

Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins
Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke
Band: 62 (1971)
Heft: 6

Artikel: Bestimmung statistischer Parameter auf Grund von Stichproben
Autor: Schlaepfer, H.-J.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-915807>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Bestimmung statistischer Parameter auf Grund von Stichproben

Von H. J. Schlaepfer, Zürich

519.241.2

Es werden die beiden wichtigsten Methoden zur Bestimmung der statistischen Eigenschaften der Elemente einer Menge mit Hilfe einer beschränkten Anzahl von Stichproben beschrieben und die Grenzen der Genauigkeit gezeigt, welche sich damit erreichen lassen. An Hand einfacher Beispiele wird der praktische Einsatz theoretischer Ergebnisse erläutert. Für das Verständnis der Arbeit ist die Kenntnis der grundlegenden Zusammenhänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung unerlässlich.

1. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird ein kurzer Überblick über die Bestimmung der statistischen Eigenschaften der Elemente einer Menge auf Grund einer beschränkten Anzahl von Stichproben gegeben. Die «Theory of Estimation» wurde von R. A. Fisher (1921) begründet; die vorliegenden Ausführungen basieren im wesentlichen auf der zusammenfassenden Darstellung von H. Cramér [1]¹.

Das grundsätzliche Problem, welches in dieser Arbeit theoretisch untersucht wird, lässt sich folgendermassen beschreiben:

Gegeben sei eine beschränkte Anzahl N unabhängiger Stichproben x_1, \dots, x_N aus einer Menge X . Die Elemente x_i dieser Menge weisen bestimmte Eigenschaften (a_1, \dots, a_m) auf, deren Häufigkeit durch die Funktion $p(x; a_1, \dots, a_m)$ beschrieben wird. Von diesen Verteilungsfunktionen sei zwar die mathematische Form (Gaussverteilung, Gleichverteilung, usw) bekannt, doch weisen sie eine Anzahl m unbekannter Parameter a_1, \dots, a_m auf. Das Ziel besteht darin, einige oder alle der unbekannten Parameter a_k mit Hilfe der verfügbaren Stichproben möglichst genau abzuschätzen. Gesucht ist demnach der beste aus der in jedem Falle unendlichen Vielfalt möglicher Zusammenhänge zwischen den Stichproben x_1, \dots, x_N einerseits und den gesuchten Parameter a_1, \dots, a_m anderseits.

Beispiel 1: Aus einer grossen Menge von Kohleschicht-Widerständen mit dem Nominalwert $1k$ wurden fünf Stichproben mit den Werten $x_1 = 1.03k$, $x_2 = 1.05k$, $x_3 = 0.99k$, $x_4 = 0.96k$, $x_5 = 1.06k$ genommen. Typische Fragestellungen betreffen die Art und Weise, wie man den Mittelwert der gesamten Menge von Widerständen abschätzt oder den Bruchteil der Widerstände, welche ausserhalb der Toleranz $1k \pm 5\%$ liegen.

Es stehen daher folgende Fragen zur Diskussion:

- Welches sind die funktionalen Zusammenhänge $\hat{a}_k = \hat{a}_k(x_1, \dots, x_N)$, welche die gesuchten Parameter a_k ($k = 1, \dots, m$) auf Grund der zufälligen Stichproben x_i möglichst gut beschreiben?
- Wie findet man diese optimalen Zusammenhänge?
- Mit welchen Kriterien ist die Qualität solcher Abschätzfunktionen zu beurteilen?
- Welches sind die theoretischen Grenzen der Genauigkeit, mit welcher die gesuchten Parameter abgeschätzt werden können?

Damit das Problem in seiner einfachsten Form untersucht werden kann, werden folgende drei Voraussetzungen getroffen:

- Die Zahl der Elemente der zu untersuchenden Menge sei sehr gross, jedenfalls so gross, dass die statistischen Eigenschaften der Stichproben von den Ergebnissen früherer Stichproben unabhängig sind.

On décrit les deux méthodes les plus importantes de la détermination des propriétés statistiques des éléments d'une quantité à l'aide d'un nombre limité de sondages, en indiquant les limites de précision ainsi atteintes. On explique l'application pratique des résultats théoriques par quelques exemples simplifiés. La connaissance des relations fondamentales du calcul des probabilités demeure indispensable à la parfaite compréhension de cet exposé.

Beispiel 2: Die Menge der Kugeln einer Urne, welche aus zwei roten und einer weissen Kugel besteht, erfüllt diese Voraussetzung nicht; denn nachdem zum Beispiel die weisse Kugel entfernt wurde, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der nächsten Stichprobe eine rote Kugel genommen wird $p_{\text{rot}} = 1$ (anstatt $\frac{2}{3}$ bei der ersten Stichprobe), während keine weisse Kugel mehr vorhanden ist ($p_{\text{weiss}} = 0$ anstatt $p_{\text{weiss}} = \frac{1}{3}$ beim ersten Mal).

2. Die Zahl N der Stichproben sei zum voraus bekannt. Untersuchungen, bei welchen laufend entschieden wird, ob die vorhandenen Stichproben für eine bestimmte Sicherheit der Abschätzung genügen oder nicht, werden hier nicht betrachtet. (Siehe dazu [2].)

3. Alle Stichproben x_i sollen von derselben Menge X stammen, sie weisen also alle dieselbe Häufigkeit $p(x; a_1, \dots, a_m)$ auf. Eine Erweiterung auf Stichproben aus mehreren Mengen X, Y, Z, \dots mit gemeinsamen Parametern ist jedoch durchaus möglich [1].

2. Hilfsmittel

In diesem Abschnitt seien die wichtigsten theoretischen Hilfsmittel zusammengetragen, mit denen sich die gestellten Aufgaben lösen lassen. Im übrigen muss aber die Kenntnis der grundlegenden Zusammenhänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung als bekannt vorausgesetzt werden. Eine sehr gute Einführung enthält z. B. [3].

In folgenden soll x stets eine kontinuierliche Zufallsgrösse sein, welche im Intervall $A \leq x \leq B$ alle beliebigen Werte annehmen kann.

Beispiel 3: Der Momentanwert x der Spannung an einem rauenden Widerstand ist eine kontinuierliche Zufallsgrösse, welche alle möglichen Werte im Bereich $-\infty \leq x \leq \infty$ annehmen kann (Fig. 1).

Dagegen soll y stets eine diskrete Zufallsgrösse sein, welche im Intervall $C \leq y \leq D$ nur eine abzählbare Menge möglicher Werte annehmen kann.

Beispiel 4: Die Zahl y der Augen eines Würfels, welche an der oberen Seitenfläche erscheinen, ist eine diskrete Zufallsgrösse, mit allen ganzzahligen Werten im Bereich $1 \leq y \leq 6$ (Fig. 2).

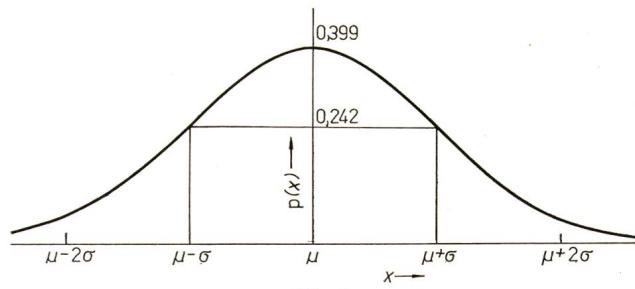


Fig. 1
Relative Häufigkeit $p(x)$ des Momentanwertes einer Rauschspannung
 μ Erwartungswert; σ^2 Streuung

¹ Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

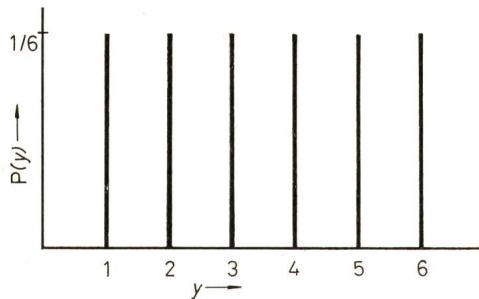


Fig. 2

Relative Häufigkeit $p(y)$ der Anzahl der Augen eines symmetrischen Würfels

Die wesentliche Eigenschaft einer Zufallsgröße besteht darin, dass ihre Werte nicht exakt voraussagbar sind. Trotzdem wird man bei vielfachen Versuchen eine Regelmässigkeit in dem Sinne beobachten können, dass diese Zufallsgröße offensichtlich doch bestimmten Gesetzmässigkeiten unterworfen ist. So werden sich die Momentanwerte der Rauschspannung stark um einen gewissen Mittelwert konzentrieren, während sehr grosse Abweichungen davon wesentlich seltener sind (Fig. 1).

In ähnlicher Weise wird man beim Würfel feststellen können, dass alle Augenzahlen etwa mit derselben Häufigkeit erscheinen (Fig. 2). Die Dichtefunktion $p(x)$ stellt nun ein Mass für die relative Häufigkeit des Wertes x bezogen auf die gesamte Anzahl von Versuchen dar. Dank dieser Definition gilt sicher, weil die Intervalle (A, B) und (C, D) alle möglichen Werte der Zufallsgrössen x und y enthalten und weil die Wahrscheinlichkeit $p(z) = 1$ die vollkommene Sicherheit des Ereignisses z darstellt:

$$m_{0x} = \int_A^B p(x) dx = 1 \quad (1)$$

$$m_{0y} = \sum_{i=c}^D p_i = 1$$

wobei das Integral für die kontinuierliche Zufallsgröße x und die Summe für die diskrete Zufallsgröße y gilt. Diese Dichtefunktionen dienen zur Definition einiger abgeleiteter Grössen wie den Mittelwert m_1 :

$$m_{1x} = E(x) = \int_A^B x \cdot p(x) dx \quad (2)$$

$$m_{1y} = E(y) = \sum_{i=c}^D y_i p_i$$

und allgemein für den Erwartungswert $E(m_k)$:

$$m_{kx} = E(x^k) = \int_A^B x^k p(x) dx \quad (3)$$

$$m_{ky} = E(y^k) = \sum_{i=c}^D y_i^k p_i$$

In Analogie zur Massenverteilung der Mechanik werden diese Grössen auch «Momente» genannt. m_1 entspricht dann dem Schwerpunkt der Massenverteilung $p(x)$ bzw. $p(y)$. Die zentralen Momente werden auf den Mittelwert m_1 bezogen. Es gilt daher für das zentrale Moment μ_k der Ordnung k :

$$\mu_{kx} = E(x - m_{1x})^k = \int_A^B (x - m_{1x})^k p(x) dx \quad (4)$$

$$\mu_{ky} = E(y - m_{1y})^k = \sum_{i=c}^D (y_i - m_{1y})^k p_i$$

Der Erwartungswert m_1 stellt den Mittelwert einer sehr grossen Anzahl von Stichproben dar, während das zentrale Moment μ_2 (auch Streuung genannt) ein reziprokes Mass dafür ist, wie stark sich die möglichen Werte um den Mittelwert konzentrieren.

Beispiel 5: Wenn y die Zahl der Augen eines Würfels ist, so lautet die diskrete Dichtefunktion nach Fig. 2:

$$p(y=1) = p(y=2) = \dots = p(y=6) = 1/6.$$

Im Mittel erscheinen

$$m_1 = \sum_{i=1}^6 i \cdot p(y=i) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5$$

Augen und die Streuung der Augenzahl ist:

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^6 (i - 3,5)^2 p(y=i) = (-2,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + (2,5)^2 \cdot \frac{1}{6} \approx 2,9$$

Entsprechend den Momenten der diskreten Zufallsgrössen können auch Momente von den Stichproben bestimmt werden. Das Moment m_k' und das zentrale Moment μ_k' der Ordnung k der Stichproben lauten allgemein:

$$\begin{aligned} m_k' &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^k \\ \mu_k' &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m_1')^k \end{aligned} \quad (5)$$

Während aber die Momente m_k , μ_k der Dichtefunktionen determinierte Grössen sind, weil sie die Eigenschaften aller Elemente einer Menge berücksichtigen, so sind die Momente m_k' , μ_k' der Stichproben Zufallsgrössen, weil sie selbst Funktionen einer zufälligen und unvollständigen Auswahl von Elementen sind.

Damit stehen die wesentlichen Hilfsmittel für die Abschätzung der statistischen Parameter zur Verfügung.

3. Eigenschaften von Abschätzungsfunktionen

Als «Abschätzungsfunktionen» werden im folgenden alle funktionalen Zusammenhänge zwischen den Ergebnissen der N Stichproben $x_1 \dots x_N$ einerseits und dem unbekannten Parameter a_0 anderseits verstanden. Im Interesse einer einfachen Darstellung wird der Fall einer einzelnen unbekannten Grösse a_0 untersucht, die Erweiterung auf mehrere Unbekannte folgt unmittelbar aus dem Gesagten und soll an Hand eines Beispiels gezeigt werden.

Aus der unendlichen Menge möglicher Abschätzungsfunktionen soll diejenige $\hat{a} = \hat{a}(x_1 \dots x_N)$ gesucht werden, welche in bestimmter Hinsicht optimal ist. Im folgenden seien einige der nützlichen und erforderlichen Eigenschaften untersucht, welche die Abschätzungsfunktion \hat{a} aufweisen soll.

3.1 Systematischer Fehler

Eine Abschätzungsfunktion \hat{a}_1 ist sicher dann einer zweiten \hat{a}_2 vorzuziehen, wenn bei vielfacher Anwendung der Abschätzungsfunktion \hat{a}_1 der Wert der gefundenen Grösse näher beim tatsächlichen Wert des gesuchten Parameters liegt als dies bei Verwendung von \hat{a}_2 der Fall ist. Da aber die Argu-

mente der Abschätzfunktion Zufallsgrößen sind, wird auch der Wert \hat{a} der Abschätzung eine Zufallsgröße sein, deren Mittelwert im besten Falle mit dem tatsächlichen Wert a_0 des gesuchten Parameters übereinstimmt. Eine erste Forderung an eine gute Abschätzfunktion betrifft daher den Erwartungswert der Abschätzung, welcher gleich dem tatsächlichen Wert a_0 sein soll:

$$E(\hat{a}) = a_0 \quad (6)$$

Wenn diese Bestimmung gilt, so wird die Abschätzfunktion \hat{a} als «frei von systematischen Fehlern» bezeichnet. Da eine Korrektur des systematischen Fehlers in vielen Fällen sehr leicht möglich ist, wie das folgende Beispiel zeigt, ist das im nächsten Abschnitt besprochene Kriterium des mittleren Fehlerquadrates von wesentlich grösserer Bedeutung.

Beispiel 6: Von der Normalverteilung $p(x)$ soll auf Grund von N unabhängigen Stichproben die Streuung μ_2 bestimmt werden. Dazu erscheint das zentrale Moment zweiter Ordnung der Stichproben als geeignete Abschätzfunktion:

$$\hat{\mu}_2 = \mu'_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m'_1)^2$$

wobei

$$m'_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Für den Erwartungswert von μ_2 gilt daher:

$$E(\hat{\mu}_2) = E\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m'_1)^2\right) = \left(\frac{N-1}{N}\right) \mu_2 \neq \mu_2$$

Das zentrale Moment zweiter Ordnung der Stichproben ist bei unbekanntem Erwartungswert der Normalverteilung keine von systematischen Fehlern freie Abschätzung für die Streuung, doch wird dieser Fehler mit sinkender Stichprobenzahl immer kleiner. Dagegen ist, wie man sich leicht überzeugen kann, die folgende Abschätzung frei von systematischen Fehlern:

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m'_1)^2$$

3.2 Mittlerer quadratischer Fehler und Wirkungsgrad

Nicht nur sollte der Erwartungswert einer Abschätzung mit dem tatsächlichen Wert des gesuchten Parameters übereinstimmen, sondern vielmehr sollten bei zahlreichen Versuchen die abgeschätzten Werte \hat{a} möglichst nahe beim tatsächlichen Wert a_0 liegen. Ein reziprokes Mass für die Konzentration, mit der sich die Abschätzungen um den Erwartungswert gruppieren, ist das mittlere Fehlerquadrat. Dieses an sich willkürliche Mass ist aber durchaus gerechtfertigt, weil im Falle einer sehr grossen Anzahl unabhängiger Stichproben die Abschätzung die Normalverteilung annimmt, bei welcher diese Definition der Abweichung gerade mit der Steigung übereinstimmt.

Die zweite Forderung an eine gute Abschätzfunktion betrifft daher den mittleren quadratischen Fehler

$$E(\hat{a} - a_0)^2 = \min$$

welcher natürlich so klein wie möglich sein soll. Nun kann aber mit einer gegebenen Anzahl von Stichproben dieser Fehler niemals unterhalb einen gewissen Minimalwert sinken. Man ist daher interessiert daran, Abschätzfunktionen zu besitzen, welche diese untere Grenze des mittleren Fehlerquadrates gerade erreichen. Eine solche Abschätzfunktion wird wirksam genannt im Gegensatz zu solchen, bei denen das mittlere Fehlerquadrat grösser ist. Diese untere Grenze wird

durch die Ungleichung von *Cramér-Rao* [1] bestimmt. Sie lautet unter allgemeinen Voraussetzungen, falls \hat{a} frei von systematischen Fehlern ist:

$$E(\hat{a} - a_0)^2 \geq \frac{1}{N E\left(\frac{\partial \ln p(x)}{\partial a_0}\right)^2}$$

Als Wirkungsgrad d einer Abschätzung wird im folgenden der Quotient von minimalem quadratischen Fehler nach *Cramér-Rao* und dem mittleren Fehlerquadrat der untersuchten Abschätzung verstanden. Sicher gilt, dass $d \leq 100\%$.

Während für endliche Stichprobenzahlen nur in den aller-einfachsten Fällen wirksame Abschätzfunktionen bestehen, sind asymptotisch wirksame Funktionen wesentlich häufiger, welche den Wirkungsgrad $d = 100\%$ erst im Grenzfall unendlich vieler Stichproben erreichen. Die folgenden drei Beispiele behandeln wirksame, asymptotisch wirksame und nicht wirksame Abschätzfunktionen.

Beispiel 7: Für den Erwartungswert μ der Gaussverteilung

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

wird der arithmetische Mittelwert der Stichproben

$$\hat{\mu} = m'_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

als Abschätzfunktion verwendet.

1. Ist diese Abschätzfunktion frei von systematischen Fehlern?

$$E(\hat{\mu}) = E\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i\right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(x_i) = \mu$$

Der arithmetische Mittelwert gaussverteilter Stichproben weist keinen systematischen Fehler auf.

2. Welches ist das minimale mittlere Fehlerquadrat nach *Cramér-Rao*?

$$E_m(\hat{\mu} - \mu)^2 \geq \frac{1}{N E\left(\frac{\partial \ln p(x)}{\partial \mu}\right)^2} = \frac{\sigma^2}{N}$$

3. Welches ist der mittlere quadratische Fehler, welchen der arithmetische Mittelwert liefert?

$$E(\hat{\mu} - \mu)^2 = E(\hat{\mu})^2 - 2\mu E(\hat{\mu}) + \mu^2 = \frac{\sigma^2}{N}$$

Da das mittlere Fehlerquadrat gerade mit dem Grenzwert von *Cramér-Rao* übereinstimmt, stellt der arithmetische Mittelwert der Stichproben eine wirksame Abschätzfunktion für gaussverteilte Proben dar. Der Wirkungsgrad der Abschätzung ist immer 100%.

Beispiel 8: Nach Beispiel 6 ist die Funktion

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m'_1)^2$$

zur Abschätzung der Streuung der N normalverteilten Stichproben frei von systematischen Fehlern.

1. Welches ist die untere Grenze für das mittlere Fehlerquadrat nach *Cramér-Rao* für diese Abschätzung?

$$E_m(\hat{\mu}_2 - \mu_2)^2 \geq \frac{2\sigma^4}{N}$$

2. Welches ist das mittlere Fehlerquadrat der gewählten Abschätzfunktion?

$$E(\hat{\mu}_2 - \mu_2)^2 = \frac{2\sigma^4}{N-1}$$

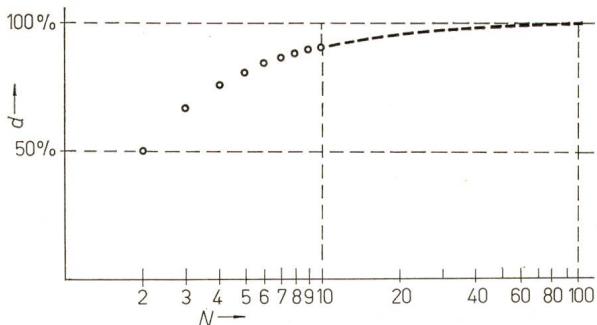


Fig. 3

Wirkungsgrad der Abschätzung der Streung normalverteilter Stichproben
 d Wirkungsgrad; N Anzahl unabhängiger Stichproben

Der Wirkungsgrad d beträgt demnach

$$d = 100 \frac{N-1}{N} \% < 100 \%$$

Diese Abschätzungsfunktion ist nur asymptotisch wirksam; ihr Wirkungsgrad strebt gegen 100 %, erst wenn die Zahl der Stichproben über alle Grenzen wächst (Fig. 3).

Beispiel 9: Der Mittelwert μ der Gaussverteilung von Beispiel 7 werde durch den Meridian z (Fig. 4) der N Stichproben bestimmt, welcher so definiert ist, dass die eine Hälfte der Stichproben grösser ist als z und die andere Hälfte kleiner. Für grosse Stichprobenzahlen ist der Meridian eine normalverteilte Zufallsgrösse mit dem Erwartungswert μ und Streuung

$$E(z - \mu)^2 = \sigma^2 \frac{\pi}{2N}$$

Nach Beispiel 7 ist die untere Grenze für das mittlere Fehlerquadrat aber nach *Cramér-Rao*

$$E_m(\hat{\mu} - \mu)^2 \geq \frac{\sigma^2}{N}$$

weshalb der Wirkungsgrad dieser Abschätzung immer kleiner als 100 % ist, nämlich:

$$d = 100 \frac{\sigma^2}{N} \cdot \frac{2N}{\sigma^2 \pi} = \frac{200}{\pi} \approx 63 \%$$

Das bedeutet, dass man nur etwa 63 % der Stichproben benötigen würde, um mit dem arithmetischen Mittelwert der Stichproben den Erwartungswert μ der Gaussverteilung mit derselben Genauigkeit abzuschätzen.

4. Methoden zur Bestimmung der Abschätzungsfunktion

Wenn die Stichproben nicht mehr normalverteilt sind, so werden im allgemeinen nicht mehr der arithmetische Mittelwert der Stichproben und das zweite zentrale Moment die besten Abschätzungsfunktionen sein. Es erhebt sich daher die Frage, auf welche Weise wirksame oder doch möglichst gute Abschätzungen zu finden sind. Im folgenden werden die beiden hauptsächlichen Methoden der Statistik besprochen, welche auf Grund der bekannten Verteilungsfunktionen geeignete Abschätzungsfunktionen für die unbekannten Parameter liefern.

4.1 Die Methode der Momente

Der älteste Vorschlag zur Bestimmung von Abschätzungsfunktionen stammt von *K. Pearson* (1928): die Methode der Momente. Sie besteht darin, dass von der Dichtefunktion $p(x; a)$ der Stichproben das erste Moment berechnet wird, welches eine Funktion des unbekannten Parameters a sein wird. Dieses Moment wird mit dem entsprechenden Moment der Stichproben verglichen. Allgemein wird man die m ersten Momente der Dichtefunktion berechnen und sie mit den m

ersten Momenten der Stichproben vergleichen. Es entsteht so ein Gleichungssystem von m Gleichungen für die m unbekannten Parameter $a_1 \dots a_m$. Diese Methode führt, allerdings auf Kosten des Wirkungsgrades, oft zu einfacheren Abschätzungsfunktionen als andere Methoden. Sie sind im allgemeinen nicht einmal asymptotisch wirksam.

4.2 Die Methode der grössten Wahrscheinlichkeit

Die Methode der grössten Wahrscheinlichkeit (maximum likelihood) von *R. A. Fisher* besitzt ausserordentlich grosse Bedeutung, weil sie immer eine wirksame Abschätzungsfunktion liefert, sofern eine solche überhaupt existiert. Diese Methode basiert auf der Definition der Verbundwahrscheinlichkeit der Stichproben:

$$L(x_1 \dots x_N; a_0) = p(x_1; a_0) \dots p(x_N; a_0) = \prod_{i=1}^N p(x_i; a_0)$$

Bei gegebenen Werten $x_1 \dots x_N$ der Stichproben ist diese Wahrscheinlichkeitsfunktion nur noch vom unbekannten Parameter a_0 abhängig. Man kann daher diesen Parameter so bestimmen, dass die Verbundwahrscheinlichkeit der Stichproben maximal wird. Da der Logarithmus eine streng monotone Funktion seines Argumentes ist, kann die Gleichung:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a_0} = \frac{\partial L^*}{\partial a_0} = 0$$

zur Bestimmung des unbekannten Parameters a_0 verwendet werden. Allgemein wird man im Falle von m unbekannten Parametern $a_1 \dots a_m$ die m partiellen Ableitungen von L^* nach den a_i bilden und so ein Gleichungssystem von m Gleichungen für die m unbekannten Parameter erhalten.

Beispiel 10: Zur Bestimmung von Mittelwert und Streuung der Normalverteilung in Beispiel 7 wird die Wahrscheinlichkeitsfunktion L^* der Stichproben gebildet:

$$L^*(x_1, \dots x_N; \mu, \sigma) = \ln \prod_{i=1}^N p(x_i; \mu, \sigma) = -\frac{N}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2$$

Durch partielle Differentiation nach den gesuchten Parametern μ und σ^2 erhält man das Gleichungssystem:

$$\frac{\partial L^*}{\partial \mu} = \frac{\mu}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu) = 0$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \sigma^2} = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 = 0$$

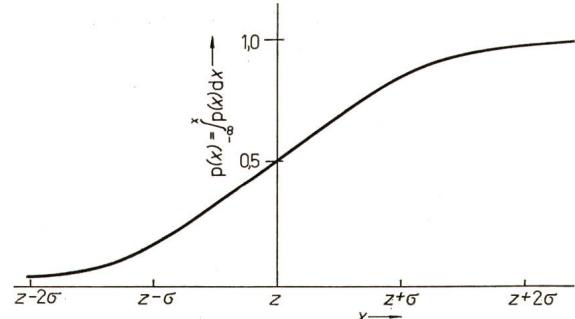


Fig. 4
Zur Definition des Meridians z
 Bezeichnungen siehe Fig. 1

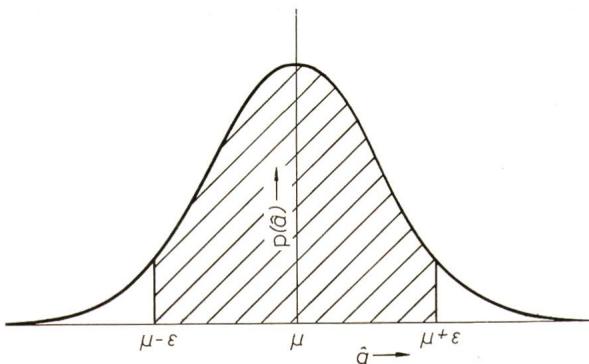


Fig. 5

Zur Definition des Vertrauensintervales $\mu \pm \varepsilon$ auf Grund der Verteilung der Abschätzung \hat{a}

Weitere Bezeichnungen siehe Fig. 1

womit man für die Abschätzungsfunktionen erhält:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2$$

Die Abschätzungsfunktion für den Erwartungswert μ ist in jedem Falle wirksam, während die Streuung σ^2 nur dann wirksam abgeschätzt wird, wenn der Erwartungswert bekannt ist. Im anderen Falle weist diese Abschätzung nach Beispiel 6 einen systematischen Fehler auf und ist — nach der im selben Beispiel erwähnten Korrektur — nur asymptotisch wirksam.

5. Das Vertrauensintervall

Wie in Abschnitt 2 festgestellt wurde, ist die Abschätzung \hat{a} eine Zufallsgröße, weil sie selbst eine Funktion einer zufälligen Auswahl von Stichproben ist. Diese Abschätzungen sind für normalverteilte Stichproben selbst normalverteilt oder werden es nach dem zentralen Grenzwertsatz der Statistik für sehr grosse Stichprobenzahlen auch bei praktisch beliebigen Verteilungsfunktionen. Die Normalverteilung ist aber durch die Angabe der beiden Parameter μ (Erwartungswert) und σ^2 (Streuung) bestimmt. Man kann daher bei Kenntnis des systematischen Fehlers $E(\hat{a} - a_0)$ und des mittleren Fehlerquadrates $E(\hat{a} - a_0)^2$ die Verteilungsfunktion der Abschätzung durch eine Normalverteilung darstellen. Damit gelingt es, ein Intervall zu definieren, welches mit einer Sicherheit von $p\%$ die abgeschätzten Werte enthält (Fig. 5). Dieses Intervall wird $p\%$ -Vertrauensintervall genannt. Die Grenzen dieses Bereiches sind so definiert, dass innerhalb $\mu - \varepsilon \leq x \leq \mu + \varepsilon$ der Bruchteil $p/100$ der gesamten Fläche der Normalverteilung liegt:

$$\int_{\mu - \varepsilon}^{\mu + \varepsilon} p(\hat{a}) d\hat{a} = \frac{p}{100}$$

Dieses Integral stellt die Differenz der kumulativen Gaussischen Verteilungsfunktion an den Stellen $\hat{a} = \mu + \varepsilon$ und $\hat{a} = \mu - \varepsilon$ dar. Ihre numerischen Werte lassen sich nach geeigneter Normung aus Funktionstafeln (z. B. [4]) entnehmen.

Beispiel 11: Von der Normalverteilung

$$p(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{(x - \mu)^2}{2}$$

mit der Streuung 1 lässt sich der Erwartungswert durch den Mittelwert der Stichproben abschätzen. Der Erwartungswert der Abschätzung ist nach Beispiel 7: $E(\mu) = \mu$ und das mittlere Fehlerquadrat ist: $E(\mu - \mu)^2 = 1$. Mit 10 Stichproben ergibt dies ein 90%-Vertrauensintervall mit Hilfe der Beziehung

$$\int_{\mu - \varepsilon_{10}}^{\mu + \varepsilon_{10}} p(\hat{\mu}) d\hat{\mu} = 0,9$$

zu

$$\varepsilon_{10} \approx \frac{1,65}{\sqrt{10}} \approx 0,52$$

Demnach liegt mit einer Sicherheit von 90 % der tatsächliche Mittelwert der Stichproben im Intervall

$$\hat{\mu} - 0,52 \leq \mu \leq \hat{\mu} + 0,52$$

Mit viermal mehr Stichproben wird das Vertrauensintervall nur um einen Faktor 2 verringert:

$$\varepsilon_{40} \approx \frac{1,65}{\sqrt{40}} \approx 0,26$$

Allgemein werden für eine c -fache Genauigkeit c^2 mal mehr Stichproben benötigt.

Beispiel 12: Im ersten Beispiel wurde nach dem Prozentsatz der Widerstände gefragt, welche außerhalb des Toleranzbereiches von $1k \pm 5\%$ liegen. Zur Abschätzung dieser Größe standen die fünf Stichproben $x_1 \dots x_5$ zur Verfügung. Wenn man annimmt, dass die tatsächlichen Werte der Widerstände normalverteilt sind, so kann nach Beispiel 7 ihr Mittelwert durch den arithmetischen Mittelwert der Stichproben abgeschätzt werden:

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{1}{5} (1,03 + \dots + 1,06) k = 1,018 k$$

Nach Beispiel 6 ist die folgende Abschätzung für das zentrale Moment zweiter Ordnung (welches der Streuung der Normalverteilung entspricht) frei von systematischen Fehlern:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (x_i - 1,018 k)^2 = 7,08 \cdot 10^{-3} k^2$$

Der Bruchteil p der Widerstände, welche innerhalb des Toleranzbereiches liegen ergibt sich demnach zu:

$$p = \int_{0,95}^{1,05} \frac{1}{\sqrt{2\pi \hat{\sigma}_x^2}} \exp - \frac{(x - \hat{\mu}_x)^2}{2 \hat{\sigma}_x^2} dx$$

Da die Tabellen die genormte kumulative Gaussverteilung angeben, ist folgende Variablentransformation erforderlich:

$$y = \frac{x - \hat{\mu}_x}{\hat{\sigma}_x}$$

Damit erhält man:

$$p = \int_{\frac{0,95 - \hat{\mu}_x}{\hat{\sigma}_x}}^{\frac{1,05 - \hat{\mu}_x}{\hat{\sigma}_x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{y^2}{2} dy = 0,438$$

Es liegen demnach nur rund 44 % der Widerstände innerhalb der geforderten Toleranz, während etwa 56 % außerhalb liegen. Der praktische Wert einer Probe von nur 5 Widerständen ist allerdings sehr gering, denn im vorliegenden Fall umfasst das 90%-Vertrauensintervall für den Mittelwert μ_x nicht weniger als etwa 14 % des Nennwertes. Eine wesentliche Vergrößerung der Stichprobenzahl ist daher unumgänglich.

Literatur

- [1] H. Cramér: Mathematical methods of statistics. Uppsala, Almqvist and Wiksell, 1945.
- [2] A. Wald: Sequential analysis. New York/London, Wiley, 1947.
- [3] A. Papoulis: Probability, random variables and stochastic processes. New York, McGraw-Hill, 1965.
- [4] M. Abramowitz and I. A. Stegun: Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series No. 55. Washington, US Department of Commerce, 1965.

Adresse des Autors:

Dr. H.-J. Schlaepfer, Institut für Fernmeldetechnik der ETHZ, Sternwartstrasse 7, 8006 Zürich.