  ist. Nun kann leicht gezeigt werden, dass für die bedingte Wahrscheinlichkeit  $f(Y|S_k)$  des beobachteten Vektors  $Y$ , unter der Voraussetzung, dass das Signal  $S_k$  erzeugt wurde, gilt [4]:

$$f(Y|S_k) = f_N(Y - S_k)$$

so dass das Wahrscheinlichkeitsverhältnis in Gl. (17) folgendermassen dargestellt werden kann:

$$L(Y) = \frac{f_N(Y - S_1)}{f_N(Y - S_2)} \quad (18)$$

Setzt man darin die Gaussverteilung nach Gl. (16) ein, so findet man nach einiger Rechnung

$$L(Y) = \exp\left(-\frac{|S_1|^2 - |S_2|^2 + 2[Y][S_2]^T - 2[Y][S_1]^T}{2\sigma^2}\right) \quad (18)$$

wobei mit  $[S_2]^T$  die transponierte Form der Matrix  $[S_2]$  bezeichnet wurde. Da die Entscheidungsaufgabe in einem Vergleich dieser Grösse mit einem Schwellwert besteht, kann ebensogut auch der Logarithmus verwendet werden, weil er eine streng monotone Funktion seines Argumentes ist. Man erhält damit für die Entscheidungsfunktion des optimalen kohärenten Empfängers unter Berücksichtigung von Gl. (9):

$$|S_1|^2 - |S_2|^2 + 2[Y][S_2]^T - 2[Y][S_1]^T \geq 2\sigma^2 \ln\left(\frac{\pi_1 C_{12}}{\pi_2 C_{21}}\right) \quad (19)$$

Trifft man die vereinfachenden Annahmen, dass die beiden Signale gleiche Energie  $\epsilon = |S_1|^2 = |S_2|^2$  aufweisen, ferner dass die Verlustfaktoren  $C_{21} = C_{12}$  sowie die apriori-Wahrscheinlichkeiten  $\pi_1 = \pi_2$  gleich gross seien, so ergibt sich diese Entscheidungsregel in ihrer einfachsten Form:

Entscheid «Signal  $S_2$  vorhanden», falls  $[Y][S_2]^T \geq [Y][S_1]^T$       (20)  
Entscheid «Signal  $S_1$  vorhanden», falls  $[Y][S_2]^T < [Y][S_1]^T$

Man erkennt leicht eine fundamentale Eigenschaft dieses optimalen Empfängers, dass nämlich seine Entscheidung auf den Produkten  $[Y][S_k]^T$  beruht. Diese Grössen sind aber nichts anderes als eine diskrete Form der Kreuzkorrelation zwischen dem beobachteten Signal  $Y$  und dem ungestörten Muster  $S_k$ . Der Empfänger entscheidet sich für dasjenige Signal, dessen Kreuzkorrelation mit dem beobachteten Vektor  $Y$  überwiegt. Er wird deshalb auch Korrelationsdetektor genannt.

Wenn die Zahl  $m$  der Proben über alle Grenzen anwächst und gleichzeitig — als Folge des vorausgesetzten weissen Rauschens — die Momentanwerte von  $y(t)$  statistisch unabhängig bleiben, so erhält man im Grenzfall den kontinuierlichen Korrelationsdetektor, dessen Funktion dem angepassten Filter («matched filter») entspricht. In der Tat sind Korrelation und Filterung mit dem optimalen Filter bei additivem weissen Rauschen zwei verschiedene Interpretationen ein und desselben Vorganges. Sie unterscheiden sich nur darin, dass man die Korrelation als Vorgang im Zeitbereich, die Filterung dagegen im Frequenzbereich betrachtet.

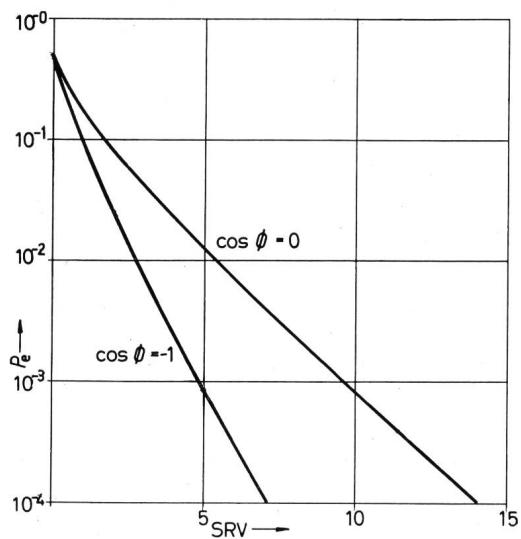


Fig. 3

Fehlerwahrscheinlichkeiten  $P_e$  des kohärenten Systems mit entgegengesetzten Signalen ( $\cos \phi = -1$ ) und orthogonalen Signalen ( $\cos \phi = 0$ ) in Funktion des Verhältnisses SRV von Signalenergie  $\varepsilon$  zur mittleren Rauschleistung  $\sigma^2$

SRV Signal/Rausch-Verhältnis

Für die Fehlerwahrscheinlichkeit  $P_e$  des Detektors nach Gl. (19) gilt

$$P_e = \pi_1 P(a_2 | S_1) + \pi_2 P(a_1 | S_2) \quad (22)$$

worin z. B. mit  $P(a_2 | S_1)$  die Übergangswahrscheinlichkeit des Signales  $S_1$  in den Entscheid  $a_2$  bezeichnet wird. Setzt man für beide Signale gleiche Energien  $\varepsilon = |S_1|^2 = |S_2|^2$  voraus, so wird immer dann der Entscheid  $a_2$  getroffen, wenn nach Gl. (19) gilt:

$$[Y][S_2]^T - [Y][S_1]^T \geq \sigma^2 \ln \left\{ \frac{\pi_1 C_{12}}{\pi_2 C_{21}} \right\} \quad (23)$$

Im weiteren wird noch  $[S_1][S_2]^T = \varepsilon \cos \Phi$  definiert, so dass  $\cos \Phi$  den normierten Kreuzkorrelationskoeffizienten oder  $\Phi$  den Winkel zwischen den beiden Signalen  $[S_1], [S_2]$  im  $m$ -dimensionalen Raum darstellt. Die Entscheidungsfunktion in Gl. (22) kann wie folgt umgeformt werden:

$$[Y][S_2]^T - [Y][S_1]^T = \varepsilon [\cos(\Phi) - 1] + [N][S_2] - [S_1]^T \quad (24)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit  $P(a_2 | S_1)$  umfasst demnach alle Fälle, bei denen die Schwelle in Gl. (23) kleiner ist als die rechte Seite in Gl. (24). Diese Grösse stellt aber eine normalverteilte Zufallszahl dar, welche, wie sich durch Einsetzen leicht zeigen lässt, den Erwartungswert

$$u_e = \varepsilon [\cos \Phi - 1]$$

und die Streuung

$$\sigma_e^2 = 2 \sigma^2 \varepsilon (1 - \cos \Phi)$$

aufweist. Damit lautet die Wahrscheinlichkeit des Entscheides ( $a_2 | S_1$ ):

$$\begin{aligned} P(a_2 | S_1) &= \int_{\sigma^2 \ln \frac{\pi_1 C_{12}}{\pi_2 C_{21}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \pi \sigma_e^2}} \exp -\frac{(x - u_e)^2}{2 \sigma_e^2} dx = \\ &= 1 - \text{erf} \left[ \frac{\sigma^2 \ln \frac{\pi_1 C_{12}}{\pi_2 C_{21}} + \varepsilon (1 - \cos \Phi)}{\sqrt{2 \sigma^2 \varepsilon (1 - \cos \Phi)}} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

wobei mit

$$\text{erf}(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2 \pi}} \exp -\frac{t^2}{2} dt$$

die normierte Fehlerfunktion bezeichnet wurde, deren Funktionswerte tabelliert sind, z. B. in [6]. Entsprechend findet man für die Wahrscheinlichkeit  $P(a_1 | S_2)$  den Ausdruck:

$$P(a_1 | S_2) = \text{erf} \left[ \frac{\sigma^2 \ln \frac{\pi_1 C_{12}}{\pi_2 C_{21}} - \varepsilon (1 - \cos \Phi)}{\sqrt{2 \sigma^2 (1 - \cos \Phi) \varepsilon}} \right] \quad (26)$$

Die Fehlerwahrscheinlichkeit des gesamten Systems ergibt sich nun durch Einsetzen der Gl. (25) und (26) in Gl. (22). Hier soll nur der Spezialfall des idealen Beobachters ( $C_{21} = C_{12} = 1$ ) mit gleichen a priori-Wahrscheinlichkeiten  $\pi_1 = \pi_2 = 1/2$  untersucht werden. Er weist entsprechend Gl. (25) und (26) die Fehlerwahrscheinlichkeit

$$P_e = 1 - \text{erf} \left[ \sqrt{\frac{\varepsilon (1 - \cos \Phi)}{2 \sigma^2}} \right] \quad (27)$$

auf. An diesem Ergebnis ist die interessante Tatsache festzuhalten, dass in einem binären System mit gleichwahrscheinlichen Zeichen nur das Verhältnis von Signalenergie  $\varepsilon$  zur mittleren Rauschleistung  $\sigma^2$  sowie das innere Produkt (Kreuzkorrelation)  $\cos \Phi$  der beiden Signale die Fehlerwahrscheinlichkeit bestimmen, und nicht etwa die tatsächliche Form der Signale. Optimiert man daher den Kreuzkorrelationskoeffizienten so, dass die Fehlerwahrscheinlichkeit minimal wird, so findet man:

$$P_e = 1 - \text{erf} \left[ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma^2}} \right] \quad (28)$$

Diese minimale Fehlerwahrscheinlichkeit wird dann erreicht, wenn  $\cos \Phi = -1$  oder  $[S_1][S_2]^T = -\varepsilon$  ist, das heisst, wenn im  $m$ -dimensionalen Vektorraum die Signale einen möglichst grossen Abstand voneinander aufweisen («sich möglichst stark voneinander unterscheiden»). Dabei handelt es sich um entgegengesetzte Signale, während Signale mit verschwindender Kreuzkorrelation  $[S_1][S_2]^T = 0$  orthogonal genannt werden. In Fig. 3 ist der Verlauf der Fehlerwahrscheinlichkeiten für verschiedene Signal/Rausch-Verhältnisse für die beiden Fälle entgegengesetzter Signale ( $\cos \Phi = -1$ ) und orthogonalen Signale ( $\cos \Phi = 0$ ) dargestellt.

### 3.2 Der optimale inkohärente Empfänger

Inkohärent heisst ein Empfänger dann, wenn ihm die Trägerphase  $\varphi_i$  eines Signales der Form

$$S_i(t, \varphi_i) = A_i(t) \cos(\omega_i t + \varphi_i) \quad (29)$$

zum voraus nicht bekannt ist, und er sie demzufolge als Zufallsgrösse betrachten muss. Das inkohärente System ist ein Spezialfall der statistischen Entscheidung zwischen mehrfachen Hypothesen, indem die Unterräume  $\Omega_i$  eines Signalraumes  $\Omega$  selbst noch eine beliebige Menge von einzelnen Elementen umfassen können, nämlich die Signale  $s_i(t, \varphi)$  einer Klasse  $S_i$  mit allen möglichen Trägerphasen  $\varphi$ . Eine weitere Verallgemeinerung kann zum Beispiel darin bestehen, dass die Signalamplitude zufälligen Schwankungen unterworfen ist. Die Herleitung eines im Sinne von Bayes optimalen Detektors erfolgt auch dann auf ganz entsprechende Weise, vorausgesetzt immer, dass die statistischen Eigenschaften all dieser Parameter (Trägerphase, Signalamplitude, usw.) bekannt sind.

Trotzdem wird die optimale Struktur infolge ihrer Komplexität nicht mehr realisierbar sein, und nur als Grenze des theoretisch erreichbaren dienen können.

In diesem Abschnitt soll der allereinfachste Fall eines binären, inkohärenten Empfängers nach [4] behandelt werden, wobei der Optimierung hier ein binäres EIN/AUS-System zu Grunde gelegt sei, dessen Struktur besonders übersichtlich wird. Die Herleitung der optimalen Entscheidungsfunktion, welche mit minimalem Risiko entscheidet, ob das Signal gemäß Gl. (29) anwesend ist oder nicht, führt über den gleichen Weg wie beim kohärenten Empfänger, so dass hier nur die Unterschiede skizziert zu werden brauchen. Die entscheidende Änderung besteht darin, dass hier das Signal nicht mehr in allen Teilen exakt bekannt ist, sondern vielmehr von einem weiteren Parameter  $\varphi$  abhängt, welcher zwar die tatsächliche Signalform beeinflusst, für die Entscheidung aber völlig unbedeutend ist. Ferner sind hier natürlich die Signalenergien nicht mehr gleich gross, indem zum Beispiel  $S_1 = 0$  ist.

Die Herleitung gelingt hier einfacher am kontinuierlichen Modell; infolge des vorausgesetzten weissen Rauschens bleiben auch im Grenzfall die Momentanwerte des Rauschens aufeinanderfolgender Zeitintervalle statistisch unabhängig.

Das bedingte Risiko des vorliegenden Modells entspricht auch hier dem Erwartungswert des Verlustes, den eine bestimmte Klasse von Signalen hervorruft:

$$r[\delta | S_1(\varphi_i)] = \int_{\varphi_i} d\varphi_i p(\varphi_i) \int_{\Gamma} dy f[y | S_1(\varphi_i)] \{ C_{11} \delta(a_1 | y) + C_{12} \delta(a_2 | y) \} \quad (30)$$

Hier wurde mit  $p(\varphi_i)$  die Dichtefunktion der Trägerphase gekennzeichnet. Dafür wird im weiteren die Gleichverteilung vorausgesetzt werden mit:

$$p(\varphi_i) = \frac{1}{2\pi} \quad -\pi < \varphi_i \leq +\pi$$

Entsprechend Gl. (2) findet man das Risiko durch Summation aller bedingten Risiken über alle möglichen Signale. Auch hier ergibt sich als optimale Entscheidungsfunktion ein Wahrscheinlichkeitsverhältnis, nun aber in erweiterter Form [vgl. Gl. (9)]:

$$\delta(a_1 | y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f[y | S_2(\varphi_2)] d\varphi_2}{f(y | S_1)} \leq \frac{\pi_2 C_{12}}{\pi_1 C_{21}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (31)$$

Im weiteren wird wieder die Gauss-Statistik der Rauschamplituden vorausgesetzt mit konstanter, einseitiger spektraler Leistungsdichte  $\eta$  [W/Hz]:

$$L(Y) = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi_2 \exp \left\{ -\frac{1}{\eta} \left[ \int_0^T [y(t) - s_2(t, \varphi_2)] dt \right]^2 \right\}}{\exp \left\{ -\frac{1}{\eta} \left[ \int_0^T y^2(t) dt \right]^2 \right\}} \quad (32)$$

Im folgenden sind zwei Vereinfachungen möglich. Das zeitliche Integral über  $y^2(t)$  ist sicher von der Trägerphase  $\varphi_2$  unabhängig und kann daher weggekürzt werden. Zum zweiten ist auch das Integral über  $s_2^2(t, \varphi_2)$  von der Trägerphase praktisch unabhängig, wenn die Modulation  $A_i(t)$  in Gl. (29) langsam im Vergleich zur Trägerfrequenz  $\omega_i$  erfolgt. Unter dieser

Voraussetzung ist die Signalenergie fast unabhängig von der tatsächlichen Trägerphase. Dieser konstante Faktor kann daher nachträglich mit den Schwelle verrechnet werden. Die somit vereinfachte Entscheidungsfunktion lautet nun:

$$L(Y) = \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi_2 \exp \left\{ \frac{2}{\eta} \int_0^T y(t) s_2(t, \varphi_2) dt \right\} \quad (33)$$

Gemäß dieser Vorschrift ist das Kreuzkorrelationsprodukt  $y(t)s_2(t, \varphi_2)$  zwischen dem beobachteten Signal und dem ungestörten, von der Trägerphase  $\varphi_2$  abhängigen Muster über alle möglichen Phasen zu mitteln. Allgemein erscheinen die zur Entscheidung irrelevanten Parameter in Form von Erwartungswerten in den Entscheidungsfunktionen. Im vorliegenden Fall ist es der Erwartungswert der Kreuzkorrelation über die Trägerphasen. Setzt man im Interesse einer weiteren Vereinfachung die Amplitude des Trägers im Intervall  $0 < t \leq T$  als konstant voraus:  $A_2(t) = A$ , so erhält man durch Einsetzen von Gl. (29):

$$L(Y) = \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi_2 \exp \left\{ \frac{2A}{\eta} \int_0^T y(t) \cos(\omega_2 t + \varphi_2) dt \right\}$$

Unter Verwendung von trigonometrischen Transformationen und der Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} e_s &= \int_0^T y(t) \sin(\omega_2 t) dt \\ e_c &= \int_0^T y(t) \cos(\omega_2 t) dt \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

erhält man schliesslich

$$L(Y) = \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi_2 \exp \left\{ \frac{2A}{\eta} (e_c^2 + e_s^2) \cos \left[ \varphi + \arctan \frac{e_s}{e_c} \right] \right\}$$

Nun ist aber die modifizierte Besselfunktion der Ordnung Null definiert durch

$$I_0(z) = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \exp(z \cos \theta) d\theta$$

so dass mit dieser Hilfe die Entscheidungsfunktion die folgende einfache Gestalt annimmt:

$$L(Y) = I_0 \left( \frac{2AR}{\eta} \right) \geq L'_0 \quad (35)$$

worin

$$R = \sqrt{e_c^2 + e_s^2} \quad (36)$$

die Umhüllende des Prozesses  $y(t)$  darstellt.

Da aber die modifizierte Besselfunktion nullter Ordnung eine streng monotone Funktion ihres Argumentes ist, mithin also auch die inverse Funktion definiert ist, kann von Gl. (34) von beiden Seiten die zur Besselfunktion inverse Funktion eingesetzt werden, so dass — nach Verrechnung konstanter Faktoren — die einfache Entscheidungsfunktion

$$R \geq L_0'' \quad (37)$$

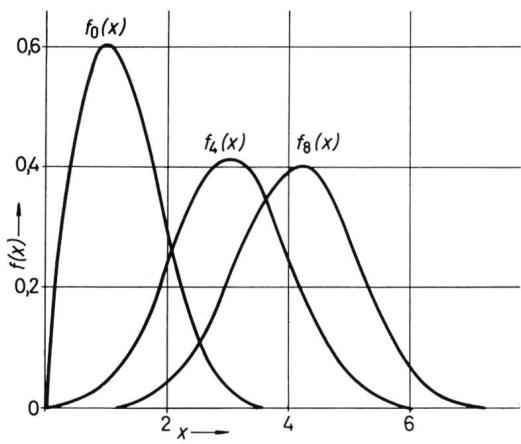


Fig. 4

**Wahrscheinlichkeitsdichten  $p_i(x)$  der Umhüllenden von schmalbandigem Gaußschem Rauschen mit den Signal/Rausch-Verhältnissen  $i = 0,4,8$**

$f_0(x)$  ist die Rayleigh-Verteilung  
 $f_4, f_8$  Riceverteilung mit dem Signal/Rausch-Verhältnis 4 bzw. 8;  $x$  Umhüllende

übrig bleibt. Der optimale inkohärente Detektor untersucht demnach die Umhüllende am Ausgang des optimalen Filters und entscheidet sich dann für ein Signal, wenn sie einen bestimmten Schwellwert überschreitet. Der inkohärente Empfänger wird daher auch Enveloppen-Detektor genannt.

Bezeichnet man wieder mit  $\pi_1$  die Wahrscheinlichkeit, dass kein Signal auftritt ( $S_1 = 0$ ) und mit  $\pi_2$  die Wahrscheinlichkeit für ein Signal ( $S_2 \neq 0$ ), so gilt für die Fehlerwahrscheinlichkeit erneut die Beziehung (22). Die Wahrscheinlichkeit  $P(a_2 | S_1)$ , ein Signal anzuzeigen, wenn tatsächlich keines vorhanden ist, lautet<sup>5)</sup>:

$$P(a_2 | S_1) = P(R > L_0'')$$

Nun ist aber die Umhüllende keine gaußsche Zufallsgröße, sondern weist, wie sich leicht zeigen lässt, eine Rayleigh-Verteilung auf. Die Hilfsgrößen  $e_c, e_s$  in Gl. (34) sind selbst normalverteilt und weisen, unter der Voraussetzung, dass  $S_1 = 0$  war, den Erwartungswert

$$E(e_c) = E(e_s) = 0$$

und die Streuung

$$E(e_c^2) = E(e_s^2) = \frac{\eta T}{4}$$

sowie die Kreuzkorrelation

$$E(e_s e_c) = 0$$

auf. Die Verbundwahrscheinlichkeit von  $e_s, e_c$  ist daher das Produkt der beiden einzelnen Gaussverteilungen:

$$f(e_c, e_s) = \frac{2}{\pi \eta T} \exp \left\{ -\frac{2(e_c^2 + e_s^2)}{\eta T} \right\}$$

Eine einfache Transformation der beiden statistischen Variablen  $e_s, e_c$  in die Umhüllende  $R$  nach Gl. (36) ergibt ihre Dichtefunktion nach Rayleigh:

$$f(R | S = S_1) = \frac{4R}{\eta T} \exp \left\{ -\frac{2R^2}{\eta T} \right\}$$

Die Wahrscheinlichkeit  $P(a_2 | S_1)$  ist demnach gegeben durch das Integral von  $p(R | S = S_1)$  über alle  $R \geq L''_0$ :

<sup>5)</sup> mit  $P(z)$  wird die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $z$  bezeichnet.

$$p(a_2 | S_1) = \int_{L''_0}^{\infty} f(R | S = S_1) dR = \exp \left\{ -\frac{2(L''_0)^2}{\eta T} \right\}$$

Auf gleiche Weise findet man die Verteilung der Größen  $e_c, e_s$ , wenn sie von Signal *und* Rauschen stammen. Nur verschwinden ihre Erwartungswerte nicht mehr, sondern es gilt dann:

$$E(e_s) = \frac{A T}{2} \sin \varphi$$

und

$$E(e_c) = \frac{A T}{2} \cos \varphi$$

Die Streuungen bleiben sich jedoch gleich und ebenso verschwindet wieder ihre Kreuzkorrelation. Für die Dichte der Umhüllenden findet man mit Hilfe derselben Transformation die Ricesche Dichtefunktion [5]:

$$f(R | S = S_2) = \frac{4R}{\eta T} \exp \left\{ -\frac{2R^2}{\eta T} \right\} \exp \left\{ -\frac{A^2 T}{2\eta} \right\} I_0 \left( \frac{2AR}{\eta T} \right)$$

worin  $I_0(\cdot)$  wieder die modifizierte Besselfunktion ist (Fig. 4).

Schliesslich gilt für die Wahrscheinlichkeit  $p(a_1 | S_2)$ , ein tatsächlich vorhandenes Signal  $S_2$  nicht zu erkennen:

$$p(a_1 | S_2) = \int_0^{L''_0} f(R | S = S_2) dR$$

Sind die apriori-Wahrscheinlichkeiten  $\pi_1 = \pi_2 = 1/2$  und die Verluste  $C_{21} = C_{12} = 1$  wieder gleich gross, so arbeitet der ideale Beobachter mit der Schwelle

$$L''_0 = \frac{\eta}{2A} I_0^{-1} \left( \exp \left( \frac{A^2 T}{2\eta} \right) \right)$$

worin  $I_0^{-1}$  die zur modifizierten Besselfunktion inverse Funktion darstellt. Diesen Zusammenhang findet man leicht durch Differentiation der Fehlerwahrscheinlichkeit nach der Schwelle. Die Fehlerwahrscheinlichkeiten dieses idealen Empfängers sind in Fig. 4 in Abhängigkeit vom Verhältnis der Signalernergie zur spektralen Rauschleistungsdichte eingezzeichnet. In der gleichen Figur ist auch die Fehlerwahrscheinlichkeit eines entsprechenden kohärenten EIN/AUS-Systems dar-

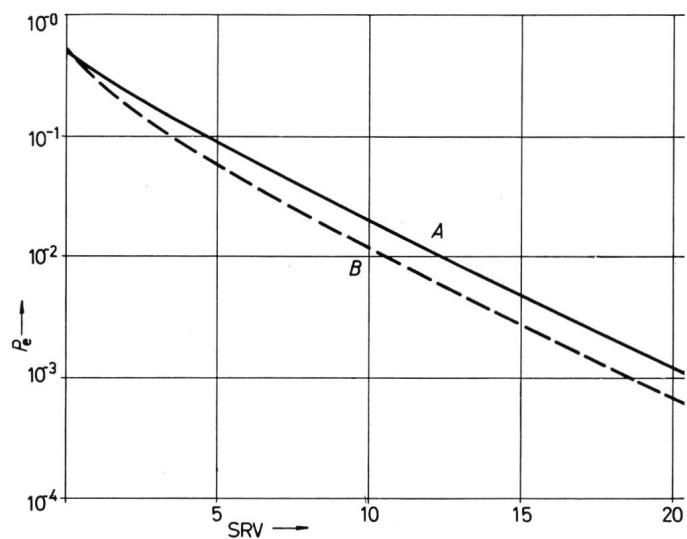


Fig. 5  
Fehlerwahrscheinlichkeit des idealen, inkohärenten EIN/AUS-Übertragungssystems A

Zum Vergleich ist der Verlauf des entsprechenden kohärenten Systems B eingetragen

Bezeichnungen siehe Fig. 4

gestellt. Man erkennt, dass der Verlust der Kenntnis der Trägerphase zu einer Vergrösserung der Fehlerwahrscheinlichkeit um rund 2,5 dB führt (Fig. 5).

Das beschriebene inkohärente Modell ist in dem Sinne ein Sonderfall, dass die Modulation des Trägers «schmalbandig», das heisst langsam im Vergleich zur Trägerfrequenz vorausgesetzt wurde, so dass hier der optimale Detektor mit zeitlich invarianten Filtern aufgebaut werden kann. Im allgemeinen führt die Optimierung des inkohärenten Detektors jedoch auf nicht realisierbare, zeitlich veränderliche Filter [7]. Das inkohärente Übertragungssystem erfordert in jedem Fall ein etwas grösseres Signal/Rausch-Verhältnis als das kohärente System, weil durch den zufälligen Parameter  $\varphi$  weitere Unsicherheit in den Entscheidungsprozess eingeführt wird. Für einen Vergleich verschiedener kohärenter und inkohärenter Systeme siehe [4].

#### 4. Schlussbemerkungen

Die beiden untersuchten Modelle stellen die einfachsten Fälle der Entscheidungstheorie dar. Insbesondere die Frage nach der Signalerkennung in Rauschen, dessen Leistungsspektrum nicht konstant ist, wurde nicht behandelt. Auch hier

gelangt man nach denselben Prinzipien zur Struktur des optimalen Detektors, doch sind dazu wesentlich mächtigere mathematische Hilfsmittel erforderlich, welche ausserhalb des Rahmens dieser Einführung liegen [4; 7]. Dasselbe gilt auch für das Problem der Erkennung zufälliger Signale in überlagertem Rauschen, ein Problem, welches zum Beispiel im Bereich der Unterwasser-Ortung mit Sonar oder auch in der Radioastronomie auftritt.

#### Literatur

- [1] J. B. Thomas: Nonparametric detection. Proc. IEEE 58(1970)5, p. 623...631.
- [2] H. Schlaepfer: Signalerkennung mit parametrischen und nichtparametrischen Methoden. Bull. SEV 62(1971)12, S. 579...584.
- [3] A. Wald: Sequential analysis. New York/London, Wiley, 1947.
- [4] C. L. Weber: Elements of detection and signal design. New York, McGraw-Hill, 1968.
- [5] A. Papoulis: Probability, random variables and stochastic processes. New York, McGraw-Hill, 1965.
- [6] M. Abramowitz and I. A. Stegun: Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series No. 55. Washington, US Department of Commerce, Government Printing Office, 1965.
- [7] D. Middleton: An introduction to the statistical communication theory. New York, McGraw-Hill, 1960.

#### Adresse des Autors:

Dr. H. Schlaepfer, Institut für Fernmeldetechnik der ETH, Sternwartstr. 7, 8006 Zürich.

## Commission Internationale de Réglementation en vue de l'Approbation de l'Equipement Electrique (CEE)

Tagung vom 11. bis 21. Mai 1971 in Kopenhagen

#### Plenarversammlung

Die CEE hielt ihre Plenarversammlung am 21. Mai 1971 in Kopenhagen ab. In einer kurzen Ansprache wies der Präsident L. M. Elfström (Schweden), speziell auf die Notwendigkeit internationaler Harmonisierung der Normen und guter Zusammenarbeit mit verwandten Organisationen (CEI, CISPR) zwecks Vermeidung von Doppelspurigkeiten, sowie auf die Gefahr unnötig umfangreicher sicherheitstechnischer Vorschriften hin. Die Versammlung ehrte den am 5. März 1971 verstorbenen Dr. A. Fritz, welcher als österreichisches Mitglied während vieler Jahre massgeblichen Anteil an den Arbeiten der CEE gehabt hatte.

Unter den behandelten Traktanden sind folgende Probleme und Beschlüsse besonders erwähnenswert:

##### 1. Resultat der «Inquiry Procedure» und Beschlüsse betreffend:

1.1 Recommendation for the Resistance of Parts of Insulating Material to Abnormal Heat and to Fire. Obwohl dieses Dokument noch nicht komplett ist und durch das Komitee «General Requirements» noch weiterbearbeitet werden muss, wird es als provisorische Publikation veröffentlicht.

1.2 Particular Specification for Dish-washing Machines, Section L of Part II of CEE Publication 10 und Particular Specification for Business Machines, Section P of Part II of CEE Publication 10. Die vorliegenden Dokumente werden mit der Auflage herausgegeben, sie den entsprechenden CEI-Publikationen anzupassen, sobald als diese veröffentlicht sind.

##### 2. Resultat der «Simplified approval procedure» und Beschlüsse betreffend:

2.1 Modifications to CEE Publication 7, Specification for Plugs and Socket-outlets for Domestic and Similar Purposes und Modifications to CEE-Publication 13, Specifications for Polyvinyl Chloride Insulated Cables and Flexible Cords gehen an die entsprechenden technischen Komitees zur Bereinigung zurück, da keine einstimmige Annahme erzielt werden konnte.

2.2 Modification to CEE Publication 22, Specification for Appliance Couplers for Domestic and Similar General Purposes wird der Redaktionskommission überwiesen, da einstimmig angenommen.

3. Über die Form, wie und wo Empfehlungen des «Committee of Testing Stations» publiziert werden sollen, konnte keine Einigkeit

erzielt werden; England wird einen diesbezüglichen Vorschlag unterbreiten. Der schweizerische Antrag, die Zusammenarbeit der nationalen Prüfstellen im Rahmen der CEE zu fördern, fand allgemein Unterstützung, doch es wurde die Erwartung ausgedrückt, dass die Prüfstellen als Unternehmen in dieser Hinsicht durch bi- und multilaterale Übereinkommen etwas unternehmen. Eine Einschaltung der CEE, eventuell des «Committee of Testing Stations» wird als unmöglich erachtet.

4. Eine eingehende Diskussion über die Einführung des  $\hat{E}$ -Zeichens als international gültiges Zulassungszeichen ergab keine neuen Aspekte gegenüber der im «Certification Body» geführten Diskussion (siehe Bericht über Sitzung des CB vom 20.5.1971).

5. Für die Übernahme («Endorsement») von CEI-Regeln als CEE-Vorschriften für CB-Prüfungen, welche allgemein wünschenswert anerkannt wird, konnte noch keine formale Lösung gefunden werden. Der Generalsekretär wird auf Grund verschiedener schriftlicher nationaler Stellungnahmen sowie der geführten Diskussion einen Antrag zu Handen der Plenarversammlung ausarbeiten.

6. Das Komitee «Lighting Fittings and Auxiliaries» beantragt, die Arbeit für eine Publikation über «Fluorescent Lamp Lighting Fittings» aufzunehmen, sowie die CEE-Publikationen 12 («Fluorescent Lamp Auxiliaries») und 25 («Incandescent Lamp Lighting Fittings») zu revidieren. Von verschiedenen Delegierten wird beantragt, auf diesem Gebiet nur insofern CEE-eigene Publikationen auszuarbeiten, als keine relevanten CEI-Publikationen vorliegen oder in Bearbeitung stehen. In diesem Sinne wird beschlossen, vorläufig keine CEE-Publikation über «Lighting Fittings and Auxiliaries» zu bearbeiten, sondern auf die in Kürze bevorstehende Herausgabe der entsprechenden CEI-Publikation 162 zu warten. Dasselbe gilt auch für die Revision der reichlich alten CEE-Publikation 12; hier soll die in Arbeit stehende Revision der CEI-Publikation 82 abgewartet werden. Im Gegensatz dazu liegen für «Incandescent Lamp Lighting Fittings» vorläufig keine entsprechenden CEI-Arbeiten vor. Es wird deshalb beschlossen, die Revision der CEE-Publikation 25 zu beschleunigen und gleichzeitig das entsprechende CEI-Fachkomitee zu ersuchen, seine eventuellen Arbeiten auf diesem Gebiet zurückzustellen, bis die revidierte CEE-Publikation veröffentlicht ist.